SESSION 2020

CAPESA
Analystes statisticiens

PREMIERE COMPOSITION

Exercice 1

1. La fonction $x \mapsto \tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right)$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et donc l'intégrale proposée existe. Ensuite, puisque pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 0^2\right) = \frac{3}{2}.$$

2. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = -\dfrac{e^{2x}}{e^x} \times \dfrac{1-10e^{-2x}}{1-e^{-x}} = -e^x \times \dfrac{1-10e^{-2x}}{1-e^{-x}}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-10e^{-2x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1-e^x) = 0$ et de plus, si $x < 0$, $1-e^x > 0$ et si $x > 0$, $1-e^x < 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to0} e^{2x} - 10 = -9 < 0$. En divisant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$

4. $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $1-x^2 \neq 0$ puis $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0$ ce qui équivaut à $1-x^2 > 0$ puis $x \in]-1,1[$. Le domaine de définition de la fonction proposée est $D =]-1,1[$.

6. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(1-x^2\right)$ puis

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x\left(\left(1-x^2\right)+\left(1+x^2\right)\right)}{1-x^4} = \frac{4x}{1-x^4}.$$

7. On note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Il existe un réel λ tel que pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $P(X=k) = \lambda k$. La somme de ces probabilités est égale à 1 et donc $\lambda(1+2+3+4+5+6) = 1$ puis $\lambda = \dfrac{1}{21}$. Mais alors, $P(X=6) = \dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$.

8. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et que $u_n > 0$. Alors, $4u_n+3 \neq 0$ et donc u_{n+1} existe puis $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{4u_n+3} > 0$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n}{4u_n+3} - u_n = -\dfrac{4u_n^2}{4u_n+3} < 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul.

La fonction $x \mapsto \dfrac{3x}{4x+3}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et en particulier en ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{4_n+3}$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \dfrac{3\ell}{4\ell+3}$ ou encore $4\ell^2 = 0$ ou enfin $\ell = 0$. Finalement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

9. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k \times k! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\times k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)!-k!)\\ &= (n+1)!-1! \text{ (somme télescopique)}\\ &= (n+1)!-1.\end{aligned}$$

10. Pour tout réel x,

$$x^4-6x^2-1=\left(x^2-3\right)^2-10=\left(x^2-3-\sqrt{10}\right)\left(x^2-3+\sqrt{10}\right)$$
$$=\left(x-\sqrt{3+\sqrt{10}}\right)\left(x+\sqrt{3+\sqrt{10}}\right)\left(x^2-3+\sqrt{10}\right).$$

Puisque pour tout réel x, $x^2-3+\sqrt{10}\geqslant -3+\sqrt{10}>0$, l'ensemble des solutions de l'équation proposée dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{-\sqrt{3+\sqrt{10}},\sqrt{3+\sqrt{10}}\right\}$.

Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$z^4-6z^2-1=\left(z-\sqrt{3+\sqrt{10}}\right)\left(z+\sqrt{3+\sqrt{10}}\right)\left(z^2+\left(\sqrt{10}-3\right)\right)$$
$$=\left(z-\sqrt{3+\sqrt{10}}\right)\left(z+\sqrt{3+\sqrt{10}}\right)\left(z-i\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)\left(z+i\sqrt{\sqrt{10}-3}\right).$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée dans $\mathbb{C}$ est $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{-\sqrt{3+\sqrt{10}},\sqrt{3+\sqrt{10}},-i\sqrt{\sqrt{10}-3},i\sqrt{\sqrt{10}-3}\right\}$.

