ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1. Etudier la convexité de f.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Soit la fonction h définie sur R par : $h(x) = e^{-x} f(x)$. Calculer $I = \int_0^1 h(x)h(-x)\,dx$.

Exercice n° 2

Soit la fonction numérique f_α définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha + Ln(1+x^2)$, où α est un nombre réel quelconque et Ln désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de f_α selon les valeurs de α.
2. Etudier les variations et tracer les graphes de f_1 et f_2. Comparer ces deux graphes sur R^+.
3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $u_0 > 0$.
4. Etudier la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = f_2(v_n)$ et $v_0 > 0$.
5. Pour $n \in N$, on pose : $I_n = \int_1^n f_n(x)\,dx$.

- Calculer I_2
- Etudier la suite (I_n)

Exercice n° 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α et β sont des paramètres réels.

1. Etudier la diagonalisation de M selon les valeurs de α et β.

2. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.
Calculer, pour tout $n \in N$, M^n et $(M + I)^n$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

3. On suppose $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta \neq 1$, calculer M^n, pour tout $n \in N$.

Exercice n° 4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $V = {}^tM\, M$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice M.

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice V.

3. Trouver un vecteur unitaire u de R^3 tel que $V u = 2u$.

4. Déterminer la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale, dans R^3, sur la droite vectorielle D engendrée par u.

5. Si chaque ligne de la matrice M correspond à une observation, quelle est l'observation dont la projection orthogonale sur D a la plus grande longueur ?

6. Déterminer les vecteurs propres de la matrice V.

7. Résoudre $Max \left\{ {}^t v V v \;/\; v \in R^3, \|v\| = 1 \right\}$.

Exercice n° 5

Pour $x\in R$, on considère l'intégrale généralisée : $K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\,dt$

1. Montrer que $K : x \mapsto K(x)$ définit une application de R dans R et étudier sa parité.

2. Pour $x>0$, calculer $K(x)$ en fonction de $K(1)$ que l'on ne cherchera pas à calculer et en déduire l'expression de $K(x)$ pour tout $x\in R$.

3. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2\,(1+t^2)}\,dt$

- Montrer que F est bien définie sur R.
- Trouver un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (on pourra comparer F et K).

4. Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t\,x)}{t\,(1+t^2)}\,dt$

- Montrer que G est convergente.
- Pour $x, h\in R$, monter l'inégalité suivante : $\left|\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)\right| \leq h^2\,t^2$.
- Montrer que F est dérivable et que sa dérivée est égale à G.
- Montrer que G est continue.

Exercice n° 6

1. Soit $M : (a,b,c)\in C^3 \mapsto M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où C désigne l'ensemble des nombres complexes. Montrer que M est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre C^3 et $E = \{M(a,b,c)\ /\ (a,b,c)\in C^3\}$ et déterminer une base de E.

2. Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer U^n pour tout $n\in N$.

3. Calculer $M(a,b,c)\times M(a, jb, j^2c)\times M(a, j^2b, jc)$, où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

4. Déterminer, quand il existe, l'inverse de $M(a,b,c)$.

5. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$. A quelle condition ces valeurs propres sont-elles distinctes ?