SESSION 2018

CAPESA
Analystes statisticiens

DEUXIEME COMPOSITION

Exercice 1

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout réel $x>0$,

$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1).$$

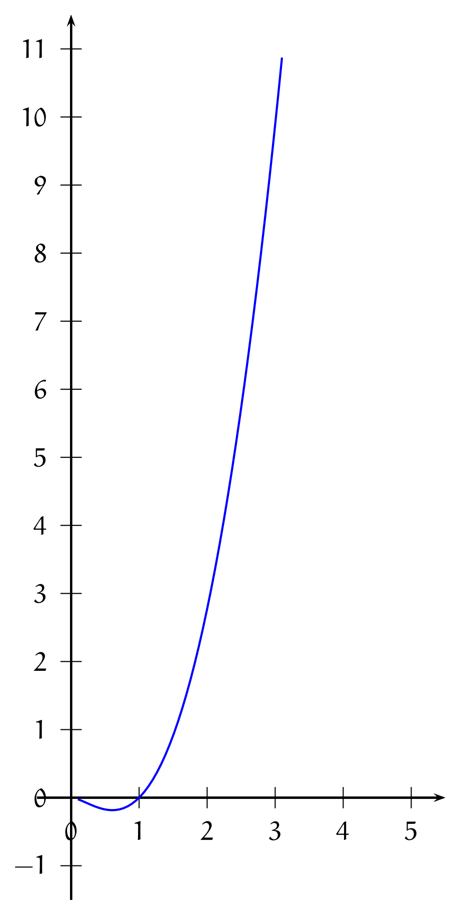
Pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $2\ln(x)+1$. Ensuite, pour $x>0$, $2\ln(x)+1>0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$ (par stricte croissance de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0,+\infty[$) et de même, $2\ln(x)+1=0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$.

La fonction f' est strictement négative sur $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$ et strictement positive sur $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ puis la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. De plus, $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction f est prologeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (on note encore f le prolongement obtenu). Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. La fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

Graphe de la fonction f.



2. La fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réerl $x>0$,

$$f''(x)=2\ln(x)+1+x\times\frac{2}{x}=2\ln(x)+3.$$

Pour $x>0$, $f''(x)>0\Leftrightarrow\ln(x)>-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$. La fonction f est donc concave sur $\left]0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ et convexe sur $\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right[$.

3. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\ dx&=\int_1^e x^2\ln(x)\ dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\ dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2\ dx\\&=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3-1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}.\end{aligned}$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Une nouvelle intégration par parties fournit

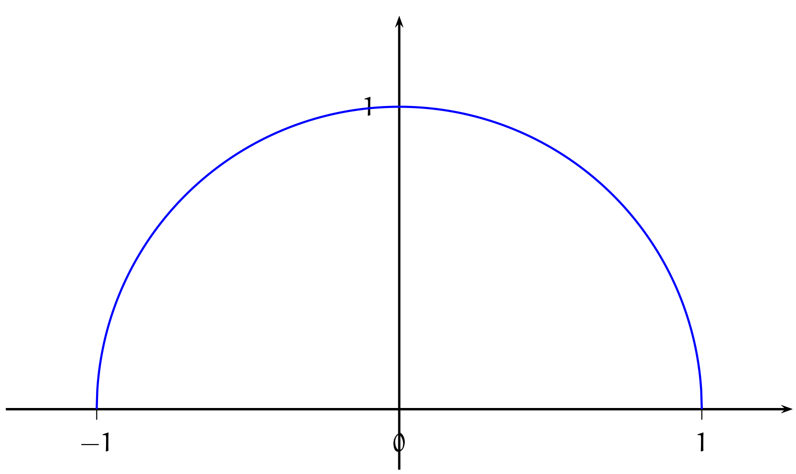
$$\begin{aligned}I_n&=\int_1^e x^n\ln(x)\ dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{x}\ dx=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\ dx\\&=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2}=\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

5. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. $\dfrac{n^\alpha I_n}{e^n}=\dfrac{en^{\alpha+1}}{(n+1)^2}+\dfrac{e^{-n}n^\alpha}{(n+1)^2}=\dfrac{en^{\alpha-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\dfrac{e^{-n}n^\alpha}{(n+1)^2}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{-n}n^\alpha}{(n+1)^2}=0$ (pour tout choix du réel α). Donc, $\dfrac{n^\alpha I_n}{e^n}$ tend vers une limite réelle non nulle si et seulement si $\dfrac{en^{\alpha-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$ tend vers une limite réelle non nulle, ce qui équivaut à $\alpha=1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nI_n}{e^n}=e$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie sur $[-1,1]$ et paire. La fonction f est strictement croissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, non dérivable en -1 et en 1. Le graphe de f admet en -1 et en 1 une demie tangente verticale.

