ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Soit d un entier égal à 1 ou 2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_d$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ formé des fonctions continues.

Le but du problème est de chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}_2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) = f(x + z, y + z), \qquad (T)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x, y) + f(y, z) = f(x, z), \qquad (A)$$

c'est-à-dire les fonctions continues invariantes par translation diagonale et additives au sens de (A).

Partie I - Étude de l'invariance par translation

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (T), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{T}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, x) = f(y, y).$$

3. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_2$, la fonction $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} |f(x,y)| & si & x < y, \\ |f(y,x)| & si & x \geq y. \end{array} \right. \end{array}$$

est encore invariante par translation diagonale, c'est-à-dire $g \in \mathcal{T}_2$.

4. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(0, z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel.

5. Calculer le noyau $\mathcal{K}$ et l'image $\mathcal{I}$ du morphisme Φ.
6. Montrer que le morphisme Φ induit un isomorphisme linéaire du quotient $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sur $\mathcal{I}$. Calculer l'inverse Ψ de cet isomorphisme. Dans la définition de Ψ, on pourra identifier la fonction f à son représentant dans $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sans perte de généralité.
7. Soit a un nombre réel. Montrer que l'application

$$\Phi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z, a\, z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

8. Lorsque $a \neq 1$, précisez si ce morphisme est injectif ou surjectif.
9. Montrer qu'il existe un réel a^* tel que $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathrm{a}^*})$ est l'ensemble des fonctions constantes.
10. Quel est le noyau de Φ_{a^*} ?

Partie II - Étude de l'additivité.

11. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (A), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
12. Soit $f \in \mathcal{A}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,x) = 0.$$

13. On suppose que $f \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}_2$. Montrer que la suite

$$S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$

converge quand $N \to +\infty$. Calculer sa limite.

14. On suppose que f est positive, montrer que la fonction f est croissante par rapport à chacune de ces variables.

Partie III - Étude des fonctions continues vérifiant (T) et (A).

Soit $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(0,1).$$

16. Montrer pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0,x) = x f(0,1)$.
18. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y-x) f(0,1)$.
19. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$, la suite suivante est convergente
$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) f\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$

20. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$, on a $S_N(g,f) \to f(0,1) \int_0^1 g(x)dx$ quand $N \to +\infty$.
21. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ on définit la quantité suivante pour tout $x \in [0,1]$
$$D_N(g)(x) = \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N \mathbb{1}_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x).$$
Montrer que la fonction $D_N(g)$ est bornée sur $[0,1]$ uniformément par rapport à $N \in \mathbb{N}^*$.
22. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $D_N(g)(x) \to g'(x)$.
23. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$ non-nulle, calculer la limite de
$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right) f\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) / f(0,1)$$
en fonction de f et g.
24. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la quantité
$$R_N(g,f) = \int_0^1 D_N(g)(x)dx - I_N(g,f).$$
converge vers 0 quand $N \to +\infty$.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des commutateurs de deux éléments dans les espaces vectoriels. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E.

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec la notation $\circ$ pour définir la composition, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc .}$$

et on définit $[f, g]$ le commutateur de f et g par la quantité

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de E noté en ligne, on note x^T sa transposée qui forme donc un vecteur colonne. Cette notation s'applique également à tout autre élément de E apparaissant dans la suite de l'énoncé. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

1. Soit une suite de réels $a_{2k} = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k+1} = 0$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

2. Soit une suite de complexes $a_k = \dfrac{(-i)^k (k+i)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

3. Montrer que $[f, g]$ est un endomorphisme de E.

4. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série entière donnée sans coefficient nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ par
$$P_k(X) = a_k X^k.$$
Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si $[f, g] = \mathbf{0}_E$, il existe une suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
$$P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N} b_{k,N} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$$
5. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f, g] = \mathbf{0}_E$. Montrer que $b_{k,N} = 1$ pour tout k et pour tout $N \in \mathbb{N}$.
6. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f, g] \neq \mathbf{0}_E$. Montrer que $P_2(f+g) - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}[g, f]$.
7. Montrer que $F_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} P_k(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers un endomorphisme.

Partie II

8. Soit x un élément non nul de E et y un élément de E. Montrer qu'il existe au moins une matrice réelle M_0 de taille $n \times n$ tels que
$$M_0 \; x^T = y^T$$
9. Montrer que le choix de la matrice n'est pas unique si $n \geq 2$. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, et deux matrices réelles distinctes M et N de tailles $n \times n$ telles que
$$Mz^T = Nz^T.$$
10. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une matrice M de taille $n \times n$ telle que pour tout $y \in E$,
$$My^T = f(y)^T.$$
11. Montrer que la matrice construite à la question précédente est unique. Pour chaque endomorphisme f de E, on notera alors M_f la matrice associée par la construction précédente.
12. Montrer que l'application
$$\Phi : \begin{cases} (\text{Endomorphismes}(E), +, \circ) & \longrightarrow & (\text{Matrices réelles de taille } n \times n, +, \times) \\ \qquad\qquad f & \mapsto & \Phi(f) = M_f \end{cases}$$
est un morphisme d'anneau.
13. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que
$$\Phi([f, g]) := M_{[f,g]} = M_f \times M_g - M_g \times M_f.$$

Partie III

Pour f un endomorphisme de E, on note C_f l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $M_{[f,g]}$ est la matrice identiquement nulle, c'est-à-dire

$$C_f := \{g : E \to E \text{ endomorphisme } : M_f \times M_g = M_g \times M_f\}.$$

14. Pour $f = \mathbf{id}_E$, montrer que $C_{\mathbf{id}_E}$ est constitué de l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$.
15. Montrer que C_f est un sous-groupe additif des matrices réelles de taille $n \times n$.
16. Montrer que C_f est un sous-anneau des matrices réelles de taille $n \times n$.
17. Montrer que C_f est un sous-espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$.
18. Soit D une matrice diagonale de taille 2×2 et d l'endomorphisme associé par la base canonique. Montrer que
$$d \in \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \mathcal{M}_{2,2},$$
et
$$d \notin \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}, b = c = 0 \right\}.$$
19. Soit f un endomorphisme dont la matrice M_f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage R et une matrice diagonale D telles que
$$M_f = R^{-1} D R$$
Montrer que si $g \in C_f$ et M_g est diagonalisable, alors il existe une matrice de passage Q, une matrice diagonale Δ et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ telle que
$$M_g = Q^{-1} \Delta Q \quad \text{et} \quad M_f = Q^{-1} \widetilde{D} Q.$$
20. Montrer qu'il existe une matrice S telle que $\widetilde{D} = S^{-1} D S$.