SESSION 2018

CAPESA
ISE Option mathématiques

PREMIERE COMPOSITION

Problème n° 1

Partie I

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \left(F(x+ka) - \lambda F(x+(k+1)a)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\lambda^k F(x+ka) - \lambda^{k+1} F(x+(k+1)a)\right)\\ &= F(x) - \lambda^n F(x+na) \text{ (somme télescopique)},\end{aligned}$$

et donc, $F(x) = \lambda^n F(x+na) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)$. On a montré que si F est éventuelle solution de $(\star)$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka).$$

De même,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} \left(F(x-ka) - \lambda F(x-(k-1)a)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda^{-k} F(x-ka) - \lambda^{-(k-1)} F(x-(k-1)a)\right)\\ &= \lambda^{-n} F(x-na) - F(x) \text{ (somme télescopique)},\end{aligned}$$

et donc $F(x) = \lambda^n F(x+na) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka)$. On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(x) = \lambda^n F(x+na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka).$$

2. La fonction nulle est dans $\mathcal{L}$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant 0|x-y|$.

Soient $(f,g) \in \mathcal{L}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe deux réels positifs K_f et K_g tels que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant K_f|x-y|$ et $|g(x) - g(y)| \leqslant K_g|x-y|$. Mais alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|(\lambda f+\mu g)(x) - (\lambda f+\mu g)(y)| &= |\lambda(f(x)-f(y)) + \mu(g(x)-g(y))| \leqslant |\lambda||f(x)-f(y)| + |\mu||g(x)-g(y)|\\ &\leqslant \left(|\lambda|K_f + |\mu|K_g\right)|x-y|,\end{aligned}$$

et donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}$. On a montré que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Supposons que $f \in \mathcal{L}$. Il existe un réel positif K_f tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K_f|x-y|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x distinct de x_0, $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant K_f$. Quand x tend vers x_0, on obtient $|f'(x_0)| \leqslant K_f$. Ceci montre que $\|f'\|_\infty \leqslant K_f$ et donc que la fonction f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

• Supposons la fonction f' bornée sur $\mathbb{R}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\|_\infty |x-y|$. La fonction f est $\|f'\|_\infty$-lipschitzienne et donc $f \in \mathcal{L}$.

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on a montré que f est dans $\mathcal{L}$ si et seulement si la fonction f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}$, bornées sur $\mathbb{R}$. Il existe deux réels positifs K_f et K_g tels que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K_f[x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leqslant K_g|x - y|$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |g(x)(f(x) - f(y)) + f(y)(g(x) - g(y))| \leqslant |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \\ &\leqslant (\|g\|_\infty K_f + \|f\|_\infty K_g)\, |x - y|.\end{aligned}$$

Par suite, $f \times g \in \mathcal{L}$.

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = g(x) = x$, f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}$. Mais la fonction $f \times g \;:\; x \mapsto x^2$ n'est pas dans $\mathcal{L}$ car sa dérivée, à savoir la fonction $x \mapsto 2x$, n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ (si on veut un contre-exemple où une des deux fonctions est bornée, on peut prendre $f \;:\; x \mapsto x$ et $g \;:\; x \mapsto \sin(x)$).

5. Soit $f \in \mathcal{L}$. Soit K_f une constante de Lipschitz associée à f. Pour tout réel x,

$$|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant K_f|x - 0| + |f(0)| = K_f|f(x)| + |f(0)|.$$

Les réels $A = K_f$ et $B = |f(0)|$ conviennent.

