# CAPESA
# Analystes statisticiens

## PREMIERE COMPOSITION

---

## Exercice 1

**1.** La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur le segment $[2,4]$ et donc l'intégrale proposée existe. Ensuite,

$$\int_2^4 \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_2^4 \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}\,dx = [\ln|\ln(x)|]_2^4 = \ln(\ln(4)) - \ln(\ln(2)) = \ln\left(\frac{2\ln(2)}{\ln(2)}\right) = \ln(2).$$

**2.** Notons le domaine de définition de la fonction f. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in D \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln(x) + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e^{-1}.$$

Doc, $D = ]0, +\infty[ \setminus \left\{e^{-1}\right\}$.

**3.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(4x - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

**4.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(4x^3-1\right) = -1 < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-1}{x^2} = -\infty$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$.

**5.** $4 - 4i\sqrt{3} = 8\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

**6.** La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. D est symétrique par rapport à 0 et pour $x \in D$,

$$f(-x) = \frac{\sin(-3x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(3x)}{\cos(x)} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire. Ensuite, le domaine D est invariant par $2\pi$-translation et pour $x \in D$,

$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(3x+6\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(3x)}{\cos(x)} = f(x).$$

La fonction f est donc $2\pi$-périodique.

Ainsi, on étudie la fonction f et on construit son graphe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. On obtient le graphe de f sur $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ par symétrie de centre O puis on obtient le graphe de f sur D par translations de vecteurs $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

**7.** Le nombre de tirages simultanés de 3 boules parmi 10 est $C_{10}^3 = \dfrac{10\times9\times8}{3\times2} = 120$. Ces tirages sont équiprobables. Les tirages fournissant 3 numéros, tous non multiples de 5, sont les tirages de 3 boules parmi les boules numéros 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9. Le nombre de ces tirages est $C_8^3 = \dfrac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$. La probabilité demandée est donc

$$p = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{8\times7\times6}{10\times9\times8} = 1 - \frac{7}{5\times3} = \frac{8}{15}.$$

**8.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} n - \sqrt{n^2-n} &= \frac{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{n}{n\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

**9.** Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{\dfrac{1+u_n}{3-u_n}-1}=\frac{3-u_n}{2u_n-2}=\frac{2-(u_n-1)}{2(u_n-1)}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{2}.$$

La suite $\left(\dfrac{1}{u_n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{u_0-1}-\dfrac{n}{2}$ puis, en tenant compte de $u_0=0$,

$$u_n=1-\frac{1}{1+\dfrac{n}{2}}.$$

Mais alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

**10.** Pour tout réel $x$, $\mathrm{Re}\left(x^2+ix+1\right)=x^2+1\neq 0$ et donc $x^2+ix+1\neq 0$. L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Le discriminant de l'équation proposée est $\Delta=i^2-4=-5=\left(i\sqrt{5}\right)^2$. L'équation proposée admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1=\dfrac{i+i\sqrt{5}}{2}=i\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2=i\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

# Exercice 2

**1. a)** Soit $a>0$. Soit $x>0$.

$$f(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)=x\Leftrightarrow x^2+a=2x^2\Leftrightarrow x^2=a\Leftrightarrow x=\sqrt{a}.$$

