SESSION 2019

CAPESA
ISE Option mathématiques

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x\left(x^2+1\right) - e^x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\left(x^2-2x+1\right)e^x}{x^2+1},$$

puis

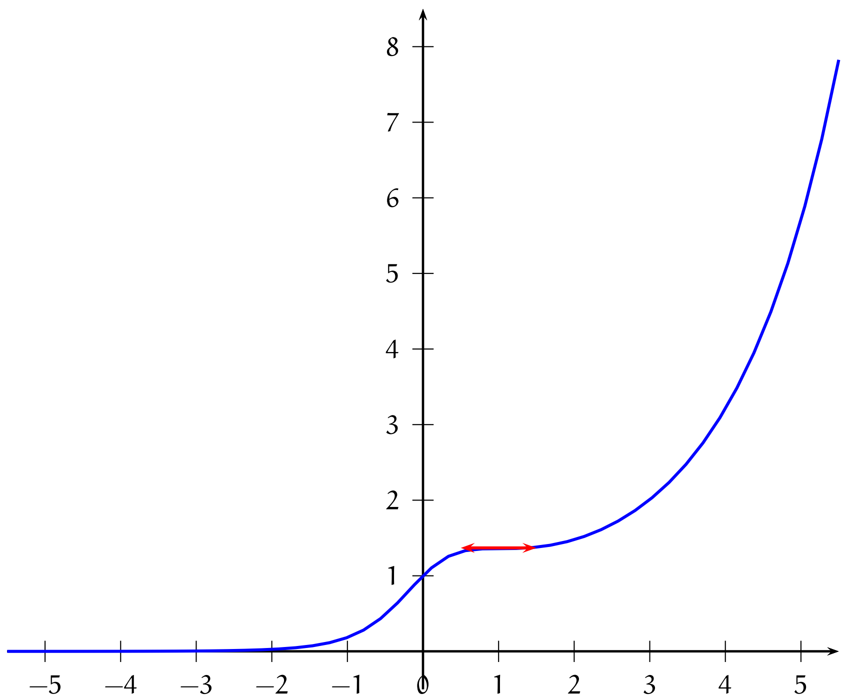
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left((2x-2)e^x + \left(x^2-2x+1\right)e^x\right)\left(x^2+1\right) - \left(x^2-2x+1\right)e^x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{\left(\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^2-2x+1\right)\right)e^x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{\left(x^4-2x^3+4x^2-2x-1\right)e^x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{(x-1)\left(x^3-x^2+3x+1\right)e^x}{\left(x^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

Pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe de $(x-1)\left(x^3-x^2+3x+1\right)$. Etudions le signe de $P(x) = x^3-x^2+3x+1$. Pour tout réel x, $P'(x) = 3x^2-2x+3 = 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{3} > 0$. La fonction P est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} P(x), \lim\limits_{x\to+\infty} P(x)\right[= \mathbb{R}$. En particulier, la fonction P s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$, en un certain réel α. De plus, par stricte croissance de la fonction P sur $\mathbb{R}$, la fonction P est strictement négative sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. Enfin, la calculatrice donne $P(0,3) = -0,0,017 < 0$ et $P(-0,2) = 0,352 > 0$ et donc $-0,3 < \alpha < -0,2$.

Mais alors, la fonction f'' est strictement positive sur $]-\infty, \alpha[$, strictement négative sur $]\alpha, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. On en déduit que la fonction f est strictement convexe sur $]-\infty, \alpha]$, strictement concave sur $[\alpha, 1]$ et strictement convexe sur $[1, +\infty[$. De plus, la fonction f'' s'annule en changeant de signe en α et 1 et donc la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion, ses points d'abscisses respectives α et 1.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 e^x}{x^2+1}$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et s'annule en 1. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

Graphe de f.



3. Pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ puis $h(x)h(-x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. En posant $x = \tan(\theta)$, on obtient

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1+\tan^2(\theta)\right)\,d\theta}{\left(1+\tan^2(\theta)\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\tan^2(\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos(2\theta))\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi+2}{8}.$$

Exercice 2

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note D_α le domaine définition de f_α.

Pour tout réel x, $1+x^2 > 0$ puis $\ln\left(1+x^2\right)$ existe. Donc, pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si x^α existe.
Si $\alpha > 0$, $D_\alpha \subset [0,+\infty[$ et même, la plupart du temps, $D_\alpha = [0,+\infty[$. On peut noter que si α est entier ou si par exemple α est de la forme $\dfrac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $D_\alpha = \mathbb{R}$.
Si $\alpha = 0$, avec la convention (très douteuse quand $x = 0$) que pour tout réel x, on a $x^\alpha = 1$, $D_\alpha = \mathbb{R}$.
Si $\alpha < 0$, $D_\alpha \subset]0,+\infty[$ et même, la plupart du temps, $D_\alpha =]0,+\infty[$. On peut noter que si α est entier strictement négatif ou si par exemple α est de la forme $-\dfrac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $D_\alpha = \mathbb{R}^*$.