6. Soient x et y deux réels où la notation a été effectuée de sorte que $x \leqslant y$. Si $0 \leqslant y - x < 1$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. On suppose maintenant $y - x \geqslant 1$.
Soit $n = \lfloor y - x \rfloor$ la partie entière du réel $y - x$. n est un entier naturel non nul tel que $n \leqslant y - x < n + 1$ ou encore $x + n \leqslant y < (x + n) + 1$. On obtient, en tenant compte de $0 \leqslant y - (x + n) \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(x + n) + f(x + n) - \ldots - f(x + 1) + f(x + 1) - f(x)| \\ &\leqslant |f(y) - f(x + n)| + |f(x + n) - f(x + (n - 1))| + \ldots + |f(x + 1) - f(x)| \\ &\leqslant M\left(|y - (x + n)| + |(x + n) - (x + (n - 1)| + \ldots |(x + 1) - x|\right) = M(y - (x + n) + n) \\ &= M|x - y|.\end{aligned}$$

Puisque le réel M ne dépend pas de x ou y, ceci montre que $f \in \mathcal{L}$.

Partie II

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. f est un élément de $\mathcal{L}$. D'après la question 5), il existe deux réels positifs A et B tels que, pour tout réel t, $|f(t)| \leqslant A|t| + B$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda^n f(x + na)| = |\lambda|^n |f(x + na)| \leqslant |\lambda|^n (A|x + na| + B).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $n^2|\lambda|^n(A|x+na|+B) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et donc $|\lambda|^n(A|x+na|+B) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série numérique de terme général $\lambda^n f(x+na)$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier converge.

Soit F un éventuel élément de $\mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$. D'après la question I-1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(x) = \lambda^n F(x+na) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)$.

Puisque F est dans $\mathcal{L}$, le travail du début de cette question appliqué à F montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda^n F(x + na) = 0$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k f(x + ka).$$

Ceci montre l'unicité d'un élément de $\mathcal{L}$ vérifiant $(*)$ (car F est nécessairement la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$. F est définie sur $\mathbb{R}$ d'après le début de la question. Ensuite, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}F(x) - \lambda F(x + a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f(x + (n + 1)a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Donc, la fonction F vérifie $(\star)$.

Enfin, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (f(x+na) - f(y+na))\right| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n |f(x+na) - f(y+na)| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n \times K_f |(x+na) - (y+na)| = \frac{K_f}{1-|\lambda|}|x-y|.\end{aligned}$$

La fonction F est donc un élément de $\mathcal{L}$ et on a donc montré l'existence d'un élément de $\mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$.

En résumé, si $|\lambda| < 1$, on a montré qu'il existe un élément de $\mathcal{L}$ et un seul vérifiant $(\star)$, à savoir $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$.

b) Les trois fonctions considérées sont dans $\mathcal{L}$ (il est connu que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|$ et donc aussi $|\cos(x) - \cos(y)| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant |x - y|$).

• Calcul de F_1. Pour tout réel x, $F_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$.

• Calcul de F_2 et F_3. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}F_2(x) + iF_3(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (\cos(x+na) + i\sin(x+na)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{i(x+na)} = e^{ix} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lambda e^{ia}\right)^n \\ &= \frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}} \text{ (car } \left|\lambda e^{ia}\right| = |\lambda| < 1) \\ &= \frac{e^{ix}\left(1-\lambda e^{-ia}\right)}{\left(1-\lambda e^{ia}\right)\left(1-\lambda e^{-ia}\right)} = \frac{e^{ix} - \lambda e^{i(x-a)}}{\lambda^2 - \lambda\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) + 1} \\ &= \frac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{\lambda^2 - 2\lambda\cos(a) + 1} + i\frac{\sin(x) - \lambda\sin(x-a)}{\lambda^2 - 2\lambda\cos(a) + 1}.\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_2(x) = \frac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{\lambda^2 - 2\lambda\cos(a) + 1} \text{ et } F_3(x) = \frac{\sin(x) - \lambda\sin(x-a)}{\lambda^2 - 2\lambda\cos(a) + 1}.$$

2. Si $\lambda > 1$, alors $\left|\frac{1}{\lambda}\right| < 1$.

L'équation $(\star)$ s'écrit successivement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)$ puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x+a) - \frac{1}{\lambda}F(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x)$ et enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \frac{1}{\lambda}F(x-a) = -\frac{1}{\lambda}f(x-a).$$

