ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est à dire des fonctions φ telles qu'il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x-y|$$

Le but du problème est de chercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x) \qquad (\star)$$

où $f \in \mathcal{L}$ est une fonction donnée et λ et a sont deux réels non nuls.

Partie I

1. Soit $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ F(x) &= \lambda^{-n} F(x-na) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka) \end{aligned}$$

2. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que $f \in \mathcal{L}$ si et seulement si sa dérivée f' est bornée.
4. Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$. Montrer que le produit $f.g$ appartient à $\mathcal{L}$. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est plus le cas si f et g ne sont pas toutes les deux bornées.
5. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq A|x| + B$$
6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$
Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente.
   En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et que F est donnée par
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$$
   (b) Déterminer F dans les cas suivants :
$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$
2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$ est absolument convergente. En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifant $(\star)$ et que F est donnée par
$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$$

Partie III

1. On suppose que $\lambda = 1$.
   (a) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$, il faut que f soit bornée.
   (b) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x+a) = 0$$
   Cette fonction est-elle unique ?

2. On suppose que $\lambda = -1$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0$$

   Cette fonction est-elle unique ?

   (b) On suppose que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de dérivée f' croissante.

      i. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$ converge.

      ii. Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$ et de limite nulle en $+\infty$.

2 Problème 2

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc .}$$

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

Soit f un endomorphisme de E.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f.
2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

(b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.

(c) Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.

i. Si $F_1, \dots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

ii. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \dots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme

$$\sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k \mathbf{id}_E)^{n_k}$$

est stable par f.

3. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \mathbf{id}_E$.

(b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

(c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

(d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

(e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.

4. (a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E.

(b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \ker \varphi$.

i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

ii. On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.

Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :

$${}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL.$$

iii. Déterminer (en en donnant une base) les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

Partie II

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_1, \dots, E_p$ les sous- espaces propres correspondants.

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?
2. On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F.
   (a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ vérifiant l'égalité :
   $$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$
   (b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k$ appartient à F.
   (c) Montrer que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont tous dans F.
3. Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.
4. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur F est un endomorphisme diagonalisable de F.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f. Quel est alors ce nombre ?

Partie III

1. On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n, c'est à dire vérifiant les conditions :
   $$f^n = \mathbf{0} \text{ et } f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$
   (a) Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ vaut 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon.
   (b) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

2. Dans cette question on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \mathbf{0}$.

   (a) On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant $F_2 \cap \ker f = \{\mathbf{0}_E\}$. Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \ker f$.

   (b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

   (c) Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E, montrer l'inclusion suivante :

   $$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

   A-t-on nécessairement l'égalité ?

   (d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \ker f$.

   (e) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F. Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \ker f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \ker f$ est réduite au vecteur nul.