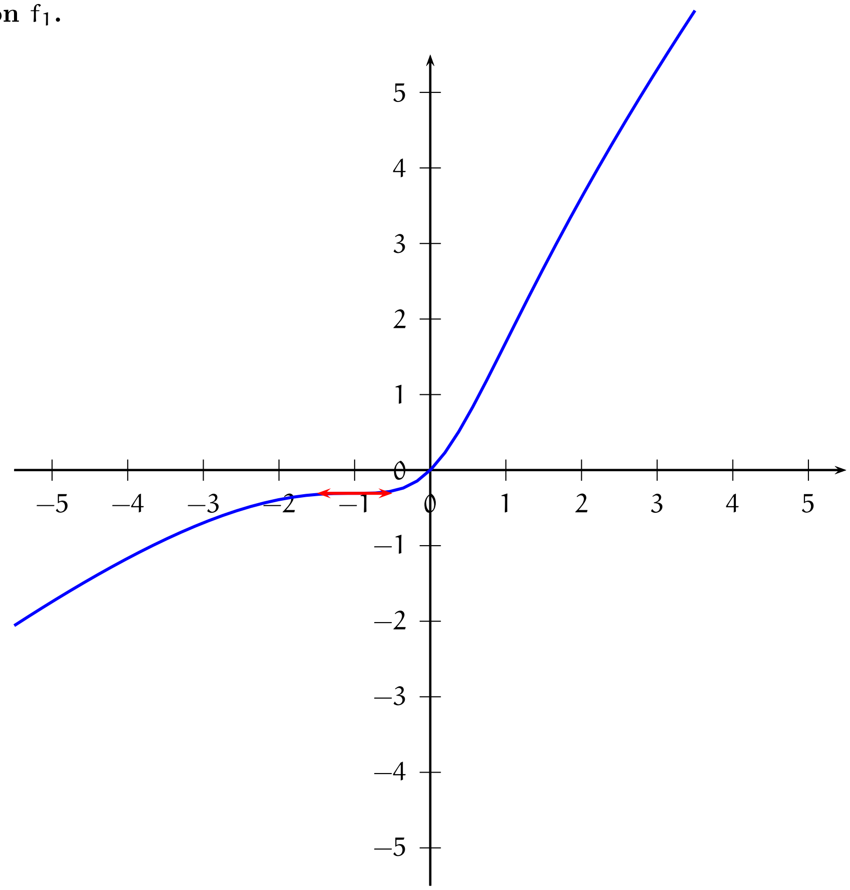
2.

• **Etude de la fonction f_1.** Pour tout réel x $f_1(x) = x + \ln\left(1+x^2\right)$.
La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}.$$

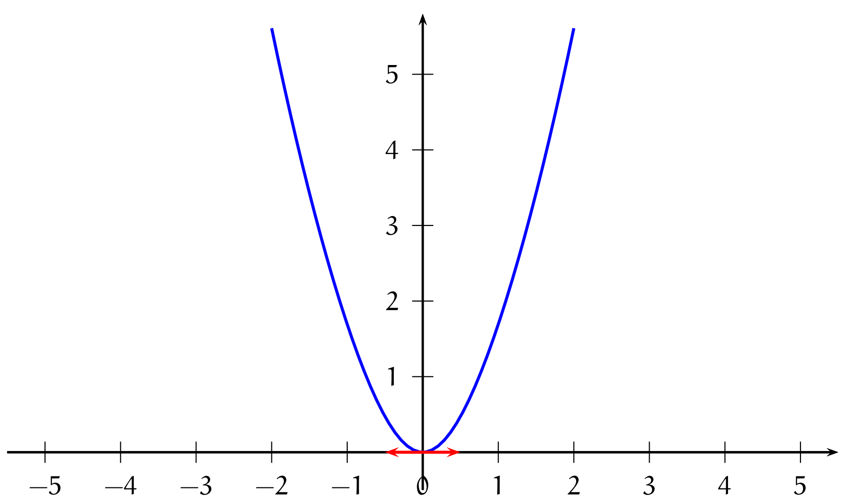
La fonction f_1' est strictement positive sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et s'annule en -1. Donc, la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

Graphe de la fonction f_1.



• **Etude de la fonction f_2.** Pour tout réel x, $f_2(x) = x^2 + \ln\left(1 + x^2\right)$.
La fonction f_2 est paire, continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[0, +\infty[$ et donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ par parité. Ensuite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty$.

Graphe de la fonction f_2.



