ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^2 Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de la fonction f.

3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

4. Calculer $I_n = \int_1^e x^n Ln(x)\,dx$ pour tout entier n supérieur à 1.

5. Déterminer la valeur du nombre réel α pour laquelle $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha I_n}{e^n} = l$, où l est un nombre réel non nul.

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2 e^{-x}$.

1. Etudier la convexité de f.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

4. Pour n entier strictement supérieur à 1, on pose $f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$. Etudier, selon les valeurs de n, les variations de f_n et tracer son graphe.

5. Résoudre l'équation $f_n(x) = e^x$ pour n >2 et x >-1.

Exercice n° 4

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par :

$f(-1) = f(1) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ pour $x \in]-1,1[$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x = 1$ et $x = -1$.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Résoudre l'équation $f(x) = e^x$

Exercice n° 5

Soit a un nombre réel fixé supérieur ou égal à 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1]$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n}{a} + \frac{u_n^2}{a^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n)

4. On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{4} + \frac{3}{4}$ et $v_0 \in]1,2]$

Etudier la convergence de la suite (v_n) (On pourra suivre la même démarche que pour la suite précédente (u_n)).

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en zéro ?

2. La fonction f est-elle dérivable à droite en zéro ?

3. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$