**b)** La fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)=\frac{x+\sqrt{a}}{2x^2}\left(x-\sqrt{a}\right).$$

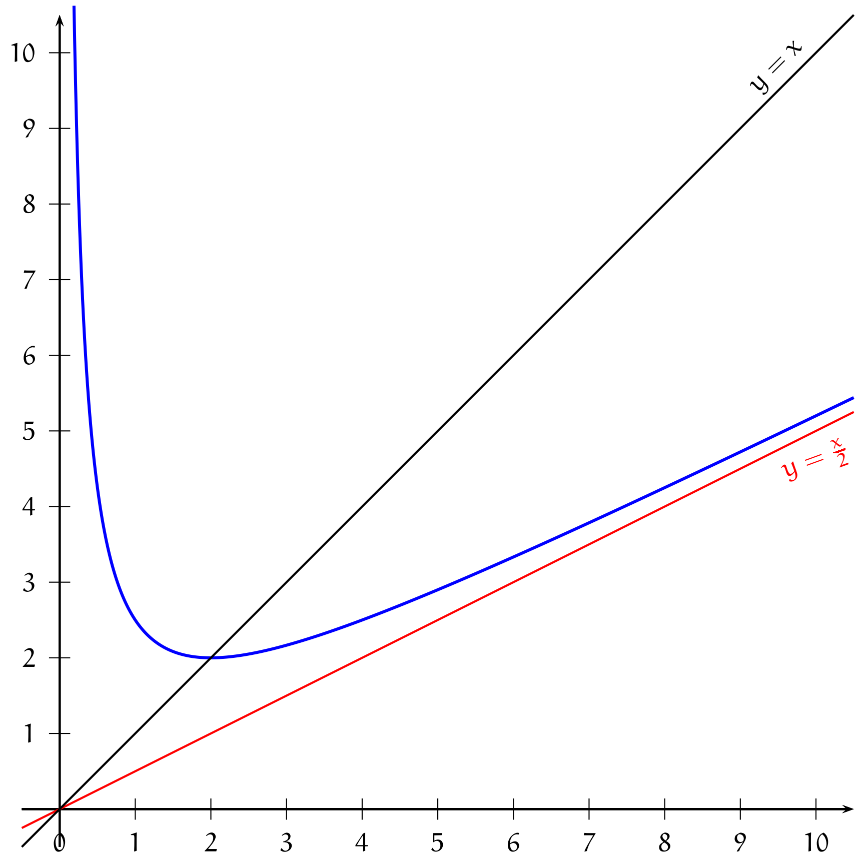
La fonction $f'$ est strictement négative sur $\left]0,\sqrt{a}\right[$ et strictement positive sur $\left]\sqrt{a},+\infty\right[$. On en déduit que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\left]0,\sqrt{a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt{a},+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{2}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a}{2x}=+\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de $f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{2x}=0$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{2x}=0$. Donc, la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ en $+\infty$.

**Graphe de la fonction** $f$ quand $a=4$. Voir page suivante.




**2. a)** Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n > \sqrt{a}$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n$ existe et $u_n > \sqrt{a}$. Alors, $u_{n+1}$ existe puis, la fonction $f$ étant strictement croissante sur $\left[\sqrt{a}, +\infty\right[$, $f(u_n) > f\left(\sqrt{a}\right)$ ou encore $u_{n+1} > \sqrt{a}$ (d'après 1)a)).

On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n > \sqrt{a}$.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{\sqrt{a} + u_n}{2u_n}\left(\sqrt{a} - u_n\right) < 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell$, supérieur ou égal à $\sqrt{a}$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction $f$ est continue sur $\left[\sqrt{a}, +\infty\right[$ et en particulier en $\ell$. Mais alors, quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $f(\ell) = \ell$ puis $\ell = \sqrt{a}$ d'après la question 1)a).

On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

**3. a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a}{2u_n} = \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2u_n} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$

**b)** D'après la question précédente et la question 2)a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n} \leqslant \dfrac{v_n^2}{2\sqrt{a}}$. Montrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

- $2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^0} = 2\sqrt{a} \times \dfrac{v_0}{2\sqrt{a}} = v_0 \geqslant v_0$ et donc l'inégalité est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $v_n \leqslant 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$. Alors,

$$v_{n+1} \leqslant \frac{v_n^2}{2\sqrt{a}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} \times \left(2\sqrt{a}\left(\frac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}\right)^2 \frac{(2\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}\left(\frac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n \times 2} = 2\sqrt{a}\left(\frac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n+1}}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

**4.** On choisit $u_0$ tel que $0 < \dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} < 1$ ou encore $\sqrt{a} < u_0 < 3\sqrt{a}$. Dans ce cas, la suite $\left(2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge très rapidement vers $0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge très rapidement vers $\sqrt{a}$. Très rapidement, $u_n$ est une excellente valeur approchée de $\sqrt{a}$.