Position relative des deux graphes. Pour tout réel x,

$$f_2(x) - f_1(x) = \left(x^2 + \ln\left(1 + x^2\right)\right) - \left(x + \ln\left(1 + x^2\right)\right) = x^2 - x = x(x - 1).$$

La fonction $f_2 - f_1$ est strictement négative sur $]0, 1[$, strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et s'annule en 0 et 1. Le graphe de la fonction f_2 est strictement au-dessus du graphe de la fonction f_1 sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 1[$ et enfin les deux courbes ont en commun les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(1, 1 + \ln(2))$.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et de plus, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$. Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}-u_n=\ln\left(1+u_n^2\right)>0.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ou bien convergente, ou bien divergente de limite $+\infty$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel $\ell\geqslant u_0$ vérifiant $f_1(\ell)=\ell$ (par continuité de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$). Or pour tout réel x,

$$f_1(x)=x\Leftrightarrow x+\ln\left(1+x^2\right)=x\Leftrightarrow \ln\left(1+x^2\right)=0\Leftrightarrow 1+x^2=1\Leftrightarrow x=0.$$

Mais alors $\ell=0$ ce qui contredit $\ell\geqslant u_0>0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

4. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et de plus, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n>0$.

Pour $x\in[0,+\infty[$, posons $g(x)=f_2(x)-x$. g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$g'(x)=2x+\frac{2x}{1+x^2}-1=\frac{(2x-1)\left(x^2+1\right)+2x}{1+x^2}=\frac{2x^3-x^2+4x-1}{1+x^2}.$$

Pour tout réel x, $g'(x)$ est du signe de $P(x)=2x^3-x^2+4x-1$. La fonction P est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif x, $P'(x)=6x^2-2x+4=6\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{23}{6}>0$. La fonction P est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, la fonction P est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et vérifie $P(0)=-1<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$. La fonction P s'annule une fois et une seule sur $[0,+\infty[$ en un certain réel que l'on note β. De plus, par stricte croissance de la fonction P sur $[0,+\infty[$, la fonction P est strictement négative sur $[0,\beta[$, strictement positive sur $]\beta,+\infty[$ et s'annule en β. Il en est de même de la fonction g'.

La fonction g est strictement décroissante sur $[0,\beta]$ et vérifie $g(0)=0$. Donc, la fonction g est strictement négative sur $]0,\beta]$. D'autre part, la fonction g est continue et strictement croissante sur $[\beta,+\infty[$ et vérifie $g(\beta)<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ (car $g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2$). De nouveau, la fonction g s'annule une fois et une seule en un certain réel α, est strictement négative sur $[\beta,\alpha[$ puis sur $]0,\alpha[$ et est strictement positive sur $]\alpha,\infty[$. On note enfin que $g(0,5)=-0,2\ldots<0$ et $g(0,6)=0,06\ldots>0$ et donc $0,5<\alpha<0,6$.

1er cas. Si $v_0=\alpha$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en particulier convergente, de limite α.

2ème cas. Supposons $v_0\in]0,\alpha[$. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\in]0,\alpha[$.

- C'est vrai pour $n=0$.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons $0<v_n<\alpha$. Par stricte croissance de la fonction f_2 sur $]0,+\infty[$, $f_2(0)<f_2(v_n)<f_2(\alpha)$ puis $0<v_{n+1}<\alpha$.

Le résultat est démontré par récurrence. Mais alors, d'après l'étude du signe de la fonction g, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_2(v_n)-v_n<0$ puis $v_{n+1}<v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ vérifiant $0\leqslant\ell\leqslant v_0<\alpha$ et donc $\ell=0$ d'après l'étude du signe de la fonction g. En résumé, dans ce cas, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers 0.

3ème cas. Supposons $v_0\in]\alpha,+\infty[$. Alors, comme pour le 2ème cas, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n>\alpha$. Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_2(v_n)-v_n>0$ puis $v_{n+1}>v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel $\ell\geqslant v_0>\alpha$ vérifiant $f(\ell)=\ell$, ce qui est impossible. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

5. Soit $X>1$. Calculons $\displaystyle\int_1^X\ln\left(1+x^2\right)dx$. Les deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\ln\left(1+x^2\right)$ sont de classe C^1 sur le segment $[1,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_1^X\ln\left(1+x^2\right)dx&=\left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^X-\int_1^X x\times\frac{2x}{1+x^2}\,dx=X\ln\left(1+X^2\right)-\ln(2)-2\int_1^X\frac{x^2}{1+x^2}\,dx\\&=X\ln\left(1+X^2\right)-\ln(2)-2\int_1^X\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx=X\ln\left(1+X^2\right)-\ln(2)-2\left(X-1-\mathrm{Arctan}(X)+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$I_2 = \int_1^2 \left(x^2 + \ln\left(1+x^2\right)\right) dx = \frac{7}{3} + 2\ln(5) - \ln(2) - 2 + 2\operatorname{Arctan}(2) - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} + \ln\left(\frac{25}{2}\right) + 2\operatorname{Arctan}(2) - \frac{\pi}{2}.$$

