SESSION 2018

CAPESA
ISE Option mathématiques

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ et donc la fonction F_n est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_n(-x) = (-x)^n\sqrt{1 + (-x)^2} = (-1)^n x^n \sqrt{1 + x^2} = (-1)^n f_n(x).$$

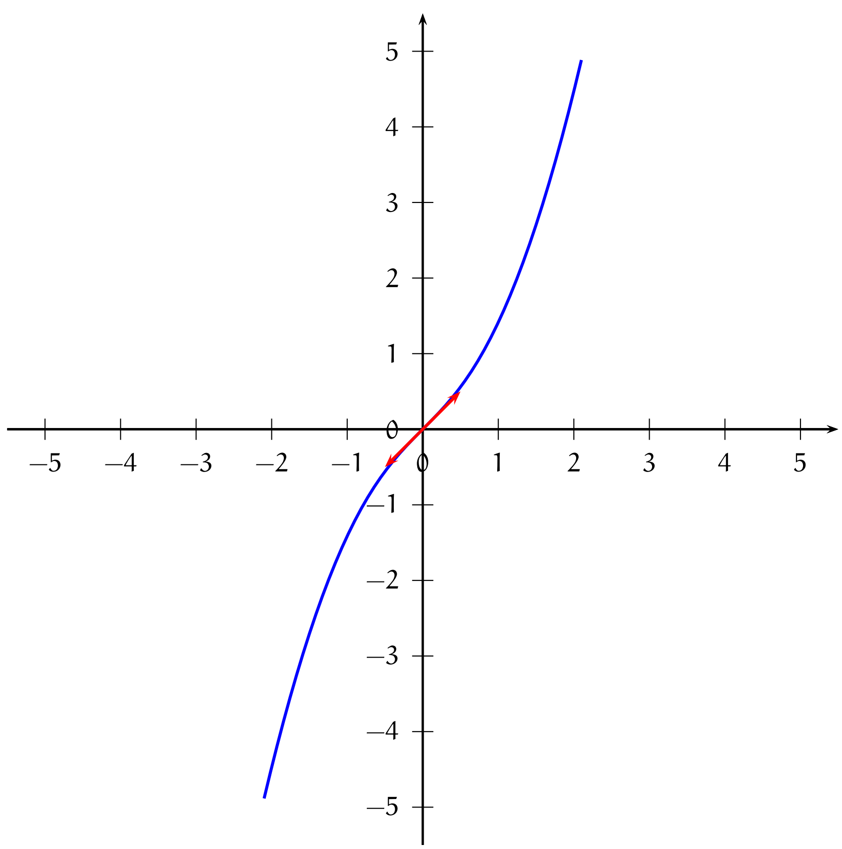
Donc la fonction f_n est paire si n est pair et impaire si n est impair (la fonction f_n a la parité de n).

Ensuite, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions strictement croissantes sur $[0, +\infty[$. Par parité, la fonction f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ si n est pair et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ si n est impair.

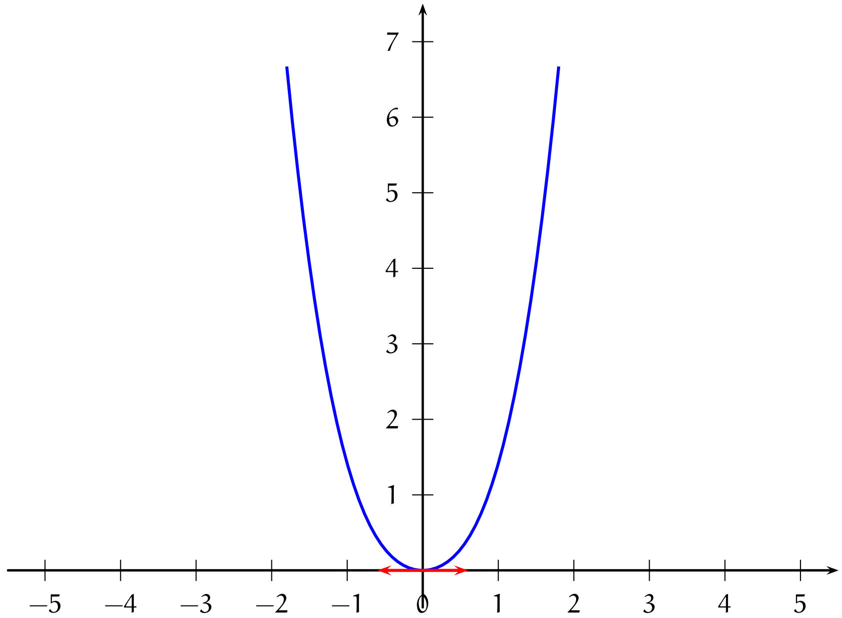
Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ puis, $\dfrac{f_n(x)}{x} = x^{n-1}\sqrt{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc, la courbe représentative de f_n admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) et de même en $-\infty$ par parité.