**5.** Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{v_0}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ puis $v_n \leqslant 6 \times \left(\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\right)^{2^n}$. Mais alors

$$\begin{aligned} n \geqslant 3 &\Rightarrow 2^n \geqslant 8 \Rightarrow 6 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^{2^n} \leqslant 6 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^8 \ \left(\text{car } 0 < \frac{1}{2\sqrt{5}} < 1\right) \\ &\Rightarrow v_n \leqslant \frac{6}{2^8 \times 5^4} \Rightarrow v_n \leqslant \frac{6}{16} \times \frac{1}{10^4} \\ &\Rightarrow 0 < u_n - \sqrt{5} < 10^{-4}. \end{aligned}$$

# Exercice 3

**1. a)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\phi(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{2}.$$

Le domaine de définition de la fonction $\phi$ est $D = \left]0, \dfrac{1}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{1-2x} = 1$. En additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = -\infty$. Ensuite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1-2x} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. En additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} (1-x) = \frac{1}{2}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (1-2x) = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (1-2x) = 0^-$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{1-x}{1-2x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{1-x}{1-2x} = -\infty$. Puisque d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, en additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \phi(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \phi(x) = -\infty$.

**b)** La fonction $\phi$ est dérivable sur $D$ et pour tout $x \in D$,

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-(1-2x) + 2(1-x)}{(1-2x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(2x-1)^2} = \frac{(2x-1)^2 + x}{x(2x-1)^2} > 0.$$

Ainsi, la fonction $\phi'$ est strictement positive sur $D$. La fonction $\phi$ est donc strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. On en déduit la tableau de variation de la fonction $\phi$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $\phi$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\phi(x) = -\infty$ et donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $\phi$. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\phi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}\phi(x) = -\infty$. Donc, la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $\phi$.

Pour $x > \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\phi(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1-x}{x(1-2x)}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{x(1-2x)} = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\phi(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\phi(x)}{x} = 0$. Donc, la courbe représentative de la fonction $\phi$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(Ox)$.

**d)** La fonction $\phi$ est continue et strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ et de plus $\lim\limits_{x\to 0^+}\phi(x) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\phi(x) = +\infty > 0$. Donc, la fonction $\phi$ s'annule une fois et une seule sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ en un certain réel $x_0$.

De même, la fonction $\phi$ est continue et strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ et de plus $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}\phi(x) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x) = +\infty > 0$. Donc, la fonction $\phi$ s'annule une fois et une seule sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ en un certain réel $x_1$. De plus, $\phi(1) = 0$ et donc $x_1 = 1$.

**2. a)** La fonction $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \left((1-2x)\ln(x) + \frac{x-x^2}{x}\right)e^{\left(x-x^2\right)\ln(x)} = \left((1-2x)\ln(x) + 1 - x\right)e^{\left(x-x^2\right)\ln(x)}.$$

**b)** $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4}\right)} > 0$. D'autre part, pour tout réel $x$ de $]0,+\infty[\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = (1-2x)\phi(x)e^{\left(x-x^2\right)\ln(x)}$.

La fonction $\phi$ est strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ et s'annule en $x_0$. Donc, $0 < x < x_0 \Rightarrow \phi(x) < \phi(x_0) = 0$ et $x_0 < x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \phi(x) > \phi(x_0)$. Ensuite, sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ la fonction $f'$ a le même signe que la fonction $\phi$ et donc la fonction $f'$ est strictement négative sur $]0,x_0[$, strictement positive sur $\left]x_0,\dfrac{1}{2}\right[$ et s'annule en $x_0$.

De même, la fonction $\phi$ est strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$. Puisque sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, la fonction $f'$ a le signe de la fonction $-\phi$, la fonction $f'$ est strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$, strictement négative sur $]1,+\infty[$ et s'annule en $1$.

En tenant compte de $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$, on a montré que la fonction $f'$ est strictement négative sur $]0,x_0[\cup]1,+\infty[$, est strictement positive sur $]x_0,1[$ et s'annule en $x_0$ et en $1$.

**c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)\ln(x) = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty}e^X = 0$. La droite des abscisses est donc asymptote à la courbe représentative de $f$ en $+\infty$.