Plus généralement, pour tout $n \geqslant 2$,

$$I_n = \int_1^n \left(x^n + \ln\left(1+x^2\right)\right) dx = \frac{n^{n+1}-1}{n+1} + n\ln\left(1+n^2\right) - 2n + 2\operatorname{Arctan}(n) + 2 - \ln(2) - \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{n+1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$ et en particulier que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Etudions enfin le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$. Soit $n \geqslant 2$. Pour tout réel x de $[1,n]$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout réel x de $[1,n]$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ puis, par croissance et positivité de l'intégration,

$$I_n = \int_1^n f_n(x)\ dx \leqslant \int_1^n f_{n+1}(x)\ dx \leqslant \int_1^n f_{n+1}(x)\ dx + \int_n^{n+1} f_{n+1}(x)\ dx = \int_1^{n+1} f_{n+1}(x)\ dx = I_{n+1}.$$

La suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Exercice 3

1.

$$\chi_M = \begin{vmatrix} \alpha - X & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha - X & \beta \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} \alpha - X & \beta \\ \beta & \alpha - X \end{vmatrix} = (1-X)\left((X-\alpha)^2 - \beta^2\right)$$
$$= -(X-1)(X-(\alpha+\beta))(X-(\alpha-\beta)).$$

Donc, $\mathrm{Sp}(M) = (1, \alpha+\beta, \alpha-\beta)$.

Ensuite, $\alpha+\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1-\alpha$, $\alpha - \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 1$ et $\alpha+\beta = \alpha-\beta \Leftrightarrow 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

1er cas. Supposons $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1-\alpha$ et $\beta \neq \alpha - 1$. Dans ce cas, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples puis M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2ème cas. Supposons $\beta = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(M) = (1, \alpha, \alpha)$.

- Si $\alpha = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1 est valeur propre triple de M et si par l'absurde M est diagonalisable, alors M est semblable à I_3 puis égale à I_3 ce qui est faux. Donc, M n'est pas diagonalisable.

- Si $\alpha \neq 1$, M admet 1 pour valeur propre simple et α pour valeur propre double. On rappelle que M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. De plus, le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours une droite vectorielle.
  Donc, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(M - \alpha I_3)$ est de dimension 2 ou encore $M - \alpha I_3$ est de rang 1 (d'après le théorème du rang). Or, $M - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ est effectivement de rang 1 et donc M est diagonalisable.

3ème cas. Supposons $\beta \neq 0$ et $\alpha + \beta = 1$ (et donc $\alpha \neq 1$) ou encore $\beta = 1 - \alpha$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(M) = (1, 1, 2\alpha - 1)$. On note que $2\alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Puisque $\alpha \neq 1$, $2\alpha - 1 \neq 1$ puis M admet 1 pour valeur propre double et $2\alpha - 1$ pour valeur propre simple.

Dans ce cas, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{rg}\,(M - I_3) = 1$. Mais $M - I_3 = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha - 1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette dernière matrice a le même rang que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$ (suppression de C_2 car $C_2 = -C_1$ puis suppression de la dernière ligne qui est nulle) puis que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (car $1-\alpha \neq 0$). Le déterminant de cette matrice est $-1 \neq 0$ et donc cette matrice est de rang 2. Il en est de même de la matrice $M - I_3$. Dans ce cas, la matrice M n'est pas diagonalisable.

4ème cas. Supposons $\beta \neq 0$ et $\alpha - \beta = 1$ (et donc $\alpha \neq 1$) ou encore $\beta = \alpha - 1$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(M) = (1, 2\alpha - 1, 1)$. On note que $2\alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ce qui est faux. Donc, $2\alpha - 1 \neq 1$ puis M admet 1 pour valeur propre double et $2\alpha - 1$ pour valeur propre simple.

Dans ce cas, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{rg}\,(M - I_3) = 1$. Mais $M - I_3 = \begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme précédemment, cette matrice est de rang 2 et donc M n'est pas diagonalisable.

En résumé, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $(\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1 - \alpha$ et $\beta \neq \alpha - 1)$ ou $(\beta = 0$ et $\alpha \neq 1)$.

2. Si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. $M = I_3 + E_{1,3}$. Les deux matrices I_3 et $E_{1,3}$ commutent. En tenant compte de $E_{1,3}^2 = 0_3$ et donc pour tout $k \geqslant 2$, $E_{1,3}^k = 0_3$, la formule du binôme permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = (I_3 + E_{1,3})^n = I_3 + nE_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(M + I_3)^n = (2I_3 + E_{1,3})^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} E_{1,3} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (M + I_3)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. Les conditions de l'énoncé impose $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$ et $\beta = 1 - \alpha$ (la condition $\alpha - \beta \neq 1$ est alors automatiquement vérifiée).

