SESSION 2019

CAPESA
ISE Option mathématiques

PREMIERE COMPOSITION

I - Problème d'analyse

Partie I - Etude de l'invariance par translation

1. La fonction nulle vérifie (T). Soient $(f,g) \in \mathcal{T}_2^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour $((x,y),z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + \mu g)(x,y) = \lambda f(x,y) + \mu g(x,y) = \lambda f(x+z,y+z) + \mu g(x+z,y+z) = (\lambda f + \mu g)(x+z,y+z).$$

Donc, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{T}_2$. On en déduit que $\mathcal{T}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.

2. Soit $f \in \mathcal{T}_2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,x) = f(x+(y-x),x+(y-x)) = f(y,y)$.

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $z \in \mathbb{R}$

Si $x < y$, alors $x+z < y+z$ puis $g(x,y) = |f(x,y)| = |f(x+z,y+z)| = g(x+z,y+z)$.
Si $x \geqslant y$, alors $x+z \geqslant y+z$ puis $g(x,y) = |f(y,x)| = |f(y+z,x+z)| = g(x+z,y+z)$.

On a montré que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $g(x,y) = g(x+z,y+z)$ et donc $g \in \mathcal{T}_2$.

4. D'après 1), $\mathcal{T}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$. Soient $(f,g) \in \mathcal{T}_2^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\Phi\left(\lambda f + \mu g\right)(z) = (\lambda f + \mu g)\left(0,z\right) = \lambda f(0,z) + \mu g(0,z) = (\lambda \Phi(f) + \mu \phi(g))(z)$$

et donc $\Phi\left(\lambda f + \mu g\right) = \lambda \Phi(f) + \mu \phi(g)$. On a montré que $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)$.

5. Soit $f \in \mathcal{K}$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $f(0,z) = 0$. Mais alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = f(x+(-x),y+(-x)) = f(0,y-x) = 0.$$

Donc, $\mathcal{K} = \{0\}$. Montrons maintenant que $\mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = g(y-x)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$f(x+z,y+z) = g((y+z)-(x+z)) = g(y-x) = f(x,y).$$

Donc, $f \in \mathcal{T}_2$. Ensuite, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(f)(z) = f(0,z) = g(z-0) = g(z)$$

et donc $\Phi(f) = g$. Par suite, tout élément g de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{I}$ et donc $\mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

6. Puisque $\mathcal{K} = \{0\}$, $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ s'identifie à $\mathcal{T}_2$ et d'après ce qui précède, Φ est un isomorphisme de $\mathcal{T}_2$ sur $\mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Toujours d'après la question précédente, pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\Phi^{-1}(g) = f$ où, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(y-x)$.

7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $(f,g) \in \mathcal{T}_2^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_a(\lambda f + \mu g)(z) = (\lambda f + \mu g)(z,az) = \lambda f(z,az) + \mu g(z,az) = (\lambda \Phi_a(f) + \mu \phi_a(g))(z)$$

et donc $\Phi_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi_a(f) + \mu \Phi_a(g)$. Ainsi, $\Phi_a \in \mathscr{L}\left(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)$.

8. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $f \in \mathrm{Ker}\left(\Phi_a\right)$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$f(0,(a-1)z) = f(z,(a-1)z+z) = f(z,az) = 0.$$

Puisque $a \neq 1$, $(a-1)z$ décrit $\mathbb{R}$ quand z décrit $\mathbb{R}$. Mais alors, pour tout $z' \in \mathbb{R}$, $f(0,z') = 0$ puis $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ puis $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\left(\Phi_a\right) = \{0\}$ et donc l'application linéaire Φ_a est injective.

Montrons maintenant que $\mathrm{Im}\left(\Phi_a\right) = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = g\left(\dfrac{y-x}{a-1}\right)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $z \in \mathbb{R}$,

$$f(x+z,y+z)=g\left(\frac{(y+z)-(x+z)}{a-1}\right)=g\left(\frac{y-x}{a-1}\right)=f(x,y)$$

et donc $f\in\mathcal{T}_2$. Ensuite, pour tout $z\in\mathbb{R}$,

$$\Phi_a(f)(z)=f(z,az)=g\left(\frac{az-z}{a-1}\right)=g(z)$$

et donc $\Phi_a(f)=g$ puis $g\in\operatorname{Im}(\Phi_a)$. Ainsi, $\operatorname{Im}(\Phi_a)=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puis Φ_a est une application linéaire surjective.