La fonction $g : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}f(x-a)$ est aussi un élément de $\mathcal{L}$ et donc la question II-1)a), appliquée à la fonction $g \in \mathcal{L}$, au réel $\lambda' = \frac{1}{\lambda} \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ et au réel $a' = -a \neq 0$ montre l'existence et l'unicité d'un élément de F de $\mathcal{L}$ vérifiant $(\star)$. De plus, pour tout réel x,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^n} g(x+na') = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} f(x-(n+1)a) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na).$$

Partie III

1. a) Soient f un élément de $\mathcal{L}$ puis F une éventuelle solution de $(\star)$ dans $\mathcal{L}$. Alors, pour tout réel x,

$$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leqslant K_f|a|.$$

Ceci montre que f est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$ (dans le cas contraire, $(\star)$ n'a pas de solution dans $\mathcal{L}$).

b) Pour tout réel x, posons $F(x) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right)$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|F(x) - F(y)| \leqslant \dfrac{2\pi}{a}|x-y|$ car $\|F'\|_\infty = \dfrac{2\pi}{a}$) et donc F est dans $\mathcal{L}$. De plus, pour tout réel x,

$$F(x) - F(x+a) = \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{a}(x+a)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{a}x + 2\pi\right) = 0.$$

La fonction F convient. Cette fonction n'est pas unique car la fonction $G \;:\; x \mapsto \cos\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right)$ est une autre solution $(G(0) = 1 \neq 0 = F(0))$.

2. a) Les fonctions $x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)$ sont deux éléments de $\mathcal{L}$, distincts et solutions de $(\star)$. Il y a donc existence mais pas unicité d'une solution de $(\star)$ dans $\mathcal{L}$.

b) Puisque la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $+\infty$, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

i. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^n f(x+n)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir la suite $(f(x+n))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, de limite nulle. D'après le critère spécial aux séries alternées, la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

ii. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$. La fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F(x) + F(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} f(x+n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n) - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(x+n) = f(x).\end{aligned}$$

La fonction F est donc une solution de $(\star)$ (avec $\lambda = -1$ et $a = 1$) sur $\mathbb{R}$. Ensuite, la somme d'une série alternée est du signe de son premier et sa valeur absolue est majorée par la valeur absolue de son premier terme. Donc, pour tout réel x, $0 \leqslant F(x) \leqslant f(x)$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Vérifions maintenant que F est un élément de $\mathcal{L}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$. $F(x) - F(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(f(x+n) - f(y+n))$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, par décroissance de la fonction f sur $\mathbb{R}$, $f(x+n) - f(y+n) \leqslant 0$. Ensuite, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c = c_{x,y,n} \in [x+n, y+n]$ tel que $(f(x+n) - f(y+n)) = (x-y)f'(c)$. Puisque la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}$, $f'(c) \geqslant f'(x+n)$ puis

$$f(x+n) - f(y+n) \leqslant (x-y)f'(x+n).$$

De même, $f(x+n+1) - f(y+n+1) \geqslant (x-y)f'(y+n+1)$. Toujours par décroissance de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, $f'(x+n) \geqslant f'(y+n+1)$ puis $(x-y)f'(x+n) \leqslant (x-y)f'(x+n+1)$ et finalement $f(x+n) - f(y+n) \leqslant f(x+n+1) - f(y+n+1)$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N},\; f(x+n) - f(y+n) \leqslant f(x+n+1) - f(y+n+1) \leqslant 0.$$

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x+n) - f(y+n)| \geqslant |f(x+n+1) - f(y+n+1)|$. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x+n) - f(y+n)) = 0 - 0 = 0$. Ainsi, la suite $((-1)^n(f(x+n) - f(y+n)))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^n(f(x+n) - f(y+n))$, $n \in \mathbb{N}$, est donc une série alternée. On en déduit que

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \left|(-1)^0(f(x+0) - f(y+0))\right| = |f(x) - f(y)| \leqslant K_f|x-y|.$$

La fonction F est donc un élément de $\mathcal{L}$. En résumé, F est un élément de $\mathcal{L}$, de limite nulle en $+\infty$ et solution de $(\star)$.