Graphe de la fonction f.



2. On pose $x = \sin(t)$ et donc $dx = \cos(t)\ dt$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\ \cos(t)\ dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt \text{ (pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \cos(t) \geqslant 0 \text{ et donc } \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\ dt = \frac{1}{2}\left(\pi + \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Remarque. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et $y \geqslant 0$. L'intégrale demandée est donc l'aire d'un demi-disque de rayon $R = 1$. L'intégrale est donc égale à $\dfrac{\pi R^2}{2}$ ou encore $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3

1. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 \times \left(-e^{-x}\right) = \left(-x^2+1\right) e^{-x}$$

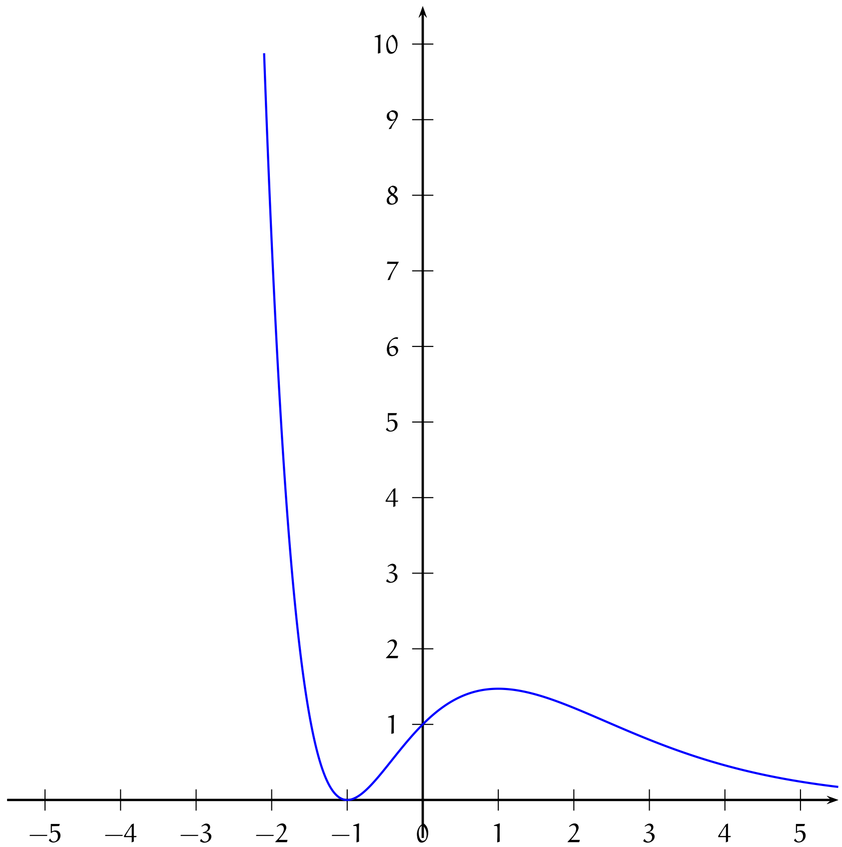
puis

$$f''(x) = -2xe^{-x} + \left(-x^2+1\right) \times \left(-e^{-x}\right) = \left(x^2-2x-1\right) e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe de $x^2-2x-1 = \left(x - \left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1-\sqrt{2}\right)\right)$. La fonction f'' est donc strictement positive sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2}, +\infty\right[$, strictement négative sur $\left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$ et s'annule en changeant de signe en $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. On en déduit que la fonction f est strictement convexe sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ et strictement concave sur $\left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$. Enfin, la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion, ses points d'abscisses respectives $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.

2. Pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x^2$. La fonction f' est donc strictement négative sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et strictement positive sur $]-1, 1[$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ et strictement croissante sur $[-1, 1]$. Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Graphe de la fonction f. (voir page suivante)



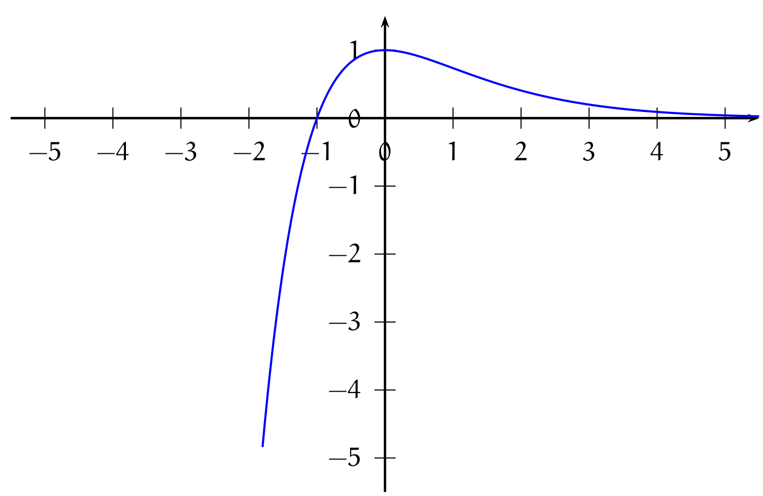
3. Deux intégrations par parties successives fournissent

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx &= \int_0^1 (x+1)^2e^{-x}\ dx = \left[(x+1)^2\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2(x+1)\left(-e^{-x}\right)\ dx = -4e^{-1}+1+2\int_0^1(x+1)e^{-x}\ dx\\ &= 1-4e^{-1}+2\left([(x+1)\left(-e^{x}\right)]_0^1 - \int_0^1\left(-e^{-x}\right)dx\right) = 3-8e^{-1}+2\int_0^1 e^{-x}\ dx\\ &= 3-8e^{-1}+2\left(-e^{-1}+1\right) = 5-10e^{-1}.\end{aligned}$$

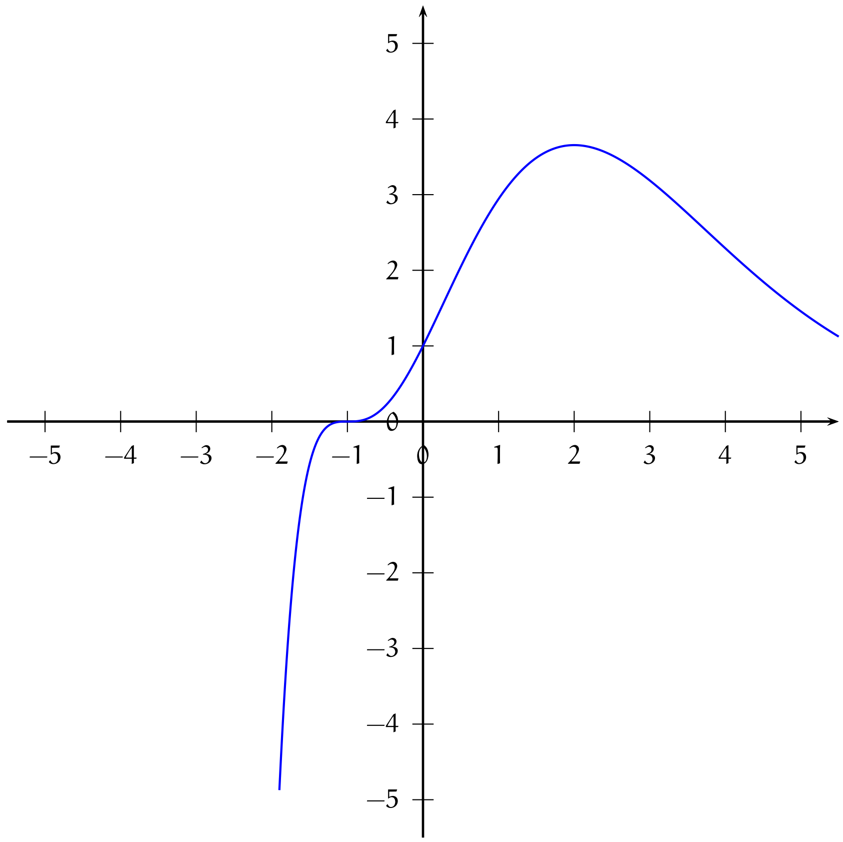
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1} + (1+x)^n\left(e^{-x}\right) = (1+x)^{n-1}(n-1-x)e^{-x}.$$