Ensuite, $f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^n$ et donc $f_1(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ et si $n \geqslant 2$, $f_n(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Donc, $f_1'(0) = 1$ et si $n \geqslant 2$, $f_n'(0) = 0$.

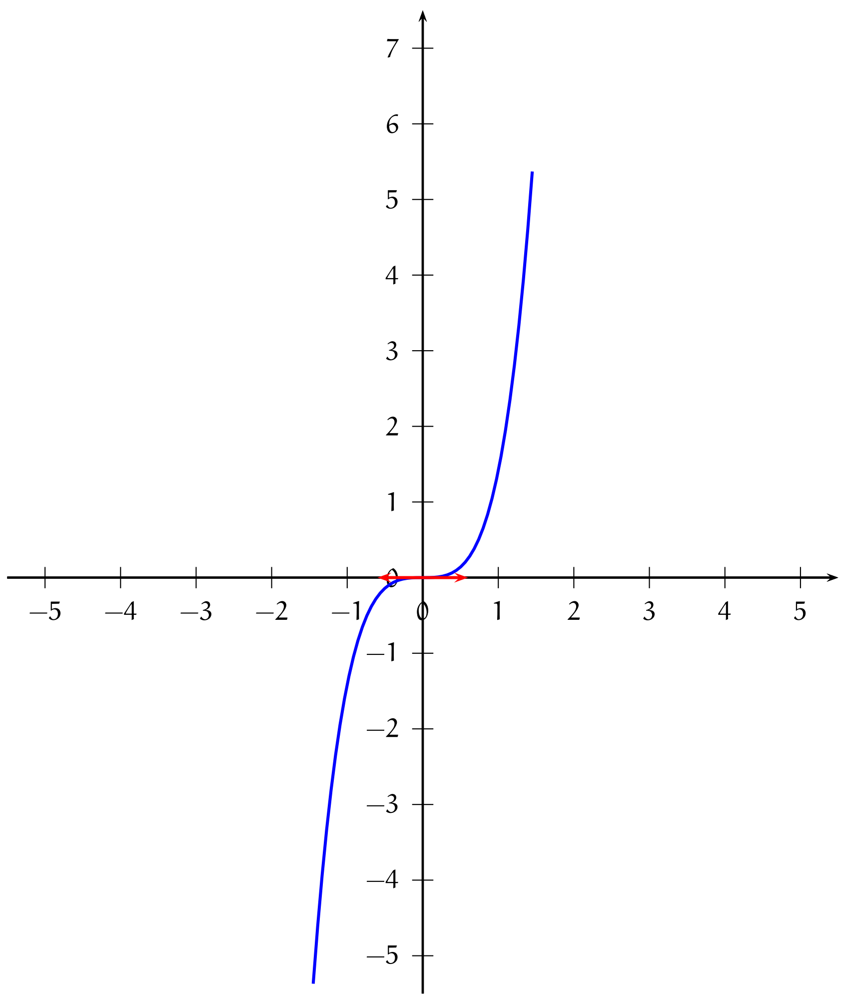
Graphe de f_1.



Graphe de f_{2n}, $n \geqslant 1$.



Graphe de f_{2n+1}, $n \geqslant 1$.



2. $J_1 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

Pour calculer J_2, on pose $x = \text{sh}(t)$ et donc $dx = \text{ch}(t)\ dt$.
En tenant compte de $\text{sh}(t) = 1 \Leftrightarrow t = \text{Argsh}(1) \Leftrightarrow t = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ (on rappelle que pour tout réel t, $\text{Argsh}(t) = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$), on obtient

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\ dx = \int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \text{sh}^2(t)\sqrt{1+\text{sh}^2(t)}\,\text{ch}(t)\ dt = \int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \text{sh}^2(t)\,\text{ch}^2(t)\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \text{sh}^2(2t)\ dt = \frac{1}{16}\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \left(e^{2t}-e^{-2t}\right)^2\ dt \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \left(e^{4t}-2+e^{-4t}\right)\ dt = -\frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{64}\left[e^{4t}-e^{-4t}\right]_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{64}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^4 - \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{64}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^4 - \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^4}{\left(\sqrt{2}+1\right)^4\left(\sqrt{2}-1\right)^4}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{64}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^4 - \left(\sqrt{2}-1\right)^4\right) \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{32}\left(4\left(\sqrt{2}\right)^3 + 4\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(-\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + 3\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

3. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x^n\sqrt{1+x^2} \leqslant x^n\sqrt{2}$. Par croissance de l'intégration, on obtient

$$0 \leqslant J_n \leqslant \sqrt{2}\int_0^1 x^n\ dx = \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Exercice 2

1. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique. P_a est le plan d'équation $x+ay-z=0$. Un vecteur normal à P_a est le vecteur unitaire $u = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+2}}(1,a,-1)$. Pour tout $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$p_u(v) = \langle v,u\rangle u = \frac{1}{a^2+2}(x+ay-z)(1,a,-1).$$

Mais alors, pour tout $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
p_{P_a}(v) &= v - p_u(v) = (x,y,z) - \frac{1}{a^2+2}(x+ay-z)(1,a,-1) \\
&= \frac{1}{a^2+2}\left(\left(a^2+1\right)x - ay + z, -ax+2y+az, x+ay+\left(a^2+1\right)z\right).
\end{aligned}$$

Donc, $M_a = \dfrac{1}{a^2+2}\begin{pmatrix} a^2+1 & -a & 1 \\ -a & 2 & a \\ 1 & a & a^2+1 \end{pmatrix}$.

2. Puisque $p_{P_a}\circ p_{P_a} = p_{P_a}$, on a encore $M_a^2 = M_a$ puis par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $M_a^n = M_a$.

3. $S_a = 2M_a - I_3 = \dfrac{1}{a^2+2}\begin{pmatrix} a^2 & -2a & 2 \\ -2a & -a^2+2 & 2a \\ 2 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ et donc

$$AB \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(AB) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \times \det(B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ et } \det(B) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } B \in GL_n(\mathbb{R}).$$

De plus, en cas d'inversibilité, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ car $ABB^{-1}A^{-1} = AI_3A^{-1} = AA^{-1} = I_3$.

2. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. $\det(A^p) = (\det(A))^p$ et donc $\det(A^p) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ puis $A^p \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$. De plus, en cas d'inversibilité, $(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$ car, puisque A et A^{-1} commutent,

$$A^p \times \left(A^{-1}\right)^p = \left(AA^{-1}\right)^p = (I_3)^p = I_3.$$

3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, posons $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
A(\alpha) \times A(\alpha') &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha') & \sin(\alpha)\cos(\alpha') + \cos(\alpha)\sin(\alpha') & 0 \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha') - \cos(\alpha)\sin(\alpha') & \cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\alpha') & \sin(\alpha+\alpha') & 0 \\ -\sin(\alpha+\alpha') & \cos(\alpha+\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad = A(\alpha+\alpha').
\end{aligned}$$

• Mais alors, par récurrence, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(A(\alpha))^n = A(n\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) & 0 \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $A(\alpha) \times A(-\alpha) = A(\alpha - \alpha) = A(0) = I_3$. Donc, la matrice $A(\alpha)$ est inversible (car inversible à droite) et $(A(\alpha))^{-1} = A(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) & 0 \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La matrice $(A(\alpha))^n$ est inversible d'après la question 2 et de plus, $((A(\alpha))^n)^{-1} = \left((A(\alpha))^{-1}\right)^n = (A(-\alpha))^n = A(-n\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) & 0 \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. Pour tout entier k, $q_{k+1} + 1 = 2(q_k + 1)$ et donc la suite $(q_k + 1)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $q_0 + 1 = 1$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_k + 1 = (q_0 + 1) \times 2^k = 2^k$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = 2^k - 1.$$

2. La suite $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels. $q_0 = 0$ et pour $k \geqslant 1$, $q_k \geqslant 1 > 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}}\right| = \dfrac{1}{2^{k+1} - 1}$ puis $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\dfrac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}}\right| = 0$. Puisque $0 < 1$, la règle de d'Alembert permet d'affirmer que la série de terme général a_{q_k}, $k \in \mathbb{N}^*$, converge. Mais alors, en tenant compte du fait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{q_k} < +\infty,$$

et donc, la série de terme général a_n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{q_{k+1}a_{q_{k+1}}}{q_k a_{q_k}}\right| = \dfrac{2^{k+1}-1}{(2^k-1)(2^{k+1}-1)} = \dfrac{1}{2^k-1}$ et comme précedemment, la série de terme général $q_k a_{q_k}$ converge puis la série de terme général na_n converge.

3. Soit $x > 1$. $\dfrac{a_{q_{k+1}}x^{q_{k+1}}}{a_{q_k}x^{q_k}} = \dfrac{x^{q_{k+1}-q_k}}{2^{k+1}-1} = \dfrac{x^{2^{k+1}-2_k}}{2^{k+1}-1} = \dfrac{x^{2^k(2-1)}}{2^{k+1}-1} = \dfrac{x^{2^k}}{2^{k+1}-1}$. Par suite,

$$\frac{a_{q_{k+1}}x^{q_{k+1}}}{a_{q_k}x^{q_k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\times\frac{x^{2^k}}{2^k} \underset{k\to+\infty}{\to +\infty} +\infty,$$

d'après un théorème de croissances comparées. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $a_{q_{k+1}}x^{q_{k+1}} \geqslant 2a_{q_k}x^{q_k}$ puis, pour tout $k \geqslant k_0$, $a_{q_k}x^{q_k} \geqslant 2^{k-k_0}a_{q_{k_0}}x^{q_{k_0}}$. Puisque $a_{q_{k_0}}x^{q_{k_0}} > 0$, $2^{k-k_0}a_{q_{k_0}}x^{q_{k_0}}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et il en est de même de $a_{q_k}x^{q_k}$.

