INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2019
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes, et ln le logarithme népérien. On rappelle l'égalité, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{1}$$

Exercice 1

1. Calculer sous la forme la plus simple possible $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.
2. Donner le domaine de définition et la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$.
3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{4x^3-1}{x^2}}$.
4. Donner la limite en $x = 0$ de la fonction de la question précédente.
5. Ecrire le nombre complexe $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.
6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

   $$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x},$$

   expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

7. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.

8. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n}$$

pour $n \geq 1$. On admettra que $u_n < 1$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

10. Résoudre l'equation $x^2 + ix + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$, puis dans $\mathbf{R}$.

Exercice 2

1. a étant un réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie pour tout $x > 0$.

   (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   (b) Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies, et tracer le graphe de f dans le cas où $a = 4$.

2. On considère un nombre $u_0 > \sqrt{a}$ et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

   (a) Déduire de la question précédente que pour tout n, $u_n > \sqrt{a}$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est monotone, et convergente vers une limite qu'on précisera.

3. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \sqrt{a}$

   (a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$.

   (b) En déduire que $v_n \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

4. Déduire de ce qui précède une méthode pour approcher numériquement la racine carrée d'un nombre donné.

5. Montrer que si on veut approcher $\sqrt{5}$ par cette méthode en partant de $u_0 = 3$, la précision est meilleure que 10^{-4} dès la troisième itération.

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ qui à x associée

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

   (a) Donner le domaine de définition de la fonction ϕ ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine de définition.

   (b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ, et en déduire le tableau de variations de ϕ.

   (c) Faire l'étude des branches infinies de ϕ

   (d) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet deux solutions. Donner la solution évidente, et placer l'autre, qu'on notera α, par rapport à $1/2$.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 0$ associe

$$f(x) = e^{\left(x-x^2\right)\ln x}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) En vous aidant de la partie précédente, déterminer le signe de $f'(x)$ selon la valeur de x.

   (c) Donner la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini, et en déduire la nature de la branche infinie correspondante.

   (d) Dresser le tableau de variations de f.

   (e) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

   (f) Dessiner la courbe représentative de f.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 (on pourra remarquer que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

   pour tout $x \in [0,1]$).

   (b) Monter que, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

   (c) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$, et en déduire qu'elle converge.

2. Soit g la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   (a) Etudier le signe de g sur $\mathbf{R}^+$.

   (b) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 2 = 0$, où λ désigne un paramètre réel.
2. On considère la fonction de la variable réelle $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et deux réels a et b tels que $f(a) = f(b)$.
   (a) Montrer que $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$.
   (b) En déduire que $a = b$.

Exercice 6 On considère deux nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Ecrire z_1 sous forme trigonométrique.
2. Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
3. En déduire la forme trigonométrique de z_2.
4. Donner la valeur de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

Exercice 7 Dans une épreuve sportive, des dossards numérotés de 1 à n ont été distribués aléatoirement à n candidats, qui passeront l'épreuve dans l'ordre des numéros de dossards. Deux amis A et B participent à cette épreuve. On note n_A et n_B leurs numéros de dossards respectifs.

1. Combien y a-t-il de couples (n_A, n_B) possibles ?
2. Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq n - 1$. Montrer que $2(n - r)$ des couples de la question précédente vérifient $|n_A - n_B| = r$.
3. Quel est l'écart le plus probable entre n_A et n_B ?
4. Quel est l'écart moyen entre n_A et n_B ?