SESSION 2019

CAPESA
Analystes statisticiens

DEUXIEME COMPOSITION

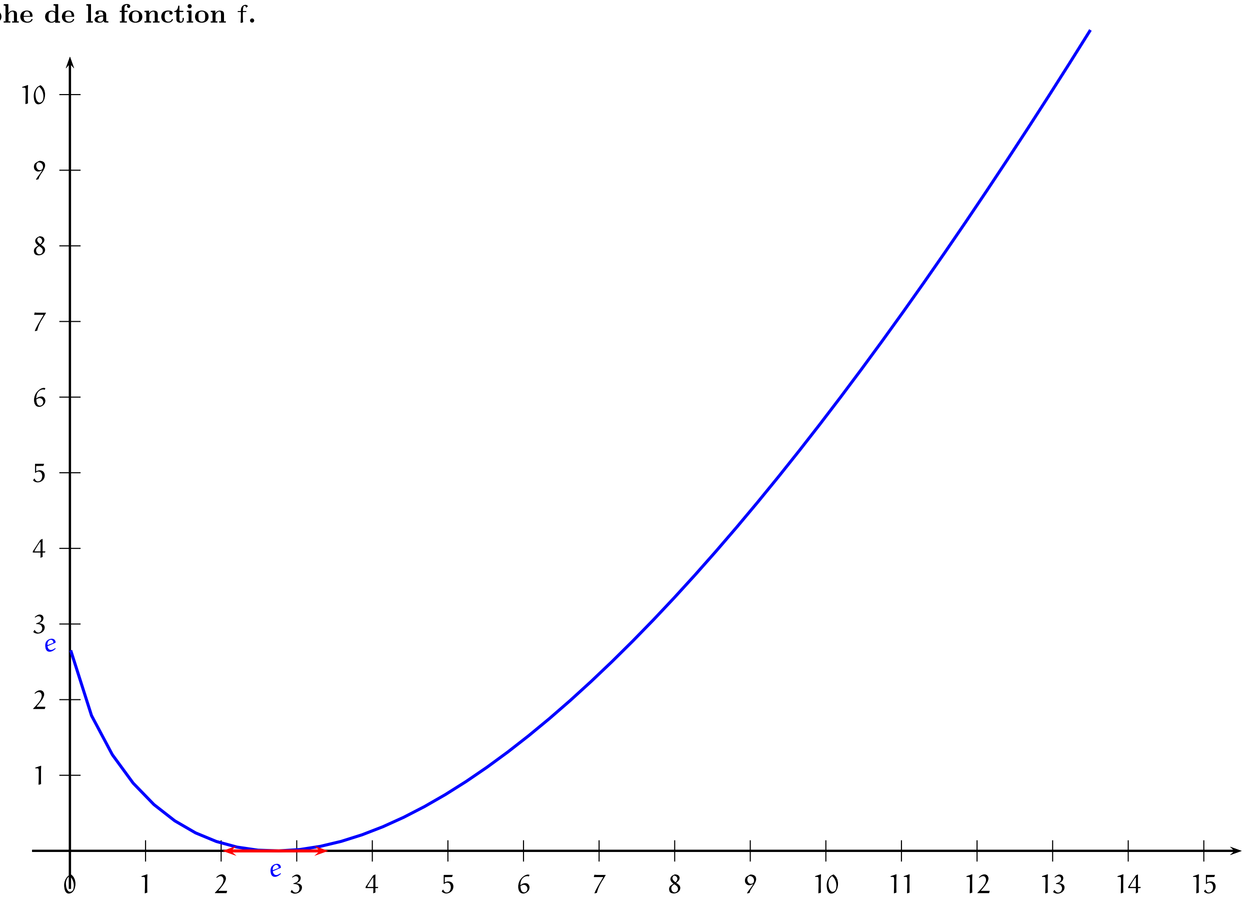
Exercice 1

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2 = \ln(x) - 1.$$

Ensuite, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0, +\infty[$, pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$ et de même, $\ln(x) - 1 \Leftrightarrow x = e$. Ainsi, la fonction f' est strictement négative sur $]0, e[$ et strictement positive sur $]e, +\infty[$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0, e]$ et strictement croissante sur $[e, +\infty[$. Enfin, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e$, $f(e) = e\ln(e) - 2e + e = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Graphe de la fonction f.