On a montré que pour tout $x > 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{q_k}x^{q_k} = +\infty$.

4. $p_0 = p \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sqrt{p_n} = (p_n)^{\frac{1}{2}}$. Mais alors, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = p^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{\ln(p)}{2^n}}.$$

Mais alors, $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} e^0 = 1$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite 1.

5. On note de plus que, puisque $p \in]0,1[$ ou encore $\ln(p) \in]-\infty,0[$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{k+1} - p_k > 0$. On note aussi que $p_{k+1} - p_k \underset{k\to+\infty}{\to} 1 - 1 = 0$.

Etudions la convergence de la série de terme général $\ln(1 + p_{k-1} - p_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$p_{k+1} - p_k = p^{\frac{1}{2^{k+1}}} - p^{\frac{1}{2^k}} = p^{\frac{1}{2^{k+1}}}\left(1 - p^{\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}}\right) = p^{\frac{1}{2^{k+1}}}\left(1 - p^{\frac{2^k}{2^k\times 2^{k+1}}}\right) = p^{\frac{1}{2^{k+1}}}\left(1 - p^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right).$$

Par suite, puisque $p_{k+1} - p_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$,

$$\ln(1 + p_{k+1} - p_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} p_{k+1} - p_k \underset{k\to+\infty}{\sim} 1\times\left(1 - p^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right) = 1 - e^{\frac{\ln(p)}{2^{k+1}}} \underset{k\to+\infty}{-} \frac{\ln(p)}{2^{k+1}} = \frac{\ln(1/p)}{2^{k+1}} > 0.$$

La série géométrique de terme général $\dfrac{\ln(1/p)}{2^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$, converge et donc la série de terme général $\ln(1 + p_{k-1} - p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge. On note S sa somme.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \exp\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(1 + p_{k+1} - p_k)\right)$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers e^S).

Exercice 5

1. Montrons que Q est une forme quadratique définie positive. La forme polaire de Q est nécessairement

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (E_n)^2 & \to & E_n \\ & (p,q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\left(1+x^2\right)\,dx \end{array}.$$

Vérifions alors que φ est un produit scalaire sur E_n.

• Soit $(p,q) \in (E_n)^2$. La fonction $x \mapsto p(x)q(x)\left(1+x^2\right)$ est continue sur le segment $[-1,1]$ et donc $\varphi(p,q)$ existe dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que φ est bien une application de $(E_n)^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(p,q) \in (E_n)^2$. $\varphi(p,q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\left(1+x^2\right)\,dx = \int_{-1}^{1} q(x)p(x)\left(1+x^2\right)\,dx = \varphi(q,p)$. Donc, φ est symétrique.

• Soient $(p_1,p_2,q) \in (E_n)^3$ puis $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda p_1 + \mu p_2, q) &= \int_{-1}^{1} (\lambda p_1(x) + \mu p_2(x))\,q(x)\left(1+x^2\right)\,dx \\ &= \lambda\int_{-1}^{1} p_1(x)q(x)\left(1+x^2\right)\,dx + \mu\int_{-1}^{1} p_2(x)q(x)\left(1+x^2\right)\,dx \\ &= \lambda\varphi(p_1,q) + \mu\varphi(p_2,q). \end{aligned}$$

Donc, φ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Par positivité de l'intégration, pour tout $p \in E_n$, $\varphi(p,p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p^2(x)\left(1+x^2\right)\, dx \geqslant 0$.

• Soit $p \in E_n$.

$$\begin{aligned}\varphi(p,p) = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1} p^2(x)\left(1+x^2\right) dx = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in [-1,1],\ p^2(x)\left(1+x^2\right) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall x \in [-1,1],\ p(x) = 0\\ &\Rightarrow p = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

On a montré que φ est un produit scalaire sur E_n et donc Q est une forme quadratique définie positive.

2. Soit $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ l'orthonormalisée de la base $(1, X, \ldots, X^n)$. Par définition de l'orthonormalisée, π_0 est un polynôme non nul colinéaire au polynôme 1 et donc π_0 est un polynôme de degré 0.

