INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, Ln désigne le logarithme népérien, e le nombre de Néper et R l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f\ (x) = x\, Ln\, x - 2x + e$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante, où $a \in R$, non nul :

$$x\, Ln\, x - (2 + a)\, x = 0$$

3. Pour $\alpha > 0$, calculer $\underset{\alpha \to 0}{Lim} \int_{\alpha}^{e} f\ (x)\, dx$

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur R par : $f\ (x) = x - \sqrt{1 + x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de f.

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 \in R$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f\ (u_n)\,.$$

Exercice n° 3

Pour $x \in R$, on rappelle que la partie entière de x, notée $E(x)$, correspond au plus grand entier inférieur ou égal à x. Pour x non nul, on pose $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Calculer $I = \int_{1/2}^{2} f(x)\,dx$

2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} f(x)\,dx$

3. Expliciter f (sans l'expression de la partie entière) et étudier sa continuité sur R

Exercice n° 4

1. Résoudre dans C (ensemble des nombres complexes), l'équation : $\frac{z-2}{z-1} = i$

2. Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 1 et 2. On suppose que M est distinct de A et B.

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z-2}{z-1}$;
- Retrouver géométriquement la solution de la première question.

3. Résoudre dans C, l'équation : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$

Exercice n° 5

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions f_n sur R par : $f_n(x) = x^n e^{x^2}$

1. Etudier les variations de f_1 et tracer son graphe.

2. Comparer les graphes de f_{2n} et f_{2n+1}.

3. Pour p entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 > 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_p(u_n)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{0}^{1} f_n(x)\,dx$

Exercice n° 6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (a+2)(u_n + 1)$, où a est un paramètre réel.

1. Déterminer a pour que cette suite soit constante.

2. Déterminer a pour que cette suite soit une suite arithmétique (on en précisera la raison).

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) pour $a > 0$.

Exercice n° 7

On dispose de 3 dés (chaque dé a 6 faces) : les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6, le deuxième dé possède trois faces numérotées 1 et 3 faces numérotées 2, enfin le troisième dé a de deux faces avec 1, deux faces avec 2 et deux faces avec 3.
On jette les trois dés ensemble et on suppose que chaque dé tombe sur une face.

1. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points des 3 dés. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance de X. Ce résultat était-il prévisible ?

3. Un joueur mise une unité monétaire sur X.
Si X=3 ou 11, il reçoit 3 unités ;
Si X=4 ou 10, il reçoit 1,5 unités ;
Si X=5 ou 9, il reçoit 1/2 unité ; sinon il ne reçoit rien.
Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu est-il réaliste ?