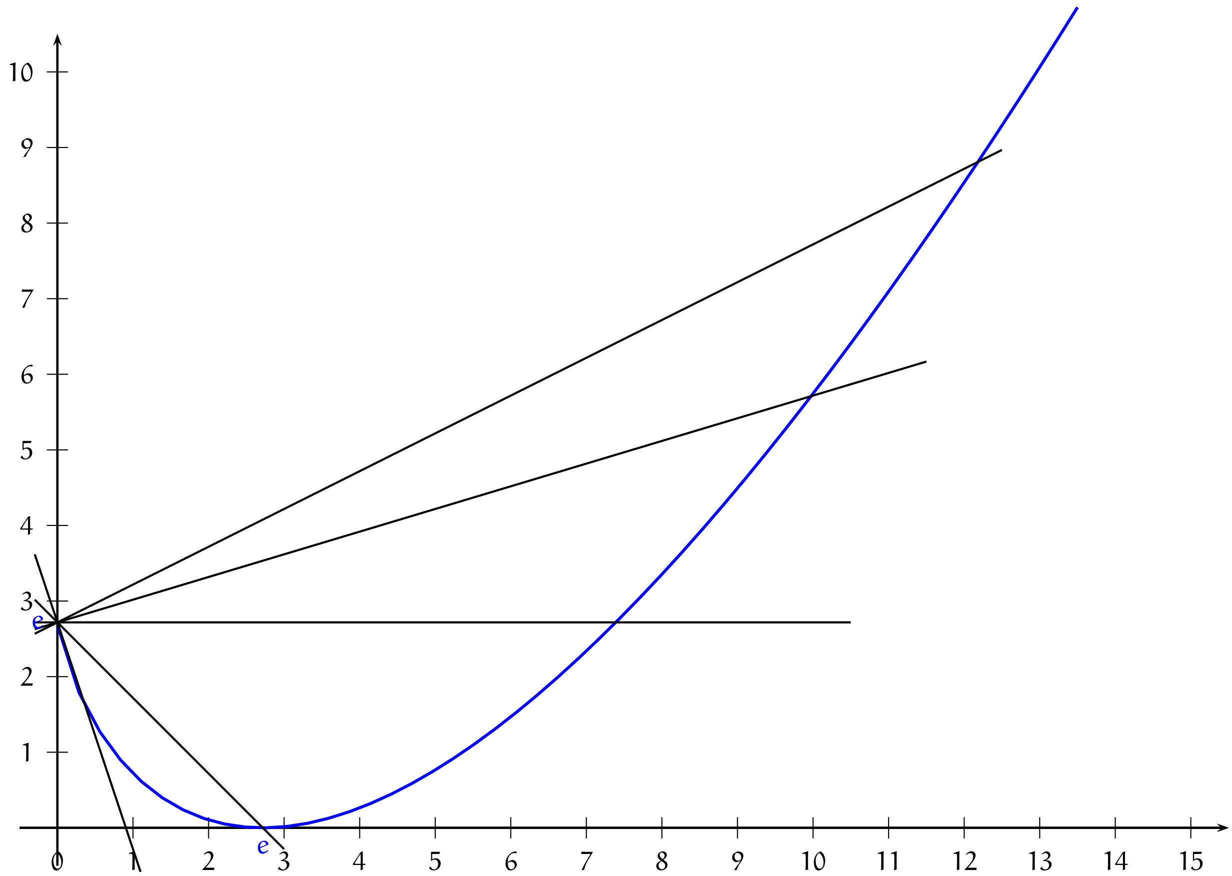


2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $x > 0$.

$$x\ln(x) - (2 + a)x = 0 \Leftrightarrow x(\ln(x) - (2 + a)) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 + a \Leftrightarrow x = e^{2+a}.$$

L'équation proposée a donc une solution et une seule, pour tout choix du réel a.

Remarque. On peut trouver un lien avec la question précédente. L'équation s'écrit successivement $x\ln(x) - 2x + e - ax - e = 0$ puis $f(x) = ax + e$. On étudie donc l'intersection de la courbe représentative de f avec les droites D_a d'équations $y = ax + e$. On retrouve le résultat précédent graphiquement :



3. Soit $\alpha > 0$. Une intégration par parties fournit

$$\int_{\alpha}^{e} x\ln(x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{\alpha}^{e} - \int_{\alpha}^{e}\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{e} x\ dx$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) - \frac{1}{4}\left(e^2-\alpha^2\right) = \frac{e^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) + \frac{\alpha^2}{4}.$$

D'autre part, $\displaystyle\int_{\alpha}^{e}(-2x+e) = -2\left(\frac{e^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\right) + e(e-\alpha) = \alpha^2 - e\alpha$. Finalement,

$$\int_{\alpha}^{e} f(x)\ dx = \frac{e^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) + \frac{5\alpha^2}{4} - e\alpha.$$

Maintenant, $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\alpha^2\ln(\alpha) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{e} f(x)\ dx = \frac{e^2}{4}$.