Toujours par définition de l'orthonormalisée, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\pi_k \in \text{Vect}\,(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k) = \text{Vect}\left(1, X, \ldots, X^k\right)$ et donc π_k est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. Mais si, pour un certain $k_0 \in [\![1,n]\!]$, π_{k_0} est de degré strictement inférieur à k, alors les polynômes $\pi_0, \ldots, \pi_{k_0}$, sont k_0+1 polynômes, constituant une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_{k_0-1}[X]$ qui est de dimension k_0. Ceci est impossible et donc, pour tout $k \in [\![$, π_k est de degré k.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, posons $p_k = \dfrac{1}{\text{dom}\,(\pi_k)}\pi_k$. Alors, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, p_k est un polynôme unitaire de degré k et de plus, la famille $(p_0, \ldots, p_n)$ est une famille orthogonale.

3. Soit $i \in [\![1, n-2]\!]$. $F_i = \mathbb{R}_{i-1}[X] = \text{Vect}\left(1, X, \ldots, X^{i-1}\right) = \text{Vect}\,(p_0, p_1, \ldots, p_{i-1})$.
Puisque la famille $(p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i, \ldots, p_n)$ est une base orthogonale de E_n, une base de $F_i^{\perp}$ est $(p_i, \ldots, p_n)$.

4. On note que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $p_k \in (p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})^{\perp} = \left(1, X, \ldots, X^{k-1}\right)^{\perp} = (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$. Donc, pour $k \geqslant 1$, p_k est orthogonal à tout polynôme de degré strictement plus petit que k.

Soit $i \in [\![1, n-2]\!]$. p_{i+2} et Xp_{i+1} sont deux polynômes unitaires de degré $i+2$ et donc $p_{i+2} - Xp_{i+1}$ est un polynôme de degré inférieur à $i+1$.
Pour tout $k \in [\![0, i-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\varphi\left(p_{i+2} - Xp_{i+1}, p_k\right) &= \varphi\left(p_{i+2}, p_k\right) - \varphi\left(Xp_{i+1}, p_k\right) = -\varphi\left(Xp_{i+1}, p_k\right)\\ &= -\int_{-1}^{1} p_{i+1}(x) x p_k(x)\left(1+x^2\right)\, dx\\ &= -\varphi\left(p_{i+1}, Xp_k\right)\\ &= 0 \text{ (car } \deg\left(Xp_k\right) = k+1 \leqslant (i-1)+1 = i < i+1).\end{aligned}$$

Donc, $p_{i+2} - Xp_{i+1} \in (p_0, \ldots, p_{i-1})^{\perp} = (\mathbb{R}_{i-1}[X])^{\perp}$.

Ainsi, $p_{i+2} - Xp_{i+1} \in \text{Vect}\,(p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n) \cap \text{Vect}\,(p_0, p_1, \ldots, p_i, p_{i+1}) = \text{Vect}\,(p_i, p_{i+1})$. Par suite, il existe deux réels λ et μ tels que $p_{i+2} - Xp_{i+1} = \lambda p_i + \mu p_{i+1}$.

La détermination de λ et μ est longue et ne semble donc pas attendue par l'énoncé. On peut montrer que $\mu = 0$ en constatant et en démontrant que chaque polynôme p_i a la parité de i et donc que μp_{i+1} a une parité contraire à celle de $p_{i+2} - Xp_{i+1} - \lambda p_i$. Le calcul de λ nécessite d'établir de nombreuses propriétés supplémentaires des polynômes p_i.

5. On suppose que l'énoncé demande la matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = \left(1, X, X^2\right)$ de E_2.

$\varphi(1,1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1+x^2\right)\, dx = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

$\varphi(X,X) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2+x^4\right)\, dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$.

$\varphi\left(X^2,X^2\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^4+x^6\right)\, dx = \frac{2}{5+}\frac{2}{7} = \frac{24}{35}$.

$\varphi(1,X) = \varphi(X,1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^3+x^5\right)\, dx = 0$ (car la fonction $x \mapsto x^3+x^5$ est impaire).

$\varphi(1, X^2) = \varphi\left(X^2, 1\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2 + x^4\right)\ dx = \frac{16}{15}$.

$\varphi(X, X^2) = \varphi\left(X^2, X\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^3 + x^5\right)\ dx = 0$.

Donc, $M = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & \frac{16}{15} & 0 \\ \frac{16}{15} & 0 & \frac{24}{35} \end{pmatrix} = \dfrac{8}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{9}{35} \end{pmatrix}$.

Puisque φ est un produit scalaire, M est définie, positive. M est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de M sont des réels strictement positifs et en particulier, 0 n'est pas valeur propre de M puis M est inversible.

6. On complète les calculs précédents avec

$\varphi\left(1, X^3\right) = \varphi\left(X^3, 1\right) = \varphi\left(X^2, X^3\right) = \varphi\left(X^3, X^2\right) = 0$.