Finalement, Φ_a est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

9. Quand $a\neq 1$, $\operatorname{Im}(\Phi_a)=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc nécessairement $a^\star=1$.

Réciproquement, soit $a^\star=1$. Donc, pour tout $f\in\mathcal{T}_2$, $\Phi_{a^\star}(f)(z)=f(z,z)$. Mais alors, d'après la question 2), pour tout $z\in\mathbb{R}$, $\Phi_{a^\star}(f)(z)=f(0,0)$ puis l'application $\Phi_{a^\star}(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$. Inversement, soit g une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y)=g(0)$. Puisque f est constante sur $\mathbb{R}^2$, f vérifie (T) ou encore $f\in\mathcal{T}_2$. Ensuite, pour tout $z\in\mathbb{R}$,

$$\Phi_{a^\star}(f)(z)=g(0)=g(z)$$

et donc $\Phi_{a^\star}(f)=g$ puis $g\in\operatorname{Im}(\Phi_{a^\star})$. Finalement, $\operatorname{Im}(\Phi_{a^\star})$ est l'espace des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

10. Soit $f\in\operatorname{Ker}(\Phi_{a^\star})$. Ceci équivaut au fait que pour tout $z\in\mathbb{R}$, $f(z,z)=0$. Cette dernière condition équivaut à $f(0,0)=0$ car alors, pour tout $z\in\mathbb{R}$, $f(z,z)=f(0+z,0+z)=f(0,0)=0$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(\Phi_{a^\star})$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}_2$ qui s'annule en $(0,0)$.

Partie II - Etude de l'additivité

11. La fonction nulle vérifie (A) (car $0+0=0$). Soient $(f,g)\in\mathcal{A}_2^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$(\lambda f+\mu g)(x,y)+(\lambda f+\mu g)(y,z)=\lambda(f(x,y)+f(y,z))+\mu(g(x,y)+g(y,z))=\lambda f(x,z)+\mu g(x,z)=(\lambda f+\mu g)(x,z).$$

Donc, $\lambda f+\mu g\in\mathcal{A}_2$. On en déduit que $\mathcal{A}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.

12. Soit $f\in\mathbb{A}_2$. Pour tout réel x, $2f(x,x)=f(x,x)+f(x,x)=f(x,x)$ puis $f(x,x)=0$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x,x)=0$.

13. Soit $f\in\mathbb{A}_2\cap\mathcal{C}_2$. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in[\![1,N]\!]$,

$$f\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n},1\right)=f\left(\frac{1}{n+1},1\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}f\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)&=\sum_{n=1}^{N}\left(f\left(\frac{1}{n+1},1\right)-f\left(\frac{1}{n},1\right)\right)\\&=f\left(\frac{1}{N+1},1\right)-f(1,1)\ \text{(somme télescopique)}\\&=f\left(\frac{1}{N+1},1\right)\ \text{(d'après la question précédente)}.\end{aligned}$$

Ensuite, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier, la fonction f est continue en $(0,1)$. On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to+\infty}f\left(\frac{1}{N+1},1\right)=f\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N+1},1\right)=f(0,1).$$

14. Soit $f\in\mathcal{A}_2$. Soit $(x_1,x_2,y)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x_1\leqslant x_2$.

$$f(x_2,y)=f(x_2,x_1)+f(x_1,y)\geqslant f(x_1,y).$$

Ainsi, pour tout réel y, la fonction $x\mapsto f(x,y)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y_1 \leqslant y_2$.

$$f(x, y_2) = f(x, y_1) + f(y_1, y_2) \geqslant f(x, y_1).$$

Ainsi, pour tout réel x, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Etude des fonctions continues vérifiant (T) et (A)

15. Soit $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} nf\left(0, \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0, \frac{1}{n}\right) \\ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + \frac{k}{n}, \frac{1}{n} + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \text{ (car } f \in \mathcal{T}_2) \\ &= f(0, 1) \text{ (par additivité car } f \in \mathcal{A}_2). \end{aligned}$$