Exercice 2

1. Pour tout réel x, $x^2+1>0$. La fonction est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout réel x,

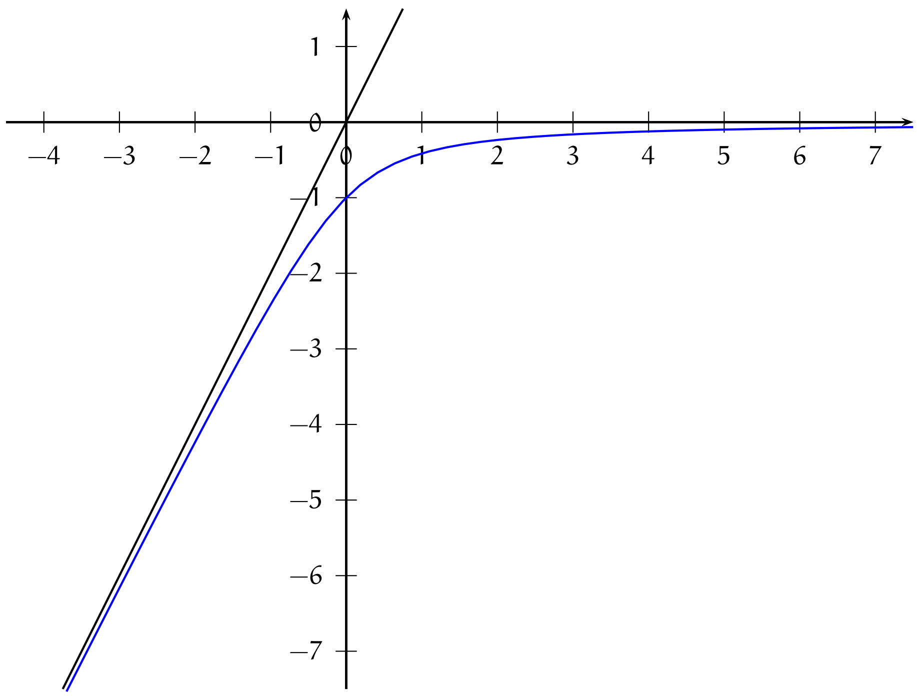
$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ensuite, pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$ et donc $\sqrt{x^2+1}-x > 0$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ puis que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Etude en $+\infty$. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Etude en $-\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2+1} = -\infty$. En additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Ensuite, pour tout réel x, $f(x)-2x = -x-\sqrt{x^2+1} = f(-x)$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x) = \lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Graphe de la fonction f.



2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 - x \times \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x \times \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

La fonction f est donc strictement concave sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x, $f(x) = x - \sqrt{x^2+1} < x$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et donc, ou bien convergente, ou bien divergente de limite $-\infty$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ, par continuité de f sur $\mathbb{R}$ et en particulier en ℓ, on a $f(\ell) = \ell$ (en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$). Mais pour tout réel x, $f(x) - x = -\sqrt{x^2+1} < 0$ et en particulier, pour tout réel x, $f(x) \neq x$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Exercice 3

1. Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Si $x = \frac{1}{2}$, alors $E\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ puis $f(x) = 1$. Si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $1 \leqslant \frac{1}{x} < 2$ puis $E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ puis $f(x) = x$. Si $x \in]1, 2]$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ puis $f(x) = 0$. Par suite,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}\left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{8}.$$

(Sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, les deux fonctions f et $g : x \mapsto x$ ne diffèrent qu'en un point à savoir en $\frac{1}{2}$. Ces deux fonctions ont donc la même intégrale sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.)

2. Soit $t > 1$. Pour tout réel x de $]1, t]$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ puis $f(x) = 0$. On en déduit que $\int_{1}^{t} f(x)\,dx = 0$. Ainsi, pour tout réel $t > 1$, $\int_{1}^{t} f(x)\,dx = 0$ puis $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{1}^{t} f(x)\,dx = 0$.

3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

• Pour tout réel x de $]1,+\infty[$, $0 < \dfrac{1}{x} < 1$ et donc $f(x) = 0$. La fonction f est continue sur $]1,+\infty[$.