$\varphi\left(X^3, X_3\right) = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^6 + x^8\right) dx = 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = \frac{32}{63}$.

$\varphi\left(X, X^3\right) = \varphi\left(X^3, X\right) = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^4 + x^6\right) dx = \frac{24}{35}$.

Donc, $M = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \frac{16}{15} & 0 \\ 0 & \frac{16}{15} & 0 & \frac{24}{35} \\ \frac{16}{15} & 0 & \frac{24}{35} & 0 \\ 0 & \frac{24}{35} & 0 & \frac{32}{63} \end{pmatrix}$. Pour les mêmes raisons, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, à valeurs propres strictement positives et en particulier, M est inversible.

Exercice 6

1. La fonction g est paire. $g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ et donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Par parité, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = 2xe^{-\frac{x^2}{2}} + \left(x^2 - 1\right)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \left(2x - x\left(x^2 - 1\right)\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(-x^3 + 3x\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

puis,

$$g''(x) = \left(-3x^2 + 3\right)e^{-\frac{x^2}{2}} + \left(-x^3 + 3x\right)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \left(-3x^2 + 3 - x\left(-x^3 + 3x\right)\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(x^4 - 6x^2 + 3\right)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pour tout réel x, $g'(x)$ est du signe de $-x^3 + 3x = -x\left(x^2 - 3\right)$. On en déduit le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	0	↗	$2e^{-3/2}$	↘	-1	↗	$2e^{-3/2}$	↘	0

Pour tout réel x, $g''(x)$ est du signe de $P(x) = x^4 - 6x^2 + 3$. Or, pour tout réel x,

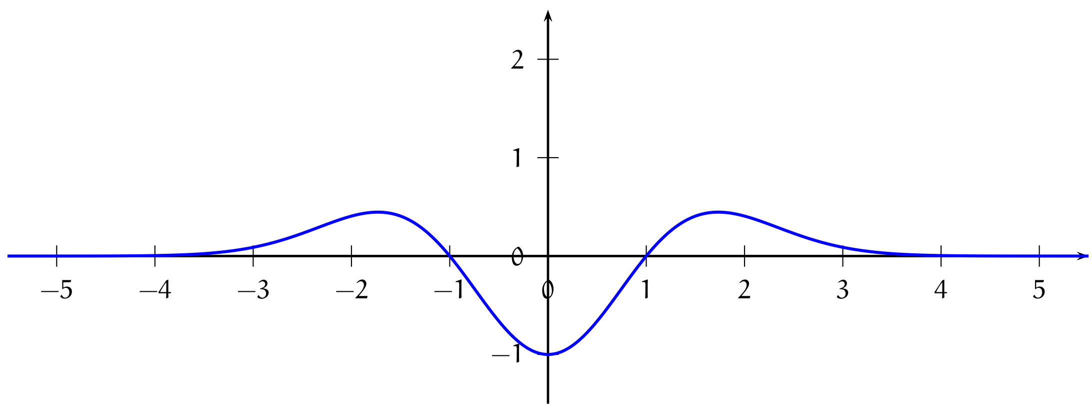
$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x^2 - 3\right)^2 - 6 = \left(x^2 - \left(3 + \sqrt{6}\right)\right)\left(x^2 - \left(3 - \sqrt{6}\right)\right) \\ &= \left(x - \sqrt{3 + \sqrt{6}}\right)\left(x + \sqrt{3 + \sqrt{6}}\right)\left(x - \sqrt{3 - \sqrt{6}}\right)\left(x + \sqrt{3 - \sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

La fonction g'' est donc positive sur $\left]-\infty, -\sqrt{3 + \sqrt{6}}\right] \cup \left[-\sqrt{3 - \sqrt{6}}, \sqrt{3 - \sqrt{6}}\right] \cup \left[\infty, -\sqrt{3 + \sqrt{6}}, +\infty\right[$ et négative sur $\left[-\sqrt{3 + \sqrt{6}}, -\sqrt{3 - \sqrt{6}}\right] \cup \left[\sqrt{3 - \sqrt{6}}, \sqrt{3 + \sqrt{6}}\right]$.

La fonction g est donc convexe sur $\left]-\infty,-\sqrt{3+\sqrt{6}}\right]$ et sur $\left[-\sqrt{3-\sqrt{6}},\sqrt{3-\sqrt{6}}\right]$ et sur $\left[\infty,-\sqrt{3+\sqrt{6}},+\infty\right[$ et est concave sur $\left[-\sqrt{3+\sqrt{6}},-\sqrt{3-\sqrt{6}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{3-\sqrt{6}},\sqrt{3+\sqrt{6}}\right]$. Enfin, la fonction g'' s'annule

en changeant de signe en exactement quatre réels, à savoir $x_1=-\sqrt{3+\sqrt{6}}$, $x_2=-\sqrt{3-\sqrt{6}}$, $x_3=\sqrt{3-\sqrt{6}}$ et $x_4=\sqrt{3+\sqrt{6}}$. La courbe représentative de g admet donc exactement quatre points d'inflexion, les points de $\mathscr{C}_g$ d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3 et x_4.