16. L'égalité proposée est vraie quand $m = 0$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$) d'après la question 12). Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned} f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) &= f\left(0, \frac{m}{n}\right) \text{ (car } f \in \mathcal{T}_2) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \text{ (car } f \in \mathcal{A}_2) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} f\left(0, \frac{1}{n}\right) \text{ (car } f \in \mathcal{T}_2) \\ &= mf\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0, 1) \text{ (d'après la question précédente).} \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $f\left(x, x + \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0, 1)$ ou encore

$$\forall (x, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^+,\ f(x, x + r) = rf(0, 1).$$

17. En particulier, pour tout $r \in \mathbb{Q}^+$, $f(0, r) = rf(0, 1)$. Soit $r \in \mathbb{Q}^-$. Donc, $-r \in \mathbb{Q}^+$ puis pour tout réel x, $f(x, x - r) = -rf(0, 1)$. Pour $x = r$, on a en particulier $f(r, 0) = -rf(0, 1)$. De plus, $f(0, r) + f(r, 0) = f(0, 0) = 0$ et donc $f(0, r) = -f(r, 0) = rf(0, 1)$. Ainsi,

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(0, r) = ff(0, 1).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels, convergente de limite x. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier en $(0, x)$,

$$f(0, x) = f\left(0, \lim_{n \to +\infty} r_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(0, r_n) = \lim_{n \to +\infty} r_n f(0, 1) = xf(0, 1).$$

On a montré que pour tout réel x, $f(0, x) = xf(0, 1)$.

18. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $f(x, y) = f(x + (-x), y + (-x)) = f(0, y - x) = (y - x)f(0, 1)$.

19. et 20. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$S_N(g, f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{N} - \frac{k}{n}\right) f(0, 1) = \frac{f(0, 1)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right).$$

Puisque g est dans $\mathcal{C}_1$, la fonction g est en particulier continue sur le segment $[0, 1]$. On sait que la somme de Riemann à pas constant $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right)$ tend vers $\int_0^1 g(x)\ dx$ quand N tend vers $+\infty$. Mais alors,

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(g, f) = f(0, 1) \int_0^1 g(x)\ dx.$$

21. La fonction g' est continue sur le segment $[0,1]$ et en particulier est bornée sur ce segment. Soient $N \in \mathbb{N}$ puis $k \in [\![0, 2^N - 1]\!]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $k \in [\![0, 2^N - 1]\!]$,

$$2^N \left|g\left((k+1)2^{-N}\right) - g\left(k2^{-N}\right)\right| \leqslant 2^N \times \left(\frac{k+1}{2^N} - \frac{k}{2^N}\right) \|g'\|_\infty = \|g'\|_\infty.$$

On en déduit que pour $x \in [0,1]$,

$$|D_N(g)(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{2^N-1} 2^N \left|g\left((k+1)2^{-N}\right) - g\left(k2^{-N}\right)\right| 1_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x) \leqslant \|g'\|_\infty \sum_{k=0}^{2^N-1} 1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-N}[}(x).$$

Maintenant, $1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-N}[}(x) = 1 \Leftrightarrow k2^{-N} \leqslant x < (k+1)2^{-N} \Leftrightarrow k \leqslant 2^N x < k+1 \Leftrightarrow k = \lfloor 2^N x \rfloor$ (où $\lfloor 2^N x \rfloor$ désigne la partie entière du réel $2^N x$). On pose $k_x = \lfloor 2^N x \rfloor$. Si $x = 1$, $k_x = 2^N$ et si $x \in [0,1[$,

$$0 \leqslant k_x \leqslant 2^N x < 2^N$$

et donc $k_x \in [\![0, 2^N - 1]\!]$.

Donc, $1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-N}[}(x)$ prend la valeur 1 pour au plus un terme de la somme (et exactement une fois si $x \in [0,1[$) puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^N-1} 1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-N}[}(x) \leqslant 1$. Finalement,

$$\forall x \in [0,1],\ \forall N \in \mathbb{N},\ |D_N(g)(x)| \leqslant \|g'\|_\infty.$$