Dans cette question, $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_M = -(X-1)^2(X - (2\alpha - 1))$. On note que $\alpha - \beta \neq 1$ ou encore $2\alpha - 1 \neq 1$. Ainsi, χ_M admet 1 pour racine double et $2\alpha - 1$ pour racine simple. D'après la question 1), la matrice M n'est pas diagonalisable . Commençons tout de même à déterminer les sous-espaces propres de M

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$U \in E_{2\alpha-1}(M) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-\alpha)x + (1-\alpha)y + \alpha z = 0 \\ (1-\alpha)x + (1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \\ 2(1-\alpha)z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = -x \end{array} \right. \quad (\text{car } \alpha \neq 1).$$

Donc, $E_{2\alpha-1}(M) = \mathrm{Vect}\,(U_1)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(M) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha-1)x + (1-\alpha)y + \alpha z = 0 \\ (1-\alpha)x + (\alpha-1)y + (1-\alpha)z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ (\alpha-1)x + (1-\alpha)y + \alpha z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{car } \alpha \neq 1) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -x + y \\ (\alpha-1)x + (1-\alpha)y + \alpha(-x + y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -x + y \\ -x + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Donc, $E_1(M) = \text{Vect}(U_2)$ où $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On va maintenant prendre le vecteur $U_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de sorte que $MU_3 = U_2 + U_3$ ou encore $(M - I_3)\,U_3 = U_2$.

$$(M - I_3)\,U_3 = U_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\alpha-1)x + (1-\alpha)y + \alpha z = 1 \\ (1-\alpha)x + (\alpha-1)y + (1-\alpha)z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2\ (\text{I}+\text{II}) \\ (1-\alpha)x + (\alpha-1)y + 2(1-\alpha) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ x - y = \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha} \end{array}\right.$$

On prend $U_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Posons alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\det(P) = 2(1+1) = 4 \neq 0$, P est une matrice inversible. De plus, par construction,

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note T cette dernière matrice. Déterminons P^{-1}. En notant (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 = E_1 - E_2 \\ U_2 = E_1 + E_2 \\ U_3 = \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha}E_1 + 2E_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_1 = \dfrac{1}{2}(U_1 + U_2) \\ E_2 = \dfrac{1}{2}(-U_1 + U_2) \\ E_3 = -\dfrac{2\alpha-1}{4(1-\alpha)}U_1 - \dfrac{2\alpha-1}{4(1-\alpha)}U_2 + \dfrac{1}{2}U_3 \end{array}\right.,$$

et donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\dfrac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)} \\ 1 & 1 & -\dfrac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $T = D + E_{2,3}$ où $D = \text{diag}(2\alpha-1, 1, 1)$. $DE_{2,3} = E_{2,3}D = E_{2,3}$ et donc la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$T^n = D^n + nD^{n-1}E_{2,3} = \begin{pmatrix} (2\alpha-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit finalement que

$$\begin{aligned} M^n &= \left(PTP^{-1}\right)^n = PT^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2\alpha-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\dfrac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)} \\ 1 & 1 & -\dfrac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2\alpha-1)^n & 1 & \dfrac{(-n+2)\alpha+n-1}{1-\alpha} \\ -(2\alpha-1)^n & 1 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\dfrac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)} \\ 1 & 1 & -\dfrac{2\alpha-1}{2(1-\alpha)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2\alpha-1)^n+1 & -(2\alpha-1)^n+1 & \dfrac{-(2\alpha-1)^{n+1}-2(n-1)\alpha+2n-1}{2(1-\alpha)} \\ -(2\alpha-1)^n+1 & (2\alpha-1)^n+1 & \dfrac{(2\alpha-1)^{n+1}-2(n+1)\alpha+2n+1}{2(1-\alpha)} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4

1. M est une matrice de format $(4,3)$ et ${}^tM$ est une matrice de format $(3,4)$. Donc, $V = {}^tMM$ est une matrice de format $(3,3)$. Ensuite,

$$V = {}^tMM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_V &= \begin{vmatrix} 6-X & -3 & 1 \\ -3 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (6-X)(2-X)^2 + 3(-6+3X) + (X-2) = (2-X)[(6-X)(2-X) - 9 - 1] \\ &= -(X-2)\left(X^2 - 8X + 2\right) = -(X-2)\left(X - 4 - \sqrt{14}\right)\left(X - 4 + \sqrt{14}\right) \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Sp}(V) = \left(2, 4-\sqrt{14}, 4+\sqrt{14}\right)$.

3. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$Vu = 2u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + z = 0 \\ -3x = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 3y \end{array} \right. .$$

Le vecteur $u = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}\,(V - 2I_3)$.