Graphe de la fonction g.



2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $u(x)=y(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ de sorte que pour tout réel x, $y(x)=u(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Puisque la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction u et pour tout réel x, $y'(x)=(u'(x)-xu(x))e^{-\frac{x^2}{2}}$ puis $y''(x)=(u''(x)-u(x)-xu'(x)-x(u'(x)-xu(x)))e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(u''(x)-2xu'(x)+\left(x^2-1\right)u(x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mais alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}y''(x)+2xy'(x)+\left(x^2+1\right)y(x)&=\left(\left(u''(x)-2xu'(x)+\left(x^2-1\right)u(x)\right)+2x(u'(x)-xu(x))+\left(x^2+1\right)u(x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\\&=u''(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

Par suite,

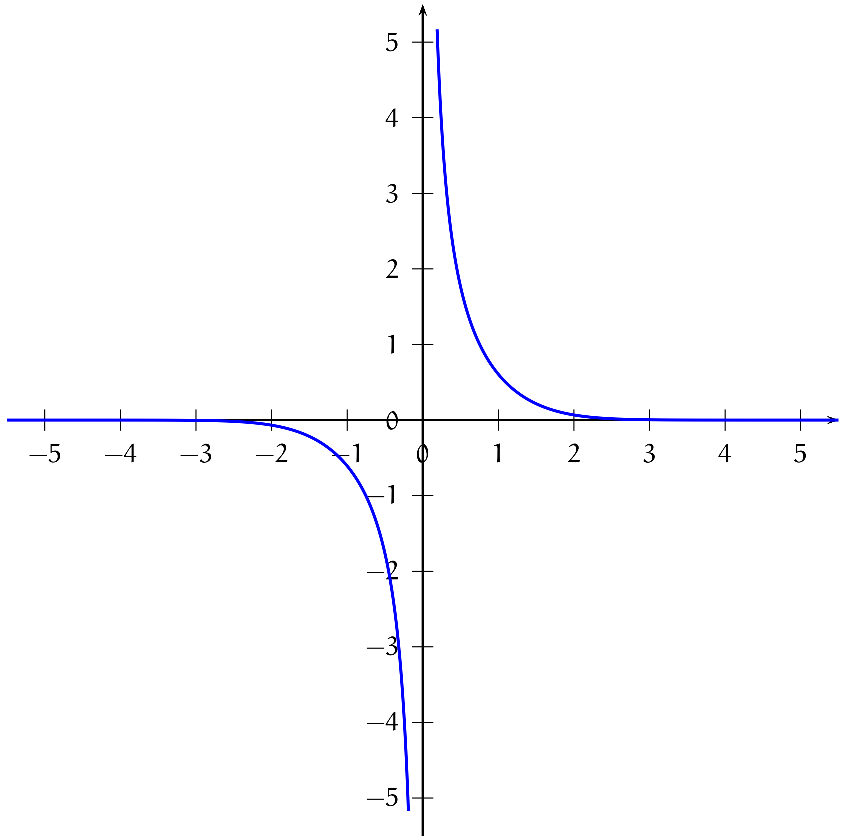
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)+2xy'(x)+\left(x^2+1\right)y(x)=0&\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ u''(x)=0\\&\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ u(x)=ax+b\\&\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=(ax+b)e^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto(ax+b)e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

3. Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Soit $b\in\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'_{a,b}(x)=(a-x(ax+b))e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(-ax^2-bx+a\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction $f'_{a,b}$ est du signe du trinôme $x\mapsto-ax^2-bx+a$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta=b^2+4a^2>0$. Ce trinôme admet deux racines réelles distinctes (explicitement, $x_1=-\dfrac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2+4a^2}\right)=\dfrac{b}{2a}-\dfrac{1}{2a}\sqrt{b^2+4a^2}$ et $x_2=\dfrac{b}{2a}+\dfrac{1}{2a}\sqrt{b^2+4a^2}$). En ces deux réels, la fonction $f'_{a,b}$ s'annule en changeant de signe et donc en ces deux points, la fonction $f_{a,b}$ admet un extremum.