22. Soient $x \in [0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $D_N(g)(x) = 2^N \left(g\left(\dfrac{k_x+1}{2^N}\right) - g\left(\dfrac{k_x}{2^N}\right)\right)$ où $k_x = \lfloor 2^N x \rfloor$.
La fonction g est continue sur $\left[\dfrac{k_x}{2^N}, \dfrac{k_x+1}{2^N}\right]$, dérivable sur $\left]\dfrac{k_x}{2^N}, \dfrac{k_x+1}{2^N}\right[$ et donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,N} \in \left]\dfrac{k_x}{2^N}, \dfrac{k_x+1}{2^N}\right[$ tel que

$$D_N(g)(x) = 2^N \times \left(\frac{k_x+1}{2^N} - \frac{k_x}{2^N}\right) g'\left(c_{x,N}\right) = g'\left(c_{x,N}\right).$$

Ensuite, $\dfrac{k_x}{2^N} = \dfrac{1}{2^N} \lfloor 2^N x \rfloor \geqslant \dfrac{2^N x - 1}{2^N} = x - \dfrac{1}{2^N}$ et $\dfrac{k_x+1}{2^N} \leqslant \dfrac{2^N x + 1}{2^N} = x + \dfrac{1}{2^N}$. Mais alors

$$x - \frac{1}{2^N} \leqslant \frac{k_x}{2^N} \leqslant c_{x,N} \leqslant \frac{k_x+1}{2^N} \leqslant x + \frac{1}{2^N}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} x - \frac{1}{2^N} = \lim_{N\to+\infty} x + \frac{1}{2^N} = x$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} c_{x,N} = x$. Puisque la fonction g' est continue sur $[0,1]$ et en particulier en x, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} D_N(g)(x) = \lim_{N\to+\infty} g'\left(c_{x,N}\right) = g'(x).$$

23. On suppose que $f(0,1) \neq 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$I_n(g,f) = \frac{1}{f(0,1)} S_{2^N}(g', f).$$

Puisque la fonction g' est continue sur $[0,1]$, la suite $\left(S_N(g',f)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(0,1)\displaystyle\int_0^1 g'(x)\, dx$. Il en est de même de la suite extraite $\left(S_{2^N}(g',f)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(g,f) = \int_0^1 g'(x)\, dx = g(1) - g(0).$$

24. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 D_N(g)(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{2^N-1} 2^N\left(g\left(\frac{k+1}{2^N}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\int_0^1 1_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x)\,dx\\ &= \sum_{k=0}^{2^N-1} 2^N\left(g\left(\frac{k+1}{2^N}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\int_{\frac{k}{2^N}}^{\frac{k+1}{2^N}} 1\,dx\\ &= \sum_{k=0}^{2^N-1}\left(g\left(\frac{k+1}{2^N}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\ &= g(1)-g(0) \text{ (somme télescopique).}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(g,f) = (g(1)-g(0)) - I_N(g,f)$. D'après la question 23), $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(g,f) = 0$.

II - Problème d'algèbre

Partie I

1. On note R_a le rayon de convergence à déterminer. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, $a_n = 2^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^n$ et si n est impair, $a_n = 0 \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^n$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$ où $b_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$. On en déduit que $R_a \geqslant R_b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D'autre part, si $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}z^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \times \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty$ et donc $R_a \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a montré que

$$R_a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!}\frac{|k+1+i|}{|k+i|} = \frac{1}{k+1}\times\frac{\sqrt{(k+1)^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, $R_a = +\infty$.

3. On sait que $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. Donc, pour tout $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $[f,g] = f\circ g - g\circ f \in \mathscr{L}(E)$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $[f,g] = 0_E$, alors $f\circ g = g\circ f$. Puisque f et g commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned}P_N(f+g) = a_N(f+g)^N = a_N\sum_{k=0}^{N} C_N^k f^k\circ g^{N-k} &= \sum_{k=0}^{N}\frac{a_N C_N^k}{a_k a_{N-k}}\left(a_k f^k\right)\circ\left(a_{N-k}g^{N-k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{a_N C_N^k}{a_k a_{N-k}} P_k(f)\circ P_{N-k}(g).\end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $b_{k,N} = \dfrac{a_N C_N^k}{a_k a_{N-k}}$ si $k \in [\![0,N]\!]$ et $b_{k,N} = 0$ si $k > N$. La suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ convient.

5. (Il n'y a aucune raison que la suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ soit uniquement définie. Par exemple, on pouvait aussi prendre $b_{k,N} = 1$ si $k > N$). Soit $N \in \mathbb{N}$. Le calcul précédent mené dans le cas particulier $a_k = \dfrac{1}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$ fournit

$$P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N}\frac{k!(N-k)!N!}{N!k!(N-k)!}P_k(f)\circ P_{N-k}(g) = \sum_{k=0}^{N} P_k(f)\circ P_{N-k}(g).$$

Donc, la suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $b_{k,N} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, convient.