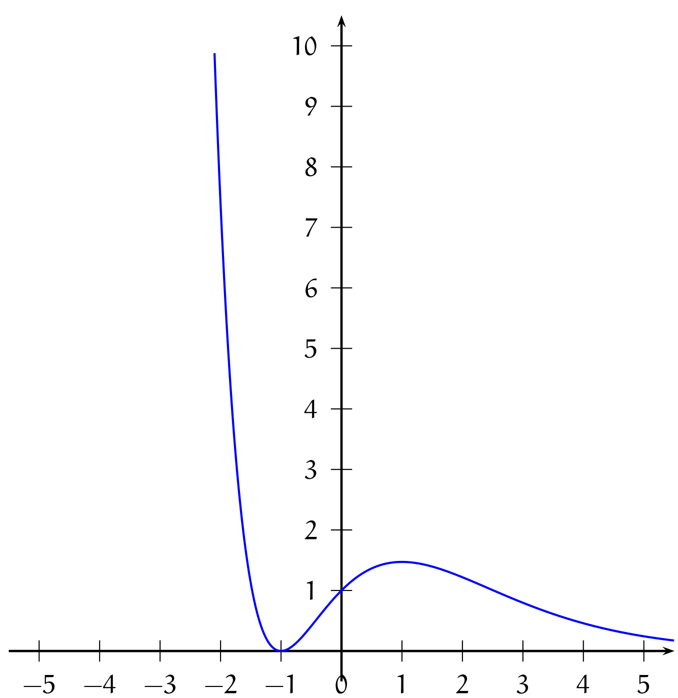
• Si $n = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -xe^{-x}$. La fonction f_1' est positive sur $]-\infty, 0]$ puis négative sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction f_1 est croissante sur $]-\infty, 0]$ puis décroissante sur $[0, +\infty[$. Voici le graphe de la fonction f_1 :



• Si n est impair supérieur ou égal à 3, posons $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, $f'_{2p+1}(x) = (1+x)^{2p}(2p-x)e^{-x}$. La fonction f'_{2p+1} est strictement positive sur $]-\infty,-1[\cup]-1,2p[$, strictement négative sur $]2p,+\infty[$ et s'annule en -1 et en $2p$. On en déduit que la fonction f_{2p+1} est strictement croissante sur $]-\infty,2p]$ puis strictement décroissante sur $[2p,+\infty[$. Voici le graphe de la fonction f_{2p+1} (quand $p=1$) :



• Si n est pair supérieur ou égal à 2, posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, $f'_{2p}(x) = (1+x)^{2p-1}(2p-1-x)e^{-x}$. La fonction f'_{2p} est strictementnégative sur $]-\infty,-1[\cup]2p-1,+\infty[$, strictement négative sur $]1,2p-1[$ et s'annule en -1 et en $2p-1$. On en déduit que la fonction f_{2p} est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[2p,+\infty[$ et strictement décroissante sur $[-1,2p]$. Voici le graphe de la fonction f_{2p} (quand $p=1$) :



5. Soit $n \geqslant 3$. Pour $x > -1$,

$$f_n(x) = e^x \Leftrightarrow (1+x)^n e^{-x} = e^x \Leftrightarrow e^{2x} = (1+x)^n \Leftrightarrow 2x = n\ln(1+x) \Leftrightarrow 2x - n\ln(1+x) = 0.$$

Pour $x > -1$, posons $g_n(x) = 2x - n\ln(1+x)$. La fonction g_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x > -1$,

$$g_n'(x) = 2 - \frac{n}{1+x} = \frac{2x-(n-2)}{x+1}.$$

Pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, $g_n'(x)$ est du signe de $2x-(n-2)$ ou encore de $x - \dfrac{n-2}{2}$. Puisque $\dfrac{n-2}{2} \geqslant 0 > -1$, la fonction g_n' est strictement négative sur $\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right[$ et strictement positive sur $\left]\dfrac{n-2}{2}, +\infty\right[$ puis la fonction g_n est strictement décroissante sur $\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{n-2}{2}, +\infty\right[$. Enfin, $g_n\left(\dfrac{n-2}{2}\right) = n - 2 - n\ln\left(\dfrac{n}{2}\right) = n\left(1 - \ln\left(\dfrac{n}{2}\right)\right) - 2$. On pose $\alpha_n = n\left(1 - \ln\left(\dfrac{n}{2}\right)\right) - 2$.