Exercice 2

1. Soit α une solution de l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

$$(g(\alpha))^2=\left(\alpha^2+\alpha-1\right)^2=\alpha^4+2\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=3+1=4.$$

2. Ainsi, si α est une solution de l'équation (1) dans $\mathbb{C}$, alors $(g(\alpha)-2)(g(\alpha)+2)=0$ ou encore $\left(\alpha^2+\alpha-3\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=0$ ou encore α est nécessairement solution de l'équation $\left(z^2+z-3\right)\left(z^2+z+1\right)=0$. Réciproquement, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\left(z^2+z-3\right)\left(z^2+z+1\right)=z^4+2z^3-z^2-2z-3$$

et donc $z^4+2z^3-z^2-2z-3=0\Leftrightarrow\left(z^2+z-3\right)\left(z^2+z+1\right)=0$.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée sont donc $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{j}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{13}\right)$ et $\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{13}\right)$ et les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (1) sont $\dfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{13}\right)$ et $\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{13}\right)$.

Exercice 3

1. a) La fonction ϕ est définie sur $D=]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x}=-1<0$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(1+x)=-\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to-1^+}\phi(x)=+\infty$.

• Il est connu que $\lim\limits_{x\to0}\phi(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

• Pour tout réel $x>0$, $\phi(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0\times0=0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ d'après un théorème de croissances comparées. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=0$.

b) La fonction ϕ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

$$\phi'(x)=\frac{\dfrac{1}{1+x}\times x-\ln(1+x)\times1}{x^2}=\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

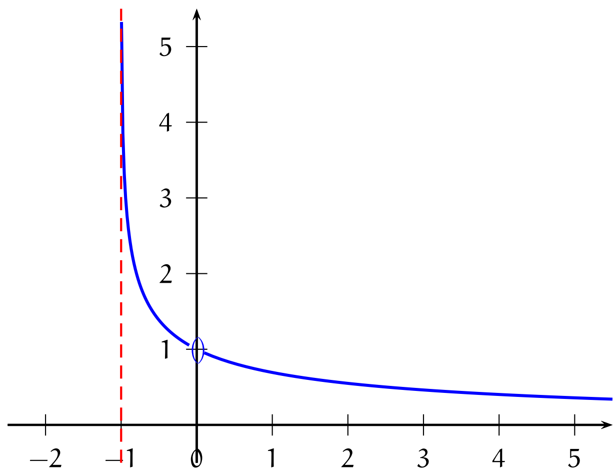
c) La fonction h est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout réel $x>-1$,

$$h'(x)=1-\ln(1+x)-(1+x)\times\frac{1}{1+x}=-\ln(1+x).$$

Ensuite, pour $x > -1$, $-\ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) < 0 \Leftrightarrow 1+x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ et de même, $-\ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $]-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $h(0) = 0$, la fonction h est strictement négative sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Puisque pour tout réel $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $\phi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2(1+x)}$, la fonction ϕ' est également strictement négative sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

d) Mais alors, la fonction ϕ est strictement décroissante sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Graphe de la fonction ϕ.



2. a) La fonction ϕ est continue sur $]1, +\infty[$. Donc, la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et de plus, $f' = \phi$. La fonction ϕ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$. Donc, la fonction ϕ est strictement positive sur $]1, +\infty[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

b) Soit $x > 1$. Pour tout réel $t \in [1, x]$, $\ln(1+t) \leqslant \ln(t+t) = \ln(2t)$ et $\ln(1+t) \geqslant \ln(t)$. Par suite, pour tout réel $t \in [1, x]$,

$$\frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(1+t)}{t} \leqslant \frac{\ln(2t)}{t}.$$

Par croissance de l'intégration, on obtient $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt \leqslant \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = f(x) \leqslant \int_1^x \frac{\ln(2t)}{t}\,dt$.