Vérifions maintenant l'unicité de F. Soit G un élément de $\mathcal{L}$, de limite nulle en $+\infty$ et solution de $(\star)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1-1) (appliqué avec $\lambda = -1$ et $a = 1$), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$G(x) = (-1)^n G(x+n) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f(x+k).$$

Maintenant, $|(-1)^n G(x+n)| = |G(x+n)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f(x+k) = F(x)$. On a montré que $G = F$ et donc, on a montré l'unicité de la fonction F.

Il existe une solution et une seule de $(\star)$ qui est un élément de $\mathcal{L}$ et qui a pour limite 0 en $+\infty$.

Problème n° 2

Partie I

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(f))$. Donc, $P(f)(x) = 0$. Mais alors,

$$P(f)(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x) = f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x)\right) = f(0) = 0$$

et donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(P(f))$. On a montré que pour tout $x \in E$, $(x \in \mathrm{Ker}(P(f)) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(P(f)))$ et donc $\mathrm{Ker}(P(f))$ est stable par f.

2. a) Soit D une droite stable par f. Posons $D = \mathrm{Vect}(x)$ où x est un vecteur non nul. $f(x) \in D = \mathrm{Vect}(x)$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Puisque x est non nul, x est un vecteur propre de f.

Inversement, soit x un vecteur propre de f, associé à une certaine valeur propre λ de f. x est un vecteur non nul et donc $D = \mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle. Soit $y \in D$. Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y = \mu x$. Mais alors, $f(y) = \mu f(x) = \lambda\mu x \in D$. Ceci montre que D est stable par f.

En résumé, les droites stables par un endomorphisme f sont exactement les droites engendrées par un vecteur propre de f.

b) $\mathrm{Sp}(g) = (1, 1, 2)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2 est la droite vectorielle $E_2(g) = \mathrm{Vect}(e_3)$. Le sous-espace propre $E_1(g)$ associé à la valeur propre double 1 est de dimension $3 - \mathrm{rg}(g - \mathrm{Id}_E) = 3 - 2 = 1$. Puisque $g(e_1) = e_1$ et que $e_1 \neq 0$, $E_1(g) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

Les droites stables par g sont $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_3)$.

c) i. Soit $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$. Il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_p$. Mais alors, $f(x) = f(x_1) + \ldots + f(x_p) \in \sum_{i=1}^{p} F_i$ car, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(x_i) \in F_i$.

On a montré qu'une somme de sous-espaces stables par f est un sous-espace stable par f.

ii. Chaque noyau $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}\right)$ est stable par f d'après la question 1) et donc $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}\right)$ est stable par f d'après la question précédente.

3. a) Soient F un sous-espace de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si F est stable par f, pour tout $x \in F$, $(f - \lambda\mathrm{Id}_E)(x) = f(x) - \lambda x \in F$ et donc F est stable par $f - \lambda\mathrm{Id}_E$.
Inversement, si F est stable par $f - \lambda\mathrm{Id}_E$, en appliquant le résultat précédent à $f' = f - \lambda\mathrm{Id}_E$ et $\lambda' = -\lambda$, on obtient F est stable $f' - \lambda'\mathrm{Id}_E = f$.

En résumé, F est stable par f si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, F est stable par $f - \lambda\mathrm{Id}_E$.

b) Soit F un sous-espace stable par f. Alors, pour tout $x \in F$, $f^2(x) = f(f(x)) \in F$ et donc F est stable par f^2. Ainsi, tout sous-espace stable par f est stable par f^2. La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple d'une symétrie s distincte de Id_E et $-\mathrm{Id}_E$: tout sous-espace est stable par $s^2 = \mathrm{Id}_E$ mais pas tout sous-espace est stable par s.

c) Soit $f \in GL(E)$. Soit F un sous-espace de E stable par f. Donc, $f(F) \subset F$ et d'autre part, puisque f est un automorphisme, $\dim(f(F)) = \dim(F) < +\infty$. On en déduit que $f(F) = F$. Soit alors $x \in F$. Il existe $y \in F$ tel que $x = f(y)$ et donc $f^{-1}(x) = f^{-1}(f(y)) = y \in F$. Ceci montre que F est stable par f^{-1}.