Si $n \geqslant 6$, alors $\dfrac{n}{2} \geqslant 3 > e$ puis $1 - \ln\left(\dfrac{n}{2}\right) < 0$ puis $\alpha_n < 0$. Ensuite, $\alpha_3 = -0,2\ldots < 0$, $\alpha_4 = -0,7\ldots < 0$ et $\alpha_5 = -1,5\ldots < 0$. Donc, pour tout $n \geqslant 3$, $\alpha_n < 0$.

La fonction g_n est continue et strictement décroissante sur $\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right]$ et donc bijective de $\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right]$ sur $g\left(\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right]\right) = [\alpha_n + \infty[$ avec $\alpha_n < 0$. En particulier, la fonction g_n s'annule une fois et une seule sur $\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right]$, en un certain réel de $\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right[$. De même, la fonction g_n s'annule une fois et une seule sur $\left[\dfrac{n-2}{2}, +\infty\right[$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées), en un certain réel de $\left]\dfrac{n-2}{2}, +\infty\right[$.

L'équation $g_n(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions dans $]-1,+\infty[$ ou encore l'équation $f_n(x) = e^x$ admet exactement deux solutions dans $]-1,+\infty[$.

Exercice 4

1. Pour $x \in]-1,1[$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{e^{\frac{x^2}{x^2-1}}}{x-1} = -\frac{e^{\frac{x^2}{x^2-1}}}{1-x} = -\exp\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \ln(1-x)\right) = -\exp\left(\frac{x^2+(1+x)(1-x)\ln(1-x)}{x^2-1}\right).$$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}} X\ln(X) = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2 + (1+x)(1-x)\ln(1-x) = 1 > 0$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(x^2-1\right) = 0^-$. On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{x^2+(1+x)(1-x)\ln(1-x)}{x^2-1} = -\infty$ puis que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$. La fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1) = 0$ (en particulier, f est continue à gauche en 1).

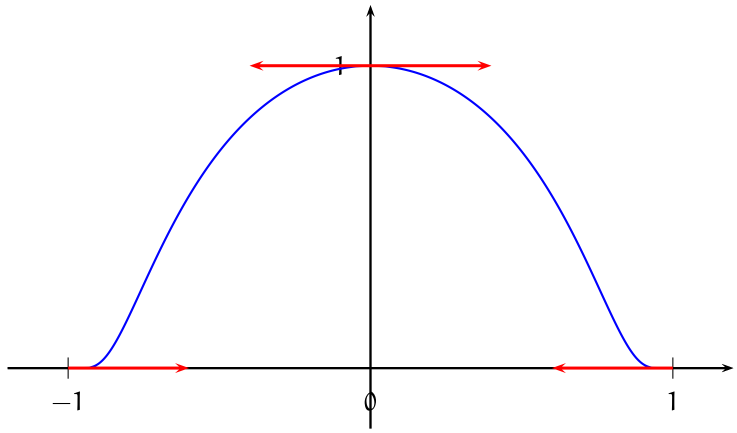
Ensuite, la fonction f est paire et donc la fonction f est dérivable à droite en -1 et $f_d'(-1) = 0$.

2. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout réel x de $]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2-1\right) - x^2(2x)}{\left(x^2-1\right)^2} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} e^{\frac{x^2}{x^2-1}}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $]-1,0[$ et strictement négative sur $]0,1[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$. On rappelle enfin que $f'(-1) = f'(1) = 0$, que $f'(0) = 0$ et que f est paire.

Graphe de la fonction f.



3. Les nombres -1 et 1 ne sont pas solution de l'équation. Soit $x \in]-1,1[$.

$$f(x) = e^x \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = e^x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2-1} = x \Leftrightarrow x^2 = x^3 - x \Leftrightarrow x\left(x^2 - x - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0.$$

De plus, $0 \in]-1,1[$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6\ldots \in]-1,1[$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6\ldots \notin]-1,1[$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right\}$.