4. On note p_u la projection orthogonale sur $D = \mathrm{Vect}(u)$. Puisque u est unitaire, on sait que pour tout $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p_u(v) = \langle u, v\rangle u = \frac{1}{10}(y+3z).(0,1,3) = \frac{1}{10}(0, y+3z, 3y+9z)$$

et donc la matrice demandée est $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

5. On note L_1, L_2, L_3 et L_4 les quatre lignes de M.

- $p_u(L_1) = \dfrac{1}{10}(0,3,9)$ puis $\|p_u(L_1)\| = \dfrac{\sqrt{72}}{10}$.
- $p_u(L_2) = \dfrac{1}{10}(0,-1,-3)$ puis $\|p_u(L_2)\| = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.
- $p_u(L_3) = \dfrac{1}{10}(0,-3,-9)$ puis $\|p_u(L_3)\| = \dfrac{\sqrt{72}}{10}$.
- $p_u(L_4) = \dfrac{1}{10}(0,1,3)$ puis $\|p_u(L_4)\| = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Les observations 1 et 3 sont les observations dont les projections orthogonales sur D ont la plus grande longueur.

6. On pose $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on a $E_2(V) = \mathrm{Vect}\,(U_1)$.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$U \in E_{4+\sqrt{14}}(V) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left(2-\sqrt{14}\right)x-3y+z=0\\ -3x-\left(2+\sqrt{14}\right)y=0\\ x-\left(2+\sqrt{14}\right)z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\left(2+\sqrt{14}\right)z\\ -\left(2-\sqrt{14}\right)\left(2+\sqrt{14}\right)z-3y+z=0\\ -3\left(2+\sqrt{14}\right)z-\left(2+\sqrt{14}\right)y=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\left(2+\sqrt{14}\right)z\\ y=-3z\end{array}\right..$$

Donc, $E_{4+\sqrt{14}}(V) = \mathrm{Vect}\,(U_2)$ où $U_2 = \begin{pmatrix}2+\sqrt{14}\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$. Un calcul conjugué fournit alors $E_{4-\sqrt{14}}(V) = \mathrm{Vect}\,(U_3)$ où $U_3 = \begin{pmatrix}2-\sqrt{14}\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$.

7. D'après le théorème spectral, $V = PD\,{}^tP$ où $D = \mathrm{diag}\left(2, 4+\sqrt{14}, 4-\sqrt{14}\right)$ et P est la matrice dont les colonnes sont $\dfrac{1}{\|U_1\|}U_1$, $\dfrac{1}{\|U_2\|}U_2$ et $\dfrac{1}{\|U_3\|}U_3$ (P est donc une matrice orthogonale).

Soient $v \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis $v' = {}^tPv$ de sorte que $v = Pv'$.

$${}^tvVv = {}^tvPD\,{}^tPv = {}^t\left({}^tPv\right)D\left({}^tPv\right) = {}^tv'Dv'.$$

Ensuite, puisque P est une matrice orthogonale, $\|v\| = \|v'\|$ (par exemple, $\|v'\|^2 = {}^t\left({}^tPv\right)\left({}^tPv\right) = {}^tvP\,{}^tPv = {}^tvv = \|v\|^2$) et en particulier, $\|v\| = 1 \Leftrightarrow \|v'\| = 1$. Par suite,

$$\left\{{}^tvVv,\ v \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|v\| = 1\right\} = \left\{{}^tv'Dv',\ v' \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|v'\| = 1\right\}.$$

Soit $v' \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|v'\| = 1$. Posons $v' = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. En tenant compte de $4-\sqrt{14} < 2 < 4+\sqrt{14}$,

$$\begin{aligned}{}^tvDv &= \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4+\sqrt{14} & 0\\ 0 & 0 & 4-\sqrt{14}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &= 2x^2 + \left(4+\sqrt{14}\right)y^2 + \left(4-\sqrt{14}\right)z^2\\ &\leqslant \left(4+\sqrt{14}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) = 4+\sqrt{14}\ (\text{car } \|v'\| = 1)\end{aligned}$$

avec égalité effectivement obtenue quand $v' = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ (correspondant à $v = \dfrac{1}{\|U_2\|}U_2$). Donc, $\mathrm{Max}\{{}^tvVv,\ v \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|v\| = 1\}$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\mathrm{Max}\left\{{}^tvVv,\ v \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|v\| = 1\right\} = \mathrm{Max}\left\{{}^tv'Dv',\ v' \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|v'\| = 1\right\} = 4+\sqrt{14}.$$

Exercice 5

1. $K(0)$ existe et vaut 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $k\ :\ t \mapsto \dfrac{\sin^2(tx)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$k(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2x^2}{t^2} = x^2$ et donc la fonction k se prolonge par continuité en 0 (en posant $k(0) = x^2$). En particulier, la fonction k est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

$k(t) \underset{t\to+\infty}{=} \dfrac{O(1)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Puisque $2 > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction k.

Finalement, la fonction k est intégrable sur $]0,+\infty[$ puis $K(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

On a montré que K est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $K(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(-tx)}{t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\ dt = K(x)$. La fonction K est paire.

