ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes, tan la fonction tangente et ln le logarithme népérien. On rappelle que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x(1+\tan^2 x)dx$.

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{e^{2x}-10}{1-e^x}$.

3. Donner le comportement au voisignage de $x = 0$ de la fonction de la question précédente.

4. Ecrire le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

5. Donner le domaine de définition de la fonction
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

6. Calculer la dérivée de la fonction définie à la question précédente.

7. On considère un dé truqué où l'apparition d'une face est proportionnelle au numéro de cette face. Donner la probabilité d'obtenir un 6 quand on lance ce dé.

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{4u_n+3}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

9. Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1.$$

10. Résoudre l'equation $x^4 - 6x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0. \tag{1}$$

1. Soit α une solution de (1) et g la fonction définie par $g(x) = x^2 + x - 1$. Donner la valeur de $(g(\alpha))^2$.
2. Déduire de la question précédente les solutions de (1) dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

   (a) Donner le domaine de définition de ϕ, et calculer les limites de ϕ aux bornes de son domaine de définition.

   (b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ.

   (c) Etudier les variations de la fonction h définie par

$$h(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$$

   et en déduire le signe de $\phi'(x)$ selon la valeur de x.

   (d) Dresser le tableau de variations de ϕ, et donner l'allure de sa courbe représentative (on ne cherchera pas à calculer la limite de $\phi'(x)$ en 0).

2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 1$ associe

$$f(x) = \int_1^x \phi(t)dt.$$

   (a) Montrer que f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

   (b) Montrer que

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \leq f(x) \leq \int_1^x \frac{ln(2t)}{t} dt.$$

   En déduire que

$$\frac{\ln^2 x}{2} \leq f(x) \leq \ln 2 \ln x + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

(c) Déterminer les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand x tend vers $+\infty$.

(d) Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$$
et en déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$
5. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \pi/2$.
   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul. On considère dans cet exercice la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

1. Etudier les variations de la fonction f_n.
2. Montrer que l'équation
$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1 = 0$$
admet une unique solution $a_n \geq 0$. Donner la valeur de a_2.
3. Montrer que $f_n(a_{n+1}) \leq 0$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
4. Donner, en la justifiant, la valeur de $a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^3 + a_n^2 - a_n$, et en déduire que
$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_n^{n+1}}{2}.$$
5. Déterminer la limite de la suite $(a_2^{n+1})_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$. En déduire la limite, toujours quand $n \to \infty$, de la suite $(a_n^{n+1})_{n\geq 0}$, puis celle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 6

1. Caractériser l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'équation
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.$$

2. On considère l'équation
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$
   (a) Trouver, si elles existent, les solutions réelles et les solutions imaginaires pures de l'équation (2).

   Soit $z = a + ib$ une solution de (2)

   (b) Montrer que
$$a^2 + (b-m)^2 = k$$
   où m et k sont deux réels qu'on déterminera.

   (c) soit $Z = z + 3i$: donner le module de Z.

   (d) Dans le plan complexe, où placeriez-vous les solutions de (2) ?

Exercice 7

Un établissement scolaire estime qu'un élève sérieux doit avoir une probabilité au plus égale à 2% d'arriver en retard en cours. On considère dans cet exercice un élève sérieux, dont la probabilité d'arriver en retard est, chaque jour, de 2%. Sur un semestre scolaire de 100 jours, on note X la variable aléatoire égale au nombre de retards constatés chez cet élève.

1. Nommer la loi de la variable aléatoire X et donner son espérance ainsi que sa variance.
2. Quelle est la probabilité pour que l'élève n'ait jamais été en retard sur tout le semestre ? Pour qu'il ait été en retard exactement une fois ? Pour qu'il ait été en retard tous les jours ? Que pensez-vous de ce dernier résultat ?
3. L'établissement décide d'infliger une sanction à partir du 3ème retard dans le semestre. Calculer la probabilité pour que l'élève sérieux considéré dans cet exercice soit sanctionné. Quelle aurait été cette probabilité pour un élève très sérieux ayant chaque jour une probabilité de 1% d'arriver en retard ?