INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2018
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et ln le logarithme népérien. On rappelle que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx$.
2. Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(2x)}$.
3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$.
4. Donner la limite en $x = 1$ de la fonction de la question précédente.
5. Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique.
6. L'inscription à un concours de tir à l'arc est de 10 francs. Le laureat du concours reçoit 50 francs et gagne donc 40 francs au total ; le second reçoit 20 francs, le troisième 10 francs et les autres ne reçoivent rien (et perdent donc le montant de leur inscription). 10 concurrents de même qualité sont inscrits : quelle est l'espérance du gain de chacun d'eux ?
7. Donner la limite, si elle existe, de $(x-1)\ln(x^2-1)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

9. Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (v_n) où $v_n = \ln u_n$ est une suite arithmétique. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de celle de (v_n).
10. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Exercice 2

1. On considère la fonction de la variable réelle
$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$
Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies.
2. En vous aidant de la question précédente, montrer que la fonction
$$F(x) = \ln(-\ln(x))$$
est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbf{R}$
3. Trouver le point x tel que $F(x) = 0$ et écrire l'équation de la tangente en x du graphe de F. Quelle propriété remarquable le graphe a-t-il en ce point ?
4. Tracer le graphe de F.
5. Montrer qu'il existe un unique réel y tel que $F(y) = y$.

Exercice 3 Soit a un nombre réel. Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur de a, le nombre de solutions de l'équation
$$e^{ax} = x + a \tag{1}$$

1. Répondre à la question posée quand $a = 0$.
2. On suppose $a < 0$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = e^{ax} - x - a$, et en déduire le nombre de solutions de l'équation (1) dans ce cas.
3. On suppose désormais que $a > 0$.

   (a) Montrer que la fonction f admet un unique minimum m en un point x_0 qu'on déterminera. Donner l'expression de m en fonction de a.

   (b) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction
   $$g(y) = 1 + \ln y - y^2$$
   et montrer que g admet un maximum strictement positif au point $y_0 = \sqrt{2}/2$.

   (c) En déduire que l'équation $g(y) = 0$ admet deux solutions. L'une d'entre elles est évidente, placer la seconde (qu'on notera α) par rapport à $\sqrt{2}/2$.

   (d) Déduire de ce qui précède le signe de m en fonction de la valeur de a, puis le nombre de solutions de l'équation (1).

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $\ln x \leq x/e$.
2. On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx.$$
3. Calculer I_0 et I_1.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
5. En utilisant la question 1., montrer que
$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$
6. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$
$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{3} I_n + \frac{e^3}{3}.$$
7. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n I_n = e^3.$$

Exercice 5 Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 + z_3 & = & 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 & = & 7 \\ z_1 z_2 z_3 & = & 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Montrer que $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -3$.
2. Ecrire $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$ sous la forme $x^3 + ax^2 + bx + c$.
3. En déduire les solutions du système (2).

Exercice 6 On considère l'équation

$$z^4 = -4 \tag{3}$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est une solution de l'équation (3), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de cette équation.
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Ecrire z_0 sous forme trigonométrique.
3. Montrer de deux façons différentes que z_0 est solution de l'équation (3).
4. Donner trois autres solutions de l'équation (3).

Exercice 7 Une urne contient 8 boules blanches, 8 boules rouges et 8 boules noires. Les boules de chaque couleur sont numérotées de 1 à 8. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir sorti les boules blanches numérotées 1, 2 et 3.
2. En déduire la probabilité d'avoir sorti trois boules non nécessairement de la même couleur, mais portant trois numéros consécutifs.