6. $P_2(f+g) = \dfrac{1}{2!}(f+g)^2 = \dfrac{1}{2}\left(f^2 + f\circ g + g\circ f + g^2\right)$ et

$$\sum_{k=0}^{2} P_k(f)\circ P_{2-k}(g) = a_0a_2f^0\circ g^2 + a_1^2f^1\circ g^1 + a_0a_2f^2\circ g^0 = \frac{1}{2}\left(f^2 + 2f\circ g + g^2\right).$$

Par suite,

$$P_2(f+g) - \sum_{k=0}^{2} P_k(f)\circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}\left(f^2 + f\circ g + g\circ f + g^2\right) - \frac{1}{2}\left(f^2 + 2f\circ g + g^2\right) = \frac{1}{2}\left(f\circ g - g\circ f\right) = \frac{1}{2}[f,g].$$

7. (On suppose toujours que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{1}{k!}$ de sorte que $R_a = +\infty$). On munit $\mathscr{L}(E)$ d'une norme sous-multiplicative (puisque $\dim(E) < +\infty$, il en existe au moins une). Pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\|P_k(f)\| = \frac{\left\|f^k\right\|}{k!} \leqslant \frac{\|f\|^k}{k!}.$$

La série numérique de terme général $\dfrac{\|f\|^k}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$, converge et donc la série numérique de terme général $\|P_k(f)\|$, $k\in\mathbb{N}$, converge ou encore la série d'endomorphisme de terme général $P_k(f)$, $k\in\mathbb{N}$, converge absolument. Puisque $\dim(\mathscr{L}(E)) < +\infty$, on en déduit que la série d'endomorphismes de terme général $P_k(f)$, $k\in\mathbb{N}$, converge ou encore la suite d'endomorphismes $(P_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{L}(E)$.

Partie II

8. On pose $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$. x n'est pas nul. Soit $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0}\neq 0$.

Soit M_0 la matrice dont toutes les colonnes de numéro différent de i_0 sont nulles et dont la i_0-ème colonne est $\left(\dfrac{y_1}{x_{i_0}},\ldots,\dfrac{y_n}{x_{i_0}}\right)^T$.
Avec ce choix, on a $M_0x^T = y^T$.

Q9. On suppose $n\geqslant 2$. Soient M et N deux matrices dont les colonnes numéros $1,\ldots,n-1$, (avec $n-1\geqslant 1$) sont égales et les n-èmes colonnes sont distinctes. Les matrices M et N sont donc distinctes. Les colonnes numéros $1,\ldots,n-1$, sont nulles et donc la matrice $M-N$ n'est pas inversible puis $\mathrm{Ker}(M-N)\neq\{0\}$. Par suite, il existe $z\in E\setminus\{0\}$ tel que $(M-N)z^T = 0$ ou encore $Mz^T = Nz^T$.

10. Soient $\mathscr{B}$ la base canonique de E puis $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, pour tout $y\in E$, $f(y)^T = My^T$.

11. Soient M et N deux matrices telles que pour tout $y\in E$, $M^Ty = f(y)^T = Ny^T$. Alors, pour tout $y\in E$, $(M-N)y^T = 0$ puis $\mathrm{Ker}\,(M-N) = E$ puis $M-N = 0$ et donc $M = N$. La matrice M de la question précédente est donc uniquement définie.

12. Soit $(f,g)\in(\mathscr{L}(E))^2$. Avec les notations de la question 10),

$$\Phi(f+g) = M_{f+g} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = M_f + M_g = \Phi(f) + \Phi(g)$$

et

$$\Phi(f\circ g) = M_{f\circ g} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f\circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = M_f\times M_g = \Phi(f)\times\Phi(g).$$

Enfin,

$$\Phi\left(\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right) = I_n.$$

Donc, Φ est un morphisme de l'anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ vers l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),+,\times)$.