2. Soit $x > 0$. En posant $u = tx$ et donc $t = \dfrac{u}{x}$, on obtient

$$K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{\frac{u^2}{x^2}}\ \frac{du}{x} = x\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\ du = xK(1).$$

Cette égalité reste vraie quand $x = 0$ et d'autre part, si $x < 0$, alors $K(x) = K(-x) = -xK(1)$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ K(x) = |x|K(1).$$

3. $F(0)$ existe et vaut 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\sin^2(tx)}{t^2\,(1+t^2)}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2x^2}{t^2} = x^2$ et donc la fonction f se prolonge par continuité en 0. En particulier, la fonction f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La fonction f est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
Finalement, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis $F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

On a montré que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) \sin^2(tx)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\ dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}\ dt,$$

(toutes les intégrales considérées convergent) et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = |x|K(1) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}\ dt \quad (*).$$

Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}\ dt\right| = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}\ dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}$ et en particulier,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}\ dt \underset{x\to-\infty}{=} O(1) \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}\ dt \underset{x\to+\infty}{=} O(1).$$

D'autre part, $K(1)$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0, +\infty[$ et donc $K(1) > 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} |x|K(1) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} |x|K(1) = +\infty.$$

L'égalité $(*)$ permet alors d'affirmer que

$$F(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -xK(1) \text{ et } F(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} xK(1).$$

4. $G(0)$ existe et vaut 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{\sin(2tx)}{t\,(1+t^2)}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2tx}{t} = 2x$ et donc la fonction g se prolonge par continuité en 0. En particulier, la fonction g est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
$g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$. La fonction g est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
Finalement, la fonction g est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis $G(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

On a montré que la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, posons $u(x) = \sin^2(xt)$. La fonction u est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2t\cos(xt)\sin(xt) = t\sin(2xt)$. puis $u''(x) = 2t^2\cos(2xt)$. En particulier, pour tout réel t,

$$|u''(x)| = 2t^2|\cos(2xt)| \leqslant 2t^2.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout réel x,

$$\left|\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)\right| = |u(x+h) - u(x) - hu'(x)| \leqslant \frac{2t^2(x+h-x)^2}{2!} = h^2t^2.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\sin^2(t(x+h))}{t^2(1+t^2)} - \dfrac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} - \dfrac{h\sin(2tx)}{t(1+t^2)}\right| \leqslant \dfrac{h^2}{1+t^2}$ puis

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x) - hG(x)| &= \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin^2(t(x+h))}{t^2(1+t^2)} - \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} - \frac{h\sin(2tx)}{t(1+t^2)}\right)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin^2(t(x+h))}{t^2(1+t^2)} - \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} - \frac{h\sin(2tx)}{t(1+t^2)}\right| dt \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi h^2}{2}.\end{aligned}$$

Mais alors, $F(x+h) - F(x) - hG(x) \underset{h\to 0}{=} o(h)$ puis $F(x+h) \underset{h\to 0}{=} F(x) + hG(x) + o(h)$. F admet en x un développement limité d'ordre 1 et donc F est dérivable en x. De plus, $F'(x) = G(x)$.

On a montré que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = G$.

Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}|G(x+h) - G(x)| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{|\sin(t(x+h)) - \sin(tx)|}{t(1+t^2)}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{2\left|\sin\left(\frac{th}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{t(2x+h)}{2}\right)\right|}{t(1+t^2)}\,dt \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{2\times\frac{t|h|}{2}}{t(1+t^2)}\,dt = \frac{\pi|h|}{2}.\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{h\to 0} G(x+h) = G(x)$ puis G est continue en x.

On a montré que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ et donc que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. Posons $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(0,1,0)$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(0,0,1)$.

$$E = \left\{aI_3 + bU + cV,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \text{Vect}\,(I_3, U, V)\,.$$

Ceci montre que E est un espace sous-vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soient $((a,b,c),(a',b',c')) \in \left(\mathbb{C}^3\right)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}M(\lambda(a,b,c) + \mu(a',b',c')) &= M(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c') \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & 3(\lambda c + \mu c') & 3(\lambda b + \mu b') \\ \lambda b + \mu b' & \lambda a + \mu a' & 3(\lambda c + \mu c') \\ \lambda c + \mu c' & \lambda b + \mu b' & \lambda a + \mu a' \end{pmatrix} \\ &= \lambda M(a,b,c) + \mu M(a',b',c').\end{aligned}$$

Donc, M est une application linéaire de $\mathbb{C}^3$ vers E. Par définition de E, $\text{Im}(M) = E$ ou encore M est surjective.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. $(a,b,c) \in \text{Ker}(M) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3a & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix} = 0_3 \Rightarrow (a,b,c) = (0,0,0)$. Donc, $\text{Ker}(M) = \{(0,0,0)\}$ puis M est injective.

Finalement, M est un isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ sur E et en particulier, $\dim(E) = \dim\left(\mathbb{C}^3\right) = 3$. (I_3, U, V) est donc une base de E.