Ensuite, $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_1^x = \frac{\ln^2(x)}{2}$ et $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(2t)}{t}\,dt = \int_1^x \frac{\ln(2)}{t}\,dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \ln(2)\ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2}$. On a montré que

$$\forall x > 1,\ \frac{\ln^2(x)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2}.$$

c) Puisque pour tout $x > 1$, $f(x) \geqslant \dfrac{\ln^2(x)}{2}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)}{2} = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ensuite, pour tout $x > 1$,

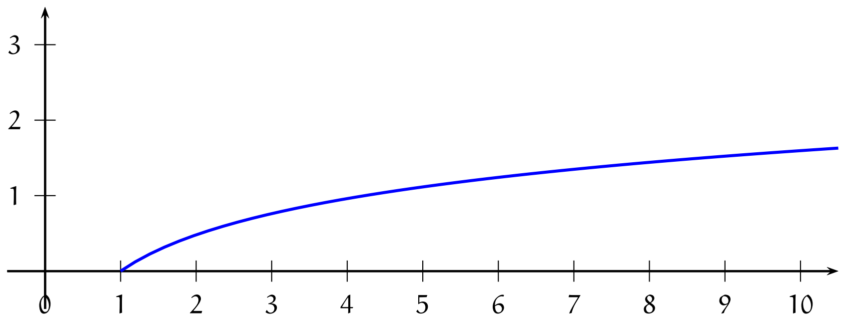
$$\frac{1}{2}\frac{\ln^2(x)}{x} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \ln(2)\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2}\frac{\ln^2(x)}{x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, les deux membres de cet encadrement tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

d) Tableau de variation de la fonction f.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$

Allure du graphe de la fonction ϕ. (On tient compte de $f'(1) = \phi(1) = \ln(2) = 0,69\ldots$).



Exercice 4

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times \sin^{n+1}(x)\ dx = \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x)) \times (n+1)\cos(x)\sin^n(x)\ dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2(x)\ dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\left(1-\sin^2(x)\right) dx = (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\ dx\right) \\
&= (n+1)\left(I_n - I_{n+2}\right)
\end{aligned}$$

et donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ puis $\sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$ après multiplication par lé réel positif $\sin^n(x)$. Par croissance de l'intégration, on obtient $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. D'autre part, la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 0. On en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \geqslant 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. I_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc, $I_n > 0$ (on peut aussi écrire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dx \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dx \geqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n > 0$).

D'après la question 2),

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leqslant I_n$ puis $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(I_{n+1}/I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

5. a) On a vu à la question 2) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ ou encore, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$. On multiplie les deux membres de cette égalité par I_n et on obtient : pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)I_{n+1}I_n = nI_nI_{n-1}$. Ceci montre que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante. Mais alors, pour tout $n \geqslant 1$, $nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2}$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{\pi}{2} = nI_nI_{n-1} = nI_n^2\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$ puis (en tenant compte de $I_n > 0$)

$$I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n} \times \frac{I_n}{I_{n-1}}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \sqrt{1 \times 0} = 0$.

Exercice 5

1. Soit $n \geqslant 1$. La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1 > 0.$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2. La fonction f_n est continue (en tant que polynôme) et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. La fonction f_n est donc bijective de $[0, +\infty[$ sur $f_n([0, +\infty[) = \left[f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [-1, +\infty[$. Puisque $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un réel positif a_n et un seul tel que $f_n(a_n) = 0$.

On note que $a_1 = 1$. Ensuite, a_2 est l'unique solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ et donc $a_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

3. Soit $n \geqslant 1$.

$$f_n(a_{n+1}) = a_{n+1}^n + a_{n+1}^{n-1} + \ldots + a_1 - 1 = f_{n+1}(a_{n+1}) - a_{n+1}^{n+1} = -a_{n+1}^{n+1} \leqslant 0.$$

Ainsi, $f_n(a_{n+1}) \leqslant f_n(a_n)$. Puisque la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $a_{n+1} \leqslant a_n$. On a montré que pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ et donc que la suite $(a_n)_{n\geqslant1}$ est décroissante.

4. Soit $n \geqslant 1$. $a_n^{n+1} + a_n^n + \ldots + a_n^2 - a_n = a_n \times f_n(a_n) = 0$. D'autre part,

$$a_n^{n+1} + a_n^n + \ldots + a_n^2 - a_n = a_n^{n+1} - a_n + f_n(a_n) - a_n + 1 = 1 - 2a_n + a_n^{n+1},$$

et donc $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{2}$.

