ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe selon les valeurs de n.

2. On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ (avec $n \geq 0$)

- Calculer J_1 et J_2

3. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ et déterminer sa limite si cette suite est convergente.

Exercice n° 2

On considère dans R^3, le plan P_a d'équation : $z = x + ay$, où a est un nombre réel quelconque.

1. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice M_a de la projection orthogonale sur P_a.

2. Calculer $M_a{}^n$ pour tout entier n strictement positif.

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice S_a de la symétrie orthogonale par rapport à P_a.

Exercice n° 3

Soient A et B deux matrices carrées du même ordre à coefficients réels.

1. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas, exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

2. Montrer que A est inversible si et seulement si A^p $(p \in N^*)$ est inversible et dans ce cas, exprimer $(A^p)^{-1}$ en fonction de A^{-1}.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in R$

- Calculer A^n pour tout entier naturel n.
- Calculer (si elle existe) l'inverse de A.
- Vérifier que $(A^n)^{-1}$ existe.

Exercice n° 4

On définit une suite d'entiers naturels q_k $(k \in N)$ par $q_{k+1} = 2q_k + 1$ et $q_0 = 0$

1. Exprimer q_k en fonction de k.

2. On note $Q = \{q_k \,/\, k \in N\}$ et on définit la suite (a_n) par :

$a_0 = 1; a_{q_k} = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} q_i}; a_n = 0$ si $n \notin Q$. Quelle est la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n\,a_n$?

3. Pour $x>1$, calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{q_k} x^{q_k}$

4. On considère la suite (p_n) définie par : $p_0 = p \in]0,1[; p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Etudier la convergence de la suite (p_n).

5. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + p_{k+1} - p_k\right)$

Exercice n° 5

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On considère Q l'application numérique définie sur E_n par :

$$Q(p) = \int_{-1}^{1} p^2(x)(1 + x^2)\,dx$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, dont la forme bilinéaire associée définit sur E_n un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une base orthogonale p_i $(i = 0,1,...n)$ de E_n telle que le terme de plus haut degré de p_i soit X^i.

3. Pour $i \in \{1,...n-2\}$, on note F_i le sous-espace de E_n engendré par les polynômes de degré strictement inférieur à i. Déterminer une base du sous-espace $F_i^{\perp}$ orthogonal à F_i.

4. Montrer que $p_{i+2} - X\, p_{i+1}$ appartient à $F_i^{\perp}$. En déduire une relation entre p_{i+2}, p_{i+1}, p_i

5. On suppose n=2.
- Ecrire la matrice M de la forme bilinéaire symétrique associée à Q dans E_2
- La matrice M est-elle inversible ?
- La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de ses éventuelles valeurs propres ?

6. Répondre à la question précédente dans le cas où n=3.

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$. Etudier les variations de g et tracer son graphe (on précisera ses extrema, ainsi que sa convexité).

2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$. On cherchera des solutions de la forme $y(x) = u(x)e^{-x^2/2}$

3. On considère les fonctions numériques $f_{a,b}$ définies par $f_{a,b}(x) = (ax + b)e^{-x^2/2}$, où a et b sont deux nombres réels. On note $C_{a,b}$ leurs courbes représentatives. Montrer que pour a fixé non nul, les fonctions $f_{a,b}$ admettent des extrema et que les points correspondants à ces extrema sur $C_{a,b}$ appartiennent à un ensemble M_a. Représenter M_1. Comment M_a se déduit de M_1 ?

4. Montrer que pour a fixé non nul, les courbes $C_{a,b}$ admettent trois points d'inflexion dont l'un est d'abscisse comprise entre -1 et 1.

5. Ces points d'inflexion appartiennent pour a fixé et b variable à un ensemble noté I_a Représenter I_1. Comment I_a se déduit de I_1 ?