2. $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = V$ puis

$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$.

Mais pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^{3p} = 3^p I_3$, $U_{3p+1} = U^{3p} \times U = 3^p U$ et $U^{3p+2} = U^{3p} \times U^2 = 3^p V$.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned}
M\left(a, jb, j^2c\right) \times M\left(a, j^2b, jc\right) &= \left(aI_3 + bjU + cj^2U^2\right)\left(aI_3 + bj^2U + cjU^2\right) \\
&= a^2I_3 + ab\left(j + j^2\right)U + \left(b^2 + ac\left(j + j^2\right)\right)U^2 + bc\left(j + j^2\right)U^3 + c^2U^4 \\
&= a^2I_3 - abU + \left(b^2 - ac\right)U^2 - 3bcI_3 + 3c^2U \\
&= \left(a^2 - 3bc\right)I_3 + \left(3c^2 - ab\right)U + \left(b^2 - ac\right)U^2,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
M(a, b, c) \times M\left(a, jb, j^2c\right) \times M\left(a, j^2b, jc\right) &= \left(aI_3 + bU + cU^2\right)\left(\left(a^2 - 3bc\right)I_3 + \left(3c^2 - ab\right)U + \left(b^2 - ac\right)U^2\right) \\
&= \left(a^3 - 3abc\right)I_3 + \left(3ac^2 - a^2b + a^2b - 3b^2c\right)U \\
&+ \left(b^2a - a^2c + 3c^2b - ab^2 + a^2c - 3bc^2\right)U^2 \\
&+ \left(b^3 - abc + 3c^3 - abc\right)U^3 + \left(b^2c - ac^2\right)U^4 \\
&= \left(a^3 - 3abc\right)I_3 + \left(3ac^2 - 3b^2c\right)U \\
&+ \left(b^2a - a^2c + 3c^2b - ab^2 + a^2c - 3bc^2\right)U^2 \\
&+ 3\left(b^3 - 2abc + 3c^3\right)I_3 + 3\left(b^2c - ac^2\right)U \\
&= \left(a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc\right)I_3.
\end{aligned}$$

4. Si $a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc \neq 0$, on peut encore écrire

$$M(a, b, c) \times \frac{1}{a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc}M\left(a, jb, j^2c\right) \times M\left(a, j^2b, jc\right) = I_3.$$

Dans ce cas, $M(a, b, c) \in GL_3(\mathbb{C})$ et

$$M^{-1} = \frac{1}{a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc}\left(\left(a^2 - 3bc\right)I_3 + \left(3c^2 - ab\right)U + \left(b^2 - ac\right)U^2\right).$$

D'autre part, en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det(M(a, b, c)) = a\left(a^2 - 3bc\right) - b\left(3ac - 3b^2\right) + c\left(9c^2 - 3abc\right) = a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc.$$

Donc, $M(a, b, c) \in GL_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc \neq 0$.

5. $\chi_U = \begin{vmatrix} -X & 0 & 3 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X(-X)^2 - (-3) = -\left(X^3 - 3\right) = -\left(X - \sqrt[3]{3}\right)\left(X - j\sqrt[3]{3}\right)\left(X - j^2\sqrt[3]{3}\right)$.

Donc, $\mathrm{Sp}(U) = \left(\sqrt[3]{3}, j\sqrt[3]{3}, j^2\sqrt[3]{3}\right)$. Puisque $M(a, b, c) = aI_3 + bU + cU^2$, on sait que

$$\mathrm{Sp}(M(a, b, c)) = \left(a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2, a + bj\sqrt[3]{3} + cj^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^2, a + bj^2\sqrt[3]{3} + cj\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right).$$

Ensuite,

- $a + bj\sqrt[3]{3} + cj^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = a + bj^2\sqrt[3]{3} + cj\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \Leftrightarrow b\left(j - j^2\right)\sqrt[3]{3} + c\left(j^2 - j\right)\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow b - c\sqrt[3]{3} = 0$.
- $a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = a + bj\sqrt[3]{3} + cj^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \Leftrightarrow b(1 - j)\sqrt[3]{3} + c\left(1 - j^2\right)\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow b + c(1 + j)\sqrt[3]{3} = 0 \Leftrightarrow b - cj^2\sqrt[3]{3} = 0$.

- $a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = a + bj^2\sqrt[3]{3} + cj\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \Leftrightarrow b\left(1-j^2\right)\sqrt[3]{3} + c(1-j)\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (1+j)b + c\sqrt[3]{3} = 0 \Leftrightarrow -j^2b + c\sqrt[3]{3} = 0 \Leftrightarrow b - jc\sqrt[3]{3} = 0$.

Les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont deux à deux distinctes si et seulement si $b \notin \left\{c\sqrt[3]{3}, cj\sqrt[3]{3}, cj^2\sqrt[3]{3}\right\}$.