5. $a_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6\ldots \in]-1, 1[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_2^{n+1} = 0$. Ensuite, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n^{n+1} \leqslant a_2^{n+1}$ (par décroissance de la suite $(a_n)_{n\geqslant1}$ et par croissance de la fonction $t \mapsto t^{n+1}$ sur $[0, +\infty[$). Le théorème des gendarmes montre alors que la suite $\left(a_n^{n+1}\right)_{n\geqslant1}$ converge et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1} = 0$.

La question précédente permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puis $z = a + ib$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 &\Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \text{ et } z \neq -i \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \text{ (car } |-i-i| \neq |i-i|) \\
&\Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + b^2 + 2b + 1 \\
&\Leftrightarrow -4b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$ est $\mathbb{R}$.

2. a) D'après la question précédente, pour tout réel z, $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1 \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc aucun nombre réel n'est solution de l'équation (2).

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ puis $z = ix$.

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \left|\frac{ix-i}{ix+i}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \sqrt{2}|x-1| = |x+1| \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}|x-1| = |x+1| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}(x-1) = x+1 \text{ ou } \sqrt{2}(x-1) = -x-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow x = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} \text{ ou } x = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} \\ &\Leftrightarrow x = 3+2\sqrt{2} \text{ ou } x = 3-2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Les imaginaires purs solutions de l'équation (2) sont les nombres $\left(3-2\sqrt{2}\right)i$ et $\left(3+2\sqrt{2}\right)i$.

b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$ puis $z = a + ib$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow 2|z-i|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow 2\left(a^2+(b-1)^2\right) = a^2+(b+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 2a^2+2b^2-4b+2 = a^2+b^2+2b+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-6b+1 = 0 \Leftrightarrow a^2+(b-3)^2 = 8.\end{aligned}$$

c) (erreur d'énoncé : lire $Z = z - 3i$) $|Z|^2 = |z-3i|^2 = a^2 + (b-3)^2 = 8$ et donc $|Z| = 2\sqrt{2}$.

d) Puisque $a^2 + (b-3)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$, l'image du nombre complexe z est sur le cercle de centre $\Omega(0, 3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice 7

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$. L'espérance de X est $E(X) = np = 2$ et la variance de X est $V(X) = np(1-p) = 2 \times 0,98 = 1,96$.

2. La probabilité que l'élève n'ait jamais été en retard est $P(X = 0) = 0,98^{100} = 0,13\ldots$
La probabilité que l'élève ait été en retard exactement une fois est $P(X = 1) = 100 \times 0,02 \times 0,98^{99} = 0,27\ldots$
La probabilité que l'élève ait été en retard tous les jours est $P(X = 100) = 0,02^{100} = 1,2\ldots \times 10^{-170}$. On peut estimer que la probabilité que l'élève ait été en retard tous les jours est nulle.

3. La probabilité que l'élève soit sanctionné est

$$\begin{aligned}P(X \geqslant 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - 0,98^{100} - 100 \times 0,02 \times 0,98^{99} - \frac{100 \times 99}{2} \times 0,02^2 \times 0,98^{98} \\ &= 0,32\ldots.\end{aligned}$$

Il y a donc environ une chance sur trois qu'un élève sérieux soit sanctionné. En notant Y la variable aléatoire égale au nombre de retards d'un élève très sérieux, la probabilité qu'un élève très sérieux soit sanctionné est

$$\begin{aligned}P(Y \geqslant 3) &= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2) = 1 - 0,99^{100} - 100 \times 0,01 \times 0,99^{99} - \frac{100 \times 99}{2} \times 0,01^2 \times 0,99^{98} \\ &= 0,079\ldots\end{aligned}$$

Il y a donc environ 8 chances sur 100 qu'un élève très sérieux soit sanctionné.