• Pour tout réel x de $]-\infty,-1]$, $-1 \leqslant \dfrac{1}{x} < 0$ puis $E\left(\dfrac{1}{x}\right) = -1$ et donc $f(x) = -x$. La fonction f est continue sur $]-\infty,-1]$ (et en particulier en -1 à gauche).

• Ensuite, pour tout réel x de $]0,1]$, il existe un entier naturel non nul k et un seul tel que $x \in \left]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right]$. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $\left]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right]$, $k \leqslant \dfrac{1}{x} < k+1$ puis $f(x) = kx$. La fonction f est en continue sur $\left]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right]$ et en particulier continue à gauche en $\dfrac{1}{k}$ avec $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = 1$.

• $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$. Donc, f n'est pas continue à droite en 1.

• Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour $x \in \left]\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k-1}\right]$, on a $\dfrac{1}{x} \in [k-1,k[$ puis $f(x) = (k-1)x$. Mais alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\to \frac{1}{k}\\ x>\frac{1}{k}}} f(x) = 1-\dfrac{1}{k} \neq 1 = f\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

f n'est donc pas continue en $\dfrac{1}{k}$.

• Ensuite, pour tout réel x de $]-1,0[$, il existe un entier relatif $k \leqslant -2$ et un seul tel que $x \in \left]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right]$. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $\left]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right]$, $k \leqslant \dfrac{1}{x} < k+1$ (par stricte décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]-\infty,0[$) puis $f(x) = kx$. La fonction f est en continue sur $\left]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right]$ et en particulier continue à gauche en $\dfrac{1}{k}$ avec $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = 1$.

• Pour $x \in \left]-1,-\dfrac{1}{2}\right[$, $-2 < \dfrac{1}{x} < -1$ puis $f(x) = -2x$ puis $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2 \neq 1 = f(-1)$. f n'est pas continue en -1.

• Soit $k \leqslant -2$. Pour $x \in \left]\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k-1}\right]$, on a $\dfrac{1}{x} \in [k-1,k[$ puis $f(x) = (k-1)x$. Mais alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\to \frac{1}{k}\\ x>\frac{1}{k}}} f(x) = 1-\dfrac{1}{k} \neq 1 = f\left(\dfrac{1}{k}\right)$. f n'est donc pas continue en $\dfrac{1}{k}$.

En résumé, f est définie sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \left\{\dfrac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z}^*\right\}$ et discontinue en chacun des $\dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 4

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\frac{z-2}{z-1} = i \Leftrightarrow z-2 = i(z-1) \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z-2 = i(z-1) \text{ (car 1 n'est pas solution de l'équation)}$$
$$\Leftrightarrow (1-i)z = 2-i \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow z = \frac{3+i}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\dfrac{3+i}{2}\right\}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right| = \dfrac{|z-2|}{|z-1|} = \dfrac{MA}{MB}$ puis

$$\frac{z-2}{z-1} = i \Rightarrow \left|\frac{z-2}{z-1}\right| = |i| \Rightarrow \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow \text{Re}(z) = \frac{3}{2}.$$

Ensuite, $\arg\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right) = \arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_M}{z_B - z_M}\right) = \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi]$ puis

$$\frac{z-2}{z-1}=i\Rightarrow \arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=\arg(i)\ [2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

M est donc aussi sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$ situé dans le demi-plan $y>0$. L'ordonnée de M est donc le rayon de ce demi-cercle à savoir $\dfrac{1}{2}$. On retrouve ainsi $z=\dfrac{3+i}{2}$.

3. 1ère solution. Posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2=i&\Leftrightarrow((x-2)+iy)^2=i\,((x-1)+iy)^2\\
&\Leftrightarrow x^2-4x+4-y^2+2i(x-2)y=i\left(x^2-2x+1-y^2+2i(x-1)y\right)\\
&\Leftrightarrow\left(x^2-4x+4-y^2+2xy-2y\right)+i\left(2xy-4y-x^2+2x-1+y^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-4x+4-y^2+2xy-2y=0\\2xy-4y-x^2+2x-1+y^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4xy-2x-6y+3=0\ (\text{I})+(\text{II})\\2xy-4y-x^2+2x-1+y^2=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(2y-1)(2x-3)=0\\2xy-4y-x^2+2x-1+y^2=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\3y-4y-\dfrac{9}{4}+3-1+y^2=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}\\x-2-x^2+2x-1+\dfrac{1}{4}=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\y^2-y-\dfrac{1}{4}=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}\\x^2-3x+\dfrac{11}{4}=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow z=\frac{3+i\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}\text{ ou }z=\frac{3-i\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