**d) Tableau de variation de la fonction $f$.**

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $f(x_0)$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

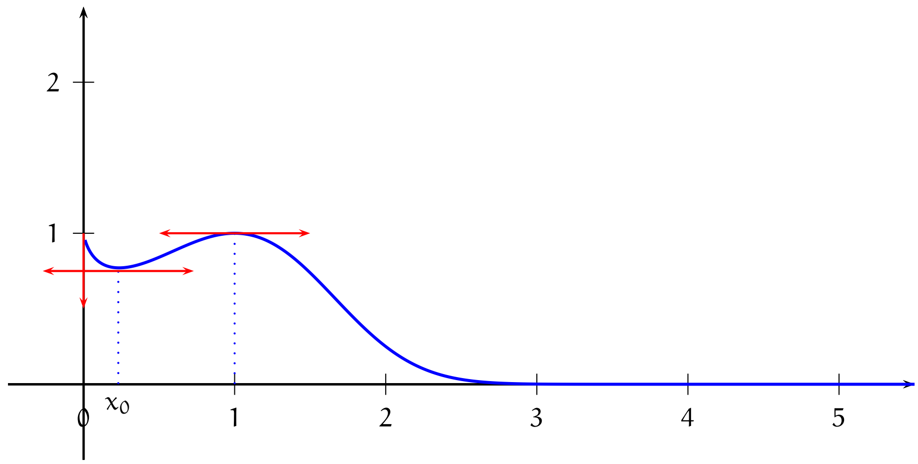
**e)** Pour $x > 0$, $f'(x) = \left(\ln(x) - 2x\ln(x) + 1 - x\right)e^{\left(x-x^2\right)\ln(x)}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}(-2x\ln(x) + 1 - x) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ et en additionnant, on obtient

$\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)-2x\ln(x)+1-x)=-\infty$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-x^2\right)\ln(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln(x)-x^2\ln(x)\right)=0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}e^{\left(x-x^2\right)\ln(x)}=\lim\limits_{X\to 0}e^X=1$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=-\infty$.

On prolonge par continuité la fonction $f$ en $0$ en posant $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ et on note encore $f$ le prolongement obtenu. Puisque $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=-\infty$, on sait que la courbe représentative de $f$ admet au point de coordonnées $(0,1)$ une demie-tangente verticale.

**f) Graphe de la fonction $f$.**




## Exercice 4

**1. a)** Une intégration par parties fournit

$$I_0=\int_0^1 1\times\ln(1+x)\ dx=[(1+x)\ln(1+x)]_0^1-\int_0^1(1+x)\times\frac{1}{1+x}\ dx=2\ln(2)-\int_0^1 dx=2\ln(2)-1.$$

Une autre intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^1 1\times\ln\left(1+x^2\right)\ dx=\left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1-\int_0^1 x\times\frac{2x}{1+x^2}\ dx\\&=\ln(2)-2\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\ dx=\ln(2)-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\&=\ln(2)-1+[\mathrm{Arctan}(x)]_0^1=\ln(2)+\frac{\pi}{4}-1.\end{aligned}$$

**b)** Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in[0,1]$, $0\leqslant x^n\leqslant 1$ puis $0=\ln(1)\leqslant\ln\left(1+x^n\right)\leqslant\ln(2)$. Par positivité et croissance de l'intégration, on obtient $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx\leqslant\int_0^1\ln(2)\ dx$ et donc $0\leqslant I_n\leqslant\ln(2)$.

**c)** Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in[0,1]$. Donc, $0\leqslant x\leqslant 1$ puis $x^{n+1}\leqslant x^n$ (après multiplication par le réel positif $x^n$) puis $\ln\left(1+x^{n+1}\right)\leqslant\ln\left(1+x^n\right)$. Ainsi, pour tout $x$ de $[0,1]$, $\ln\left(1+x^{n+1}\right)\leqslant\ln\left(1+x^n\right)$. Par croissance de l'intégration, on obtient $I_{n+1}\leqslant I_n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}\leqslant I_n$. Donc, la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Puisque la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $0$, on en déduit que la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell$ positif ou nul.