En appliquant le résultat précédent à l'automorphisme f^{-1}, on obtient le fait que si F est un sous-espace stable par f^{-1}, alors F est stable par $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

On a montré que pour tout sous-espace F, F est stable par f si et seulement si F est stable par f^{-1}.

d) Soit f un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E.

Si $n = 1$, tout sous-espace de E à savoir $\{0\}$ et E est stable par tout endomorphisme. D'autre part, tout endomorphisme de E est une homothétie. Dorénavant, $n \geqslant 2$.

Soit f un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la droite $\text{Vect}\,(e_k)$ est stable par f et donc il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $f\,(e_k) = \lambda_k e_k$.
Soit $k \in [\![2, n]\!]$, $f\,(e_1 + e_k) = f\,(e_1) + f\,(e_k) = \lambda_1 e_1 + \lambda_k e_k$. Mais d'autre part, la droite $\text{Vect}\,(e_1 + e_k)$ est stable par f et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f\,(e_1 + e_k) = \lambda\,(e_1 + e_k)$. Puisque la famille (e_1, e_k) est libre, l'égalité $\lambda_1 e_1 + \lambda_k e_k = \lambda e_1 + \lambda e_k$ permet d'affirmer que $\lambda_k = \lambda = \lambda_1$.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f\,(e_k) = \lambda e_k$. Mais alors, les deux endomorphismes f et $\lambda \mathrm{Id}_E$ coïncident sur une base de E et donc ces deux endomorphismes sont égaux.

On a montré qu'un endomorphisme laissant stable tout sous-espace de E est une homothétie. Inversement, une homothétie laisse stable tout sous-espace de E et donc les endomorphismes de E laissant stable tout sous-espace de E sont les homothéties.

e) Les sous-espaces non triviaux de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique et de son orientation canonique. La rotation r d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ n'admet pas de vecteur propre et donc pas de droite stable. r est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$.

4. a) On suppose $n \geqslant 2$.

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Puisque $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1, on a $\text{Im}(\varphi) = \{0\}$ ou $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ puisque φ n'est pas nulle. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi) = n - 1$. $\text{Ker}(\varphi)$ est donc un hyperplan de E.

Inversement, soit H un hyperplan de E. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H que l'on complète en $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ base de E. Soit φ la forme linéaire sur E définie par les égalités : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi\,(e_k) = 0$ et $\varphi\,(e_n) = 1$. Puisque $\varphi\,(e_n) \neq 0$, φ est une forme linéaire non nulle sur E.
Puisque φ s'annule sur une base de H, φ s'annule sur H et donc $H \subset \text{Ker}(\varphi)$. Mais d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - \text{rg}(\varphi) = n - 1 = \dim(H) < +\infty$ et on en déduit que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Ceci montre que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

On a montré que les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles sur E.

b) i. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. Vérifions que H est stable par f. Soit $x \in H$. Alors, $\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x) = 0$. Donc, $f(x) \in \text{Ker}(\varphi) = H$. Ceci montre que H est stable par f.

Supposons que H est stable par f. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H que l'on complète en $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ base de E. Puisque $e_n \notin H$, $\varphi\,(e_n) \neq 0$ et on peut donc poser $\lambda = \dfrac{\varphi\,(f\,(e_n))}{\varphi\,(e_n)}$.
Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi\,(f\,(e_k)) = 0 = \lambda\varphi\,(e_k)$ (car $f\,(e_k) \in H$) et d'autre part, $\varphi\,(f\,(e_n)) = \lambda\varphi\,(e_n)$. Mais alors, les deux applications linéaires $\varphi \circ f$ et $\lambda\varphi$ coïncident sur une base de E et donc $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

On a montré que H est stable par f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda f$.

ii. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi \circ f = \lambda\varphi \Leftrightarrow L \times A = \lambda L \Leftrightarrow {}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL.$$

Donc, H est stable par f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL$.

iii. φ est non nulle et donc L est un vecteur ligne non nul. La question précédente montre que H est stable par f si et seulement si le vecteur colonne ${}^tL$ est un vecteur propre de la matrice ${}^tB$.