2ème solution. i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Donc, $i=\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$. Soit alors $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2=i&\Leftrightarrow(z-2)^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}(z-1)\right)^2\Leftrightarrow\left(z-2-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(z-1)\right)\left(z-2+\frac{1+i}{\sqrt{2}}(z-1)\right)=0\\
&\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}}z-\frac{2\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}}=0\text{ ou }\frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}}z-\frac{2\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}}=0\\
&\Leftrightarrow z=\frac{2\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1-i}\text{ ou }z=\frac{2\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}+1+i}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{\left(2\sqrt{2}-1-i\right)\left(\sqrt{2}-1+i\right)}{\left(\sqrt{2}-1-i\right)\left(\sqrt{2}-1+i\right)}\text{ ou }z=\frac{\left(2\sqrt{2}+1+i\right)\left(\sqrt{2}+1-i\right)}{\left(\sqrt{2}+1+i\right)\left(\sqrt{2}+1-i\right)}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)+1+i\left(-\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+1}\\
&\text{ou }z=\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)+1+i\left(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1}
\end{aligned}$$

puis

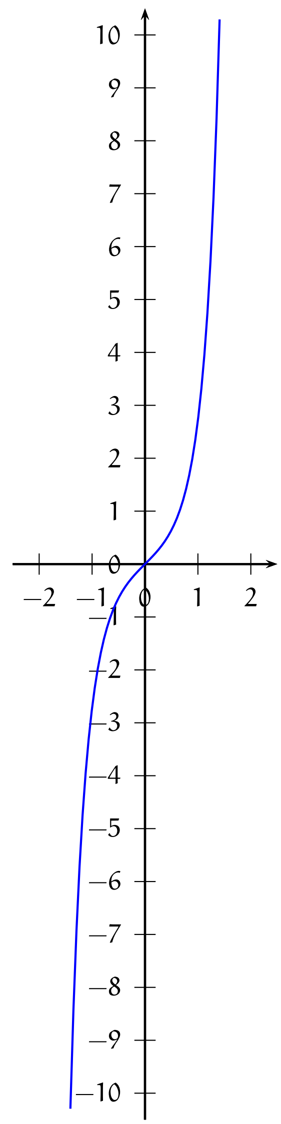
$$\begin{aligned}
\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i &\Leftrightarrow z = \frac{6-3\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \text{ ou } z = \frac{6+3\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{\left(6-3\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{2\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} \text{ ou } z = \frac{\left(6+3\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{6+\left(2\sqrt{2}+2\right)i}{4} \text{ ou } z = \frac{6+\left(-2\sqrt{2}+2\right)i}{4} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{3+\left(\sqrt{2}+1\right)i}{2} \text{ ou } z = \frac{3-\left(\sqrt{2}-1\right)i}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. Pour tout réel x, $f_1(x) = xe^{\left(x^2\right)}$. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Ensuite, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 \times e^{\left(x^2\right)} + x \times 2xe^{\left(x^2\right)} = \left(2x^2+1\right)e^{\left(x^2\right)}.$$

La fonction f_1' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x,

$$f_{2n+1}(x) - f_{2n}(x) = x^{2n+1}e^{\left(x^2\right)} - x^{2n}e^{\left(x^2\right)} = x^{2n}(x-1)e^{\left(x^2\right)}.$$

L'expression précédente est strictement négative sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, strictement positive sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 0 et en 1. La courbe représentative de la fonction f_{2n+1} est strictement au-dessous de la courbe représentative de la fonction f_{2n} sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$ et strictement au-dessus sur $]1, +\infty[$. Enfin, les deux courbes ont en commun les poinst de coorodonnées respectives $(0, 0)$ et $(1, e)$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_p(u_n) = u_n^p e^{(u_n)^2}$. Tout d'abord, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times u_n^{p-1}e^{(u_n)^2} > u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ou bien convergente, ou bien divergente de limite $+\infty$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel $\ell \geqslant u_0 > 1$ tel que $\ell = \ell^p e^{\left(\ell^2\right)}$ ou encore $\ell^{p-1}e^{\left(\ell^2\right)} = 1$. Mais cette dernière égalité est impossible car si $\ell > 1$, $\ell^{p-1}e^{\left(\ell^2\right)} > 1$ et en particulier $\ell^{p-1}e^{\left(\ell^2\right)} \neq 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant ex^n$. Par positivité et croissance de l'intégration, on obtient $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx \leqslant e\int_0^1 x^n\ dx = \frac{e}{n+1}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx = 0$.