Exercice 5

1. Soit $a \in [2,+\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 < u_n \leqslant 1$. Alors, $0 < u_{n+1} = \dfrac{u_n}{a} + \dfrac{u_n^2}{a^2} \leqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$. De plus, $a \geqslant 2 \geqslant 1$ et donc $a^2 \geqslant a > 0$ puis $\dfrac{1}{a^2} \leqslant \dfrac{1}{a}$ puis $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} \leqslant \dfrac{2}{a} \leqslant 1$. Finalement, $0 < u_{n+1} \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{u_n}{a^2} \leqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} < 1$ et donc $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \geqslant 0$ (plus précisément $\ell \in [0, u_0] \subset [0,1]$). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{a} + \dfrac{u_n^2}{a^2}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \dfrac{\ell}{a} + \dfrac{\ell^2}{a^2}$. Ensuite,

$$\ell = \frac{\ell}{a} + \frac{\ell^2}{a^2} \Leftrightarrow \ell\left(\frac{\ell}{a^2} + \frac{1}{a} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = a(a-1).$$

Ensuite, $a(a-1) \geqslant 2 \times 1 = 2$ et en particulier $a(a-1) \notin [0,1]$. On en déduit que $\ell = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4.

- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < v_n \leqslant 2$.
  - Le résultat est vrai pour $n = 0$.
  - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $1 < v_n \leqslant 2$. Alors, $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} < \dfrac{v_n^2}{4} + \dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{2^2}{4} + \dfrac{3}{4}$ ou encore $1 < v_{n+1} \leqslant \dfrac{7}{4}$ et en particulier

$1 < v_{n+1} \leqslant 2$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < v_n \leqslant 2$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n^2}{4} - v_n + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}\left(v_n^2 - 4v_n + 3\right) = \dfrac{1}{4}(v_n - 1)(v_n - 3) < 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

• La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \in [1, v_0] \subset [1, 2]$. Ensuite, on fait tendre n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{4} + \dfrac{3}{4}$. On obtient $\ell = \dfrac{\ell^2}{4} + \dfrac{3}{4}$ ou encore $\dfrac{1}{4}(\ell-1)(\ell-3) = 0$ ou enfin $\ell \in \{1, 3\}$. Puisque de plus, $\ell \in [1, 2]$, on en déduit que $\ell = 1$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 6

1. Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$. Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \dfrac{1}{2}$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 à droite en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$ (on note encore f le prolongement obtenu).

2. Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} - \dfrac{1}{2}}{x} = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{\left(1 - \sqrt{x+1}\right)\left(1 + \sqrt{x+1}\right)}{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2} = -\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}.$$

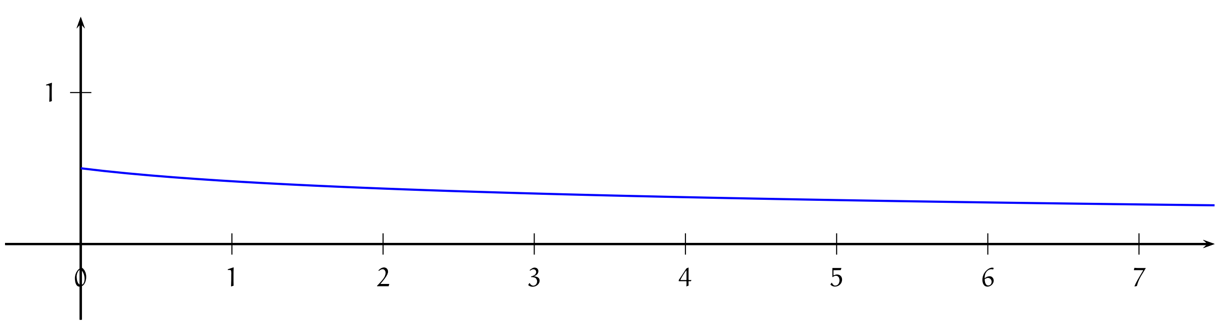
Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{8}$. La fonction f est dérivable à droite en 0 et de plus $f'_d(0) = -\dfrac{1}{8}$.

3. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2} < 0.$$

La fonction f' est donc strictement négative sur $[0, +\infty[$ (en tenant compte de $f'(0) = -\dfrac{1}{8}$) puis la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 0$.

Graphe de la fonction f.



4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par continuité de f en 0, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = \frac{1}{2}$.