13. Soit $(f,g)\in(\mathscr{L}(E))^2$. Puisque ϕ est un morphisme d'anneaux,

$$\Phi([f,g]) = \Phi(f\circ g - g\circ f) = \Phi(f)\times\Phi(g) - \Phi(g)\times\Phi(f) = M_f\times M_g - M_g\times M_f.$$

Partie III

14. Si $f = \mathrm{Id}_E$, alors $M_f = I_n$. Toute matrice carrée commute avec I_n et donc tout endomorphisme de E est dans C_{Id_E}. Ainsi, $C_{\mathrm{Id}_E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

15. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $0_E \in C_f$ car $M_{0_E} = 0_n$ commute avec toute matrice. Soit alors $(g_1, g_2) \in (C_f)^2$.

$$\begin{aligned} M_f \times M_{g_1 - g_2} &= M_f\left(M_{g_1} - M_{g_2}\right) = M_f \times M_{g_1} - M_f \times M_{g_2} = M_{g_1} \times M_f - M_{g_2} \times M_f \\ &= \left(M_{g_1} - M_{g_2}\right) M_f = M_{g_1 - g_2} \times M_f \end{aligned}$$

et donc $g_1 - g_2 \in C_f$. Ceci montre que C_f est un sous-groupe du groupe $(\mathscr{L}(E), +)$.

16. On sait déjà que C_f est un sous-groupe du groupe $(\mathscr{L}(E), +)$. Soit $(g_1, g_2) \in (C_f)^2$.

$$M_f \times M_{g_1 \circ g_2} = M_f \times M_{g_1} \times M_{g_2} = M_{g_1} \times M_f \times M_{g_2} = M_{g_1} \times M_{g_2} \times M_f = M_{g_1 \circ g_2} \times M_f$$

et donc $g_1 \circ g_2 \in C_f$. Enfin, $I_n = M_{Id_E}$ commute avec toute matrice et donc $I_n \in C_f$.

On a montré que C_f est un sous-anneau de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

17. On sait déjà que C_f est un sous-groupe du groupe $(\mathscr{L}(E), +)$. Il reste à vérifier la stabilité pour la loi externe. Soient $g \in C_f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$M_f \times M_{\lambda g} = M_f \times \lambda M_g = \lambda M_f \times M_g = \lambda M_g \times M_f = M_{\lambda g} \times M_f,$$

et donc $\lambda g \in C_f$. Ceci montre que C_f est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E), +, .)$.

18. Dans cette question, l'énoncé identifie un endomorphisme et sa matrice dans la base canonique.

Si $d \in \mathbb{R}.Id_E$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $D = \lambda I_2$. Une matrice scalaire commute avec toute matrice et donc $C_d = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $d \notin \mathbb{R}.Id_E$, il existe deux réels distincts λ et μ tels que $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \mu c & \mu d \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in C_d \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a = \lambda a \\ \mu b = \lambda b \\ \lambda c = \mu c \\ \mu d = \mu d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mu - \lambda) b = 0 \\ (\mu - \lambda) c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0 \text{ (car } \lambda - \mu \neq 0\text{)}.$$

Ainsi, $C_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{R},\ b = c = 0 \right\}$ ou encore C_d est $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales.

19. Il s'agit de démontrer que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables ou encore il s'agit de trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f et de g.

Puisque f est diagonalisable, χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Puisque g commute avec f, g laisse stable $E_\lambda(f)$ et induit donc un endomorphisme g_λ de $E_\lambda(f)$. Puisque g est diagonalisable, il existe un polynôme P, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, tel que $P(g) = 0$. Mais alors $P\left(g_\lambda\right) = 0$ et donc g_λ est diagonalisable. On note $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(f)$ constituée de vecteurs propres de g.

Soit $\mathscr{B}_0 = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \mathscr{B}_\lambda$. Puisque $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$, $\mathscr{B}_0$ est une base de E. De plus, par construction, $\mathscr{B}_0$ est constituée de vecteurs propres de f et de g.

En passant aux matrices, les formules de changement de base fournissent une matrice inversible Q (la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base canonique $\mathscr{B}$) et deux matrices diagonales Δ et $\widetilde{D}$ telles que $M_f = Q^{-1}\widetilde{D}Q$ et $M_g = Q^{-1}\Delta Q$.

20. La matrice M_f est semblable aux matrices D et $\widetilde{D}$. Par transitivité, les matrices D et $\widetilde{D}$ sont semblables et donc il existe une matrice inversible S telle que $\widetilde{D} = S^{-1}DS$.