Exercice 6

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, alors $u_1 = u_0$ ou encore $2(a+2) = 1$ ou enfin $a = -\dfrac{3}{2}$. Réciproquement si $a = -\dfrac{3}{2}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 1)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

- L'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = 1$. Alors, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ et en particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Finalement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $a = -\dfrac{3}{2}$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. $u_0 = 1$, $u_1 = 2(a+2)$ puis $u_2 = (a+2)(2a+5)$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, alors $u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ puis $(a+2)(2a+5) - 2(a+2) = 2(a+2) - 1$ puis $2a^2 + 5a + 3 = 0$ et donc $a \in \left\{-1, -\dfrac{3}{2}\right\}$.

Réciproquement, si $a = -\dfrac{3}{2}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 0 et si $a = -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1. En résumé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si $a \in \left\{-1, -\dfrac{3}{2}\right\}$.

3. Soit $a > 0$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (a+1)u_n + a + 2 > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ou bien convergente, ou bien divergente de limite $+\infty$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel ℓ vérifiant $\ell = (a+2)(\ell+1)$ et donc $\ell = -\dfrac{a+2}{a+1} < 0$. Ceci contredit le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 7

1. Les différentes sommes possibles des points marqués sur les deux derniers dés sont

- $1 + 1 = 2$,
- $1 + 2 = 3$,
- $1 + 3 = 4$,
- $2 + 1 = 3$,

- $2+2=4$,
- $2+3=5$.

En ajoutant la valeur obtenue sur le premier dé, on obtient les valeurs prises par la variable aléatoire $X : \{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

• $X=3$ est obtenu avec la combinaison $(1,1,1)$. Donc, $P(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$.

• $X=4$ est obtenu avec les combinaisons $(2,1,1)$, $(1,2,1)$ et $(1,1,2)$. Donc, $P(X=4)=3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{36}$.

• $X=5$ est obtenu avec les combinaisons $(3,1,1)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$, $(1,1,3)$ et $(1,2,2)$. Donc, $P(X=5)=5\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$.

• $X=6$ est obtenu avec les combinaisons $(4,1,1)$, $(3,1,2)$ et $(3,2,1)$, $(2,1,3)$, $(2,2,2)$ et $(1,2,3)$.
Donc, $P(X=6)=6\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{36}$.

• $X=7$ est obtenu avec les combinaisons $(5,1,1)$, $(4,1,2)$, $(4,2,1)$, $(3,1,3)$, $(3,2,2)$ et $(2,2,3)$.
Donc, $P(X=7)=6\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{36}$.

• $X=8$ est obtenu avec les combinaisons $(6,1,1)$, $(5,1,2)$, $(5,2,1)$, $(4,1,3)$, $(4,2,2)$ et $(3,2,3)$.
Donc, $P(X=8)=6\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{36}$.

• $X=9$ est obtenu avec les combinaisons $(6,2,1)$, $(6,1,2)$, $(5,1,3)$, $(5,2,2)$, et $(4,2,3)$. Donc, $P(X=9)=5\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$.

• $X=10$ est obtenu avec les combinaisons $(6,2,2)$, $(6,1,3)$ et $(5,2,3)$. Donc, $P(X=10)=3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{36}$.

• $X=11$ est obtenu avec la combinaison $(6,2,3)$. Donc, $P(X=11)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$.

2. $E(X)=3\times\frac{1}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{5}{36}+6\times\frac{6}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{6}{36}+9\times\frac{5}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{1}{36}=\frac{252}{36}=7$.
Le résultat était prévisible car les valeurs prises par la variable X sont symétriques par rapport à 7 et la liste des probabilités correspondantes est également symétrique.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. La variable Y prend les $3-1=2$, $1,5-1=0,5$, $0,5-1=-0,5$ et $0-1=-1$. Ensuite,

- $P(Y=2)=P(X=3)+P(X=11)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.
- $P(Y=0,5)=P(X=4)+P(X=10)=\frac{6}{36}=\frac{3}{18}$.
- $P(Y=-0,5)=P(X=5)+P(X=9)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.
- $P(Y=-1)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=\frac{18}{36}=\frac{9}{18}$.

Par suite, $E(Y)=2\times\frac{1}{18}+0,5\times\frac{3}{18}-0,5\times\frac{5}{18}-1\times\frac{9}{18}=-\frac{8}{18}=-\frac{4}{9}$. En particulier, l'espérance de gain est strictement négative ce qui est normal dans un jeu d'argent. Le jeu est réaliste.