Le spectre de ${}^tB$ est le même que celui de B à savoir $(1, 1, 2)$. Le sous-espace propre de ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1 est $\text{Vect}(U_1)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre de ${}^tB$ associé à la valeur propre 2 est $\text{Vect}(U_2)$ où $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs lignes solutions du problème sont les vecteurs de la forme $L = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. Les plans stables par g sont donc les plans d'équations respectives $y = 0$ et $z = 0$ ou encore les plans $\text{Vect}(e_1, e_3)$ et $\text{Vect}(e_1, e_2)$ (où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Partie II

1. Dans le cas où $p = 1$, f admet une et une seule valeur propre que l'on note λ. Puisque f est diagonalisable, il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f, tous associés à la valeur propre λ. Les endomorphismes f et λId_E coïncident donc sur une base de E puis $f = \lambda \text{Id}_E$. Mais alors, tout sous-espace de E est stable par f.

2. a) Puisque f est diagonalisable, on sait que $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$. Donc, pour tout $x \in E$, il existe un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \displaystyle\prod_{k=1}^{p} E_k$ et un seul tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k$.

b) $\lambda_1 x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_1 x_k$ est dans F. Puisque F est stable par f, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f(x_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$ est aussi dans F. Mais alors, $\displaystyle\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k = f(x) - \lambda_1 x$ est dans F.

c) Si $p = 2$, l'égalité précédente s'écrit $(\lambda_2 - \lambda_1) x_2 \in F$ puis $x_2 \in F$ car $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ puis $x_1 = x - x_2 \in F$. Dorénavant $p \geqslant 3$.

Montrons par récurrence (finie) que pour tout $k \in [\![2, p]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=k}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{i-1}) x_i \in F$.

- Le résultat est vrai quand $k = 2$ d'après la question précédente.
- Soit $k \in [\![2, p-1]\!]$. Supposons que $\displaystyle\sum_{i=k}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) x_i \in F$.

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=k}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) x_i\right) &- \lambda_k \sum_{i=k}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) x_i \\
&= \sum_{i=k}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) \lambda_i x_i - \sum_{i=k}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) \lambda_k x_i \\
&= \sum_{i=k}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) (\lambda_i - \lambda_k) x_i \\
&= \sum_{i=k+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) (\lambda_i - \lambda_k) x_i.
\end{aligned}$$

  et donc $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{k-1}) (\lambda_i - \lambda_k) x_i \in F$.

Le résultat est démontré par récurrence. En particulier, quand $k = p$, on obtient $(\lambda_p - \lambda_1) \dots (\lambda_p - \lambda_{p-1}) x_p \in F$ puis $x_p \in F$ car $(\lambda_p - \lambda_1) \dots (\lambda_p - \lambda_{p-1}) \neq 0$.

Mais alors, par récurrence descendante, x_p, x_{p-1}, ..., x_1 sont dans F.

3. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, soit F_k un sous-espace de E_k puis soit $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$. Pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_p) \in \displaystyle\prod_{k=1}^{p} F_k$

tel que $x = x_1 + \ldots + x_p$. Mais alors, $f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in \sum_{k=1}^{p} F_k = F$. Donc, F est stable par f.

Inversement, soit F un sous-espace stable par f. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, posons $F_k = F \cap E_k$ et montrons que $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$.

Puisque pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $F_k \subset F$, on a encore $\sum_{k=1}^{p} F_k \subset F$. Inversement, soit $x \in F$. x s'écrit (de manière unique) sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ où pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $x_k \in E_k$. La question précédente montre que chaque x_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, est dans F et donc chaque x_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, est dans F_k. Par suite $x \in \sum_{k=1}^{p} F_k$. Ceci montre que $F \subset \sum_{k=1}^{p} F_k$ et finalement que $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$.

On a montré que les sous-espaces de E stables par f sont les sous-espaces de le forme $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$ où pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, F_k est un sous-espace de E_k.