**2. a)** La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif $x$,

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\leqslant 0.$$

La fonction $g$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En tenant compte de $g(0)=\ln(1+0)-0=0$, on en déduit que la fonction $g$ est négative sur $\mathbb{R}^+$. On a ainsi montré que pour tout réel positif $x$, $\ln(1+x)\leqslant x$.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout réel $x \in [0,1]$, $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégration, on obtient

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

## Exercice 5

**1.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de l'équation proposée est $\Delta = \lambda^2 - 4\left(\lambda^2+2\right) = -3\lambda^2 - 8$. $\Delta < 0$ et donc l'équation proposée n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

**2. a)** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^3 + 2a + 1 = b^3 + 2b + 1 \Rightarrow \left(a^3 - b^3\right) + 2(a-b) = 0 \Rightarrow (a-b)\left(a^2 + ab + b^2 + 2\right) = 0.$$

**b)** D'après la question 1), pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + ab + b^2 + 2 \neq 0$. Donc, si $f(a) = f(b)$, alors $a - b = 0$ ou encore $a = b$.

## Exercice 6

**1.** $1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

**2.**

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1-i}{2+\sqrt{3}+i} = \frac{(1-i)\left(2+\sqrt{3}-i\right)}{\left(2+\sqrt{3}+i\right)\left(2+\sqrt{3}-i\right)} = \frac{2+\sqrt{3}-1-i\left(2+\sqrt{3}+1\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}-i\left(3+\sqrt{3}\right)}{8+4\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{4\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(1-i\sqrt{3}\right) = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\left(1-i\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

**3.** $|z_2|^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 8 + 4\sqrt{3} = 2\left(4+2\sqrt{3}\right) = 2\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ puis $|z_2| = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \sqrt{2}+\sqrt{6}$. Ensuite,

$$\arg(z_2) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \arg(z_1) = \arg(z_1) - \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

Ainsi, $z_2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$.

**4.** Mais alors,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\left(2+\sqrt{3}+i\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}\left(2+\sqrt{3}+i\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)i\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

**Remarque.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

# Exercice 7

**1.** Le nombre de couples $(n_A, n_B)$ est $n(n-1)$.

**2.** Soit $r \in [\![1, n-1]\!]$. Les couples $(n_A, n_B)$ tels que $|n_A - b_B| = r$ sont de deux types disjoints : les couples $(n_A, n_B)$ tels que $n_A - n_B = r$ et ceux qui sont tels que $n_B - n_A = r$. Les couples $(n_A, n_B)$ tels que $n_A - n_B = r$ ou encore $n_A = n_B + r$ sont les couples $(r+1, 1)$, $(r+2, 2)$, …, $(n, n-r)$. Il y en a $n-r$. Il y a autant de couples $(n_A, n_B)$ tels que $n_B = n_A + r$ à savoir $n-r$ et finalement, il y a $2(n-r)$ couples $(n_A, n_B)$ tels que $|n_A - n_B| = r$.

**3.** Puisque $n_A$ et $n_B$ sont éléments de $[\![1, n]\!]$ et distincts, l'ensemble des valeurs prises par $|n_A - n_B|$ est $[\![1, n-1]\!]$. Les différents couples $(n_A, n_B)$ étant équiprobables, la probabilité que l'écart $|n_A - b_B|$ soit égal à $r$, $r$ donné dans $[\![1, n-1]\!]$, est

$$p_r = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}.$$

Cette probabilité est maximum quand $r = 1$ et est égale à $\dfrac{2}{n}$ dans ce cas. L'écart le plus probable est donc $r = 1$ qui correspond à la situation où les deux coureurs passent l'épreuve juste l'un derrière l'autre.

**4.** L'écart moyen (c'est-à-dire la moyenne de tous les écarts est $\dfrac{\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} 2(n-r) \times r}{n(n-1)}$ avec

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} 2(n-r) \times r}{n(n-1)} &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{r=1}^{n-1} r(n-r) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{r=1}^{n} r(n-r) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left( n \sum_{r=1}^{n} r - \sum_{r=1}^{n} r^2 \right) = \frac{2}{n(n-1)} \left( \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{n(n+1)}{6} \times (3n - (2n+1)) = \frac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$