Les points correspondants sont les points A_1 et A_2 de coordonnées respectives $(x_1,f_{a,b}(x_1))$ et $(x_2,f_{a,b}(x_2))$. Quand $a\neq0$, $f'_{a,b}(0)=a\neq0$ et donc $x_1\neq0$ et $x_2\neq0$.
En chacun des deux réels x_i, $i\in\{1,2\}$, on a $f'_{a,b}(x_i)=0$ puis $a-x_i(ax_i+b)=0$ puis $ax_i+b=\dfrac{a}{x_i}$ et donc $f_{a,b}(x_i)=\dfrac{a}{x_i}e^{-\frac{x_i^2}{2}}$. Par suite, pour $i\in\{1,2\}$, les coordonnées du point A_i s'écrivent encore $\left(x_i,\dfrac{a}{x_i}e^{-\frac{x_i^2}{2}}\right)$. Les points A_1 et A_2 appartiennent donc à la courbe M_a d'équation $y=\dfrac{a}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

En particulier, la courbe M_1 est la courbe d'équation $y=\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$. La fonction $g_1\ :\ x\mapsto\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions strictement positives et strictement décroissantes sur $]0,+\infty[$, tend vers $+\infty$ en 0 à droite et tend vers 0 en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Voici son graphe (c'est-à-dire la courbe M_1) :



Soit alors a un réel non nul différent de 1. M_a est la courbe d'équation $y = a\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$, représentative de la fonction $g_a \ :\ x \mapsto a\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$. On note δ la dilatation orthogonale d'axe (Ox) et de rapport a (δ n'est pas une homothétie). L'expression analytique de δ s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x' = x \\ y' = ay \end{array}\right.$.

Soient $A(x,y)$ un point du plan puis $A'(x',y')$ son image par δ.

$$A \in M_1 \Leftrightarrow y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{a} = \frac{e^{-\frac{x'^2}{2}}}{x'} \Leftrightarrow y' = a\frac{e^{-\frac{x'^2}{2}}}{x'} \Leftrightarrow \delta(A) \in M_a.$$

La courbe M_a est donc l'image de la courbe M_1 par la dilatation δ.

4. En remarquant que $f_{-a,-b} = -f_{a,b}$, on peut sans perte de généralité supposer que $a > 0$, ce que l'on fait dorénavant. $f'_{a,b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''_{a,b}(x) = \left(-x\left(-ax^2 - bx + a\right) + (-2ax - b)\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(ax^3 + bx^2 - 3ax - b\right)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f''_{a,b}$ est du signe de la fonction $P_{a,b}\ :\ x \mapsto ax^3 + bx^2 - 3ax - b$. Maintenant, $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{a,b}(x) = -\infty$, $P_{a,b}(-1) = 2a > 0$, $P_{a,b}(1) = -2a < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{a,b}(x) = +\infty > 0$. Puisque la fonction $P_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction $P_{a,b}$ s'annule au moins une une fois dans $]-\infty,-1[$ en un réel x_1, au moins une fois dans $]-1,1[$ en un réel x_2 et au moins une fois dans $]1,+\infty[$ en un réel x_3. Puisque $P_{a,b}$ est de degré 3, $P_{a,b}$ admet exactement trois racines réelles (simples), les nombres x_1, x_2 et x_3. La fonction $P_{a,b}$ s'annule en changeant de signe en ces trois réels et seulement en ces trois réels. Il en est de même de la fonction $f''_{a,b}$ et on a montré que la courbe représentative de la fonction $f_{a,b}$ admet exactement trois points d'inflexion.

5. Soit $a \neq 0$. Pour $b \in \mathbb{R}$, notons $A_i\left(x_i, f_{a,b}\left(x_i\right)\right)$, $i \in \{1,2,3\}$, les trois points d'inflexion de $C_{a,b}$. Pour $i \in \{1,2,3\}$, l'égalité $f''_{a,b}\left(x_i\right) = 0$ s'écrit

$$0 = ax_i^3 + bx_i^2 - 3ax_i - b = x_i^2\left(ax_i + b\right) - \left(ax_i + b\right) - 2ax_i = \left(x_i^2 - 1\right)\left(ax_{x_i} + b\right) - 2ax_i$$

On ne peut avoir $x_i = 1$ car alors $0 = a + b - 3a - b = -2a$ ce qui est faux. Donc, $x_i \neq 1$ et de même $x_i \neq -1$. Mais alors, on peut écrire $ax_i + b = \dfrac{2ax_i}{x_i^2 - 1}$ puis $f_{a,b}(x_i) = a\dfrac{2x_i}{x_i^2 - 1}e^{-\frac{x_i^2}{2}}$.

Les trois points d'inflexion de la courbe $C_{a,b}$ appartiennent à la courbe I_a d'équation $y = a\dfrac{2x}{x^2 - 1}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Comme à la question précédente, la courbe I_a se déduit de la courbe I_1 par la dilation orthogonale d'axe (Ox) et de rapport a. Voici la courbe I_1 :