4. Puisque F est stable par f, f induit un endomorphisme f_F de F. Puisque f est diagonalisable, il existe un polynôme non nul P, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, tel que $P(f) = 0$. Mais alors, $P(f_F) = 0$ et donc f_F est diagonalisable.

5. Un espace de dimension supérieure ou égale à 2 admet une infinité de sous-espaces de dimension 1 deux à deux distincts. Donc, si F est un sous-espace propre de f de dimension supérieure ou égale à 2, tout droite contenue dans F étant stable par f d'après la question précédente, f admet une infinité de sous-espaces stables deux à deux distincts.

Ainsi, si f admet un nombre fini de sous-espaces stables, il est nécessaire que chaque sous-espace propre soit de dimension 1. Puisque f est diagonalisable, ceci impose que les valeurs propres de f soient simples. Mais alors, f admet n valeurs propres simples puis $p = n$.

Réciproquement, soit F un endomorphisme de E admettant n valeurs propres simples. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, E_k est une droite vectorielle et donc E_k admet exactement deux sous-espaces à savoir $\{0\}$ et E_k. D'après la question II-3), les sous-espaces stables par f sont les sous-espaces de la forme $\sum_{k=1}^{n} F_k$ où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F_k = \{0\}$ ou $F_k = E_k$. Il y a 2^n tels sous-espaces deux à deux distincts et en particulier un nombre fini de tels sous-espaces.

Partie III

1. a) Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $e_k = f^{n-k}(x_0)$ (en particulier, $e_1 = f^{n-1}(x_0)$). Déjà, $f(e_1) = f^n(x_0) = 0$ puis pour $k \in [\![2, n]\!]$, $f(e_k) = f^{n-k+1}(x_0) = f^{n-(k-1)}(x_0) = e_{k-1}$.

Vérifions que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Puisque $\operatorname{card}(e_1, \ldots, e_n) = n = \dim(E) < +\infty$, il suffit de vérifier que cette famille est libre. Supposons par l'absurde cette famille liée. Il existe donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$.

Soit $k = \operatorname{Max}\{i \in [\![1, n]\!] / \alpha_i \neq 0\}$. Par définition de k, $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k = 0$ ou encore $\alpha_1 f^{n-1} + \ldots + \alpha_k f^{n-k}(x_0) = 0$. En prenant l'image des deux membres par f^{k-1} (et en tenant compte de $f^i = 0$ pour $i \geqslant n$), on obtient $\alpha_k f^{n-1}(x_0) = 0$. Ceci contredit le fait que $\alpha_k \neq 0$ et $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Donc, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre puis la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Dans cette base, la matrice de f a la forme voulue.

b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $F_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ (donc $F_n = E$). $f(F_1) = \operatorname{Vect}(f(e_1)) = \{0\} \subset F_1$ puis, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $f(F_k) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_k)) = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1}) \subset F$. On pose encore $F_0 = \{0\}$. Les sous-espaces F_k, $k \in [\![0, n]\!]$, sont stables par f.

On note que $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$ et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim(F_k) = k$.

Réciproquement, soit F un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$ stable par f. Montrons que F est l'un des F_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.
$\mathscr{E} = \{i \in [\![1, n]\!] / F \subset F_i\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $n \in \mathscr{E}$). $\mathscr{E}$ admet donc un plus petit élément que l'on note k.
Vérifions que $F = F_k$. Par définition, k est un élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $F \subset F_k$.
Si $k = 1$, $\{0\} \underset{\neq}{\subset} F \subset F_1 = \operatorname{Vect}(e_1)$ et donc $F = F_1$. Sinon, $k \geqslant 2$ puis $F \subset F_k$ et $F \not\subset F_{k-1}$. Il existe alors un vecteur u de F et donc de F_k qui n'est pas dans F_{k-1}. Posons $u = u_1 e_1 + \ldots + u_k e_k$ avec $u_k \neq 0$.

Puisque F est stable par f, les vecteurs $f^{k-1}(u) = u_k e_1$, $f^{k-2}(u) = u_{k-1}e_1 + u_k e_2$, $\dots$, $f(u) = u_2 e_1 + \dots + u_k e_{k-1}$ et $u = u_1 e_1 + \dots + u_k e_k$ sont dans F. Mais alors, le vecteur $e_1 = \dfrac{1}{u_k} f^{k-1}(u)$ est dans F, puis $e_2 = \dfrac{1}{u_k}\left(f^{k-2}(u) - u_{k-1}e_1\right)$ est dans F puis, par récurrence, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $e_i \in F$. Mais alors, $F_k = \text{Vect}\,(e_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \subset F$ et finalement, $F = F_k$.

Les sous-espaces stables par f sont les F_k, $k \in [\![0, n]\!]$, où $F_0 = \{0\}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F_k = \text{Vect}\,(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

2. a) Pour tout $x \in F_2$, $f(f(x)) = f^2(x) = 0$ et donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$. Par suite, $f\,(F_2) \subset \text{Ker}(f)$.

b) $F_1 \cap F_2 \subset \text{Ker}(f) \cap F_2 = \{0\}$ puis $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Donc, la somme $F_1 + F_2$ est directe. Ensuite,

$$f\,(F_1 + F_2) = f\,(F_1) + f\,(F_2) = \{0\} + f\,(F_2) = f\,(F_2) \subset F_1 \subset F_1 + F_2.$$

Donc, le sous -espace $F_1 + F_2$ est stable par f.

c) Soit $x \in (A \cap C) + (B \cap C)$. Il existe $(y, z) \in (A \cap C) \times (B \cap C)$ tel que $x = y + z$. Puisque $y \in A$ et $z \in B$, $x = y + z$ est dans $A + B$. Puisque $y \in C$, $z \in C$ et que C est un sous-espace, $x = y + z$ est dans C et finalement x est dans $(A + B) \cap C$. Ceci montre que $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$.

On n'a pas toujours l'égalité. Considérons par exemple deux vecteurs non colinéaires u et v (en dimension $n \geqslant 2$) puis $D_1 = \text{Vect}(u)$, $D_2 = \text{Vect}(v)$ et $D_3 = \text{Vect}(u + v)$. Donc, $D_1 \cap D_3 = \{0\}$, $D_2 \cap D_3 = \{0\}$ puis, $(D_1 \cap D_3) + (D_2 \cap D_3) = \{0\} + \{0\} = \{0\}$. D'autre part, $(D_1 + D_2) \cap D_3 = D_3 \neq \{0\}$ et donc $(D_1 \cap D_3) + (D_2 \cap D_3) \underset{\neq}{\subset} (D_1 + D_2) \cap D_3$.

d) $F_1 \cap \text{Ker}(f) = F_1$ car $F_1 \subset \text{Ker}(f)$ et $F_2 \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$. Donc, $(F_1 \cap \text{Ker}(f)) + (F_2 \cap \text{Ker}(f)) = F_1$. D'après la question précédente, $F_1 \subset (F_1 + F_2) \cap \text{Ker}(f)$. Inversement, soit $x \in (F_1 + F_2) \cap \text{Ker}(f)$. Posons $x = y + z$ où $y \in F_1$ et $z \in F_2$. On a $0 = f(x) = 0 + f(z) = f(z)$ et donc $z \in \text{Ker}(f) \cap F_2$ puis $z = 0$. On en déduit que $x = y \in F_1$. Ceci montre que $(F_1 + F_2) \cap \text{Ker}(f) \subset F_1$ puis que $(F_1 + F_2) \cap \text{Ker}(f) = F_1$.

e) Pour tout $x \in F$, $f(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$. Par suite, $f(F) \subset \text{Ker}(f)$. $F_2 \cap \text{Ker}(f) \subset F \cap \text{Ker}(f) = F_1$ et aussi $F_2 \cap \text{Ker}(f) \subset F_2$. Mais alors, $F_2 \cap \text{Ker}(f) \subset F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Finalement, $F_2 \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

