SESSION 2018

CAPESA
Analystes statisticiens

PREMIERE COMPOSITION

Exercice 1

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+5}$ est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc, l'intégrale proposée existe puis, en tenant compte de $(e^x+5)' = e^x$,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}\,dx = [\ln(e^x+5)]_0^1 = \ln(e+5) - \ln(6) = \ln\left(\frac{e+5}{6}\right).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$. La fonction f est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. De plus, pour $x \in D$,

$$f'(x) = \cos(x) \times \frac{1}{\cos^2(2x)} + \sin(x) \times \frac{-2(-2\sin(2x))}{\cos^3(2x)} = \frac{\cos(x)\cos(2x) + 4\sin(x)\sin(2x)}{\cos^3(2x)}.$$

3. Pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{x - \dfrac{1}{x}}$. Ensuite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$. En divisant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. Pour tout réel $x \in [0, +\infty[\setminus\{1\}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = \frac{1}{4}$.

5. $\sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

6. On note X la variable aléatoire égale au gain d'un concurrent. On suppose que pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, la probabilité qu'un candidat arrive à la k-ème place est $\dfrac{1}{10}$ (ce qui n'est peut-être pas très réaliste). La loi de probabilité de la variable X est

$$p(X = 40) = \frac{1}{10}, \quad p(X = 10) = \frac{1}{10}, \quad p(X = 0) = \frac{1}{10} \quad p(X = -10) = \frac{7}{10}.$$

L'espérance de X est donc

$$E(X) = \frac{1}{10} \times 40 + \frac{1}{10} \times 10 + \frac{1}{10} \times 0 + \frac{7}{10} \times (-10) = -2.$$

En moyenne, chaque concurrent perd 2 francs à chaque épreuve.

7. Pour $x > 1$, $f(x) = (x-1)\ln((x-1)(x+1)) = (x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x+1)$. Ensuite, $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)\ln(x+1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)\ln(x-1) = \lim_{X\to0} X\ln(X) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. En additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

8. $u_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 + 1} \geqslant 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} > \sqrt{u_n^2} = u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

Mais alors, ou bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul, ou bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Mais si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$, alors en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}$, on obtient $\ell = \sqrt{\ell^2+1}$ (par continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier en ℓ). Mais l'égalité $\ell = \sqrt{/ell^2+1}$ est impossible car $\sqrt{\ell^2+1} > \sqrt{\ell^2} = \ell$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

9. Notons r la raison de la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = v_n = v_0 + nr = \ln(u_0) + nr$ puis

$$u_n = e^{v_n} = e^{\ln(u_0)+nr} = u_0\left(e^r\right)^n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $q = e^r$.

10. Pour tout réel x,

$$x^4 + 3x^2 - 4 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+4\right).$$

Puisque pour tout réel x, $x^2+4 > 0$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation proposée est $\{-1, 1\}$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie et dérivable sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$. De plus, pour $x \in D$,

$$f'(x) = -\frac{1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x}}{x^2\ln^2(x)} = -\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln^2(x)}.$$

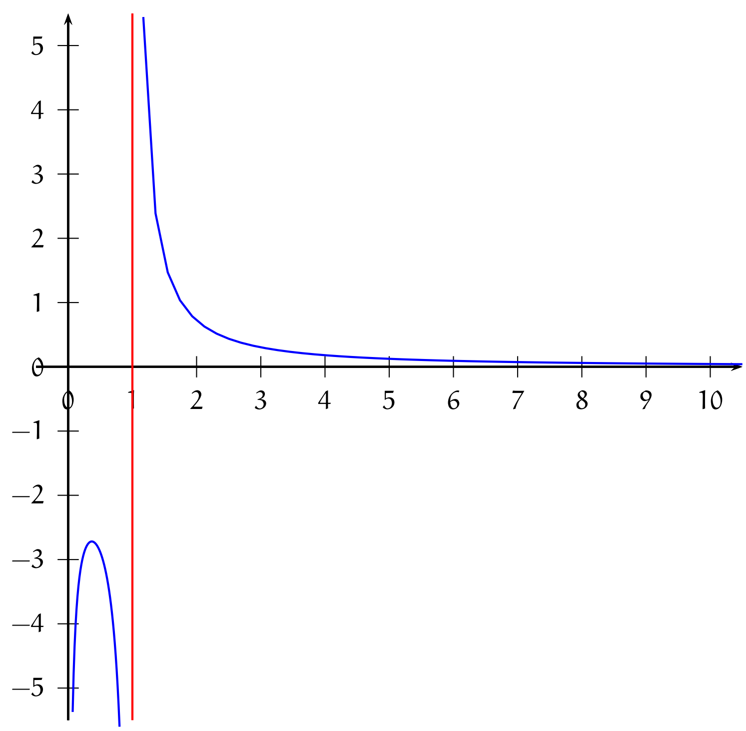
Sur D, la fonction f' a le signe de la fonction $x \mapsto -(\ln(x)+1)$. Or, pour tout réel x de D, $-(\ln(x)+1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1}$ et de même, $-(\ln(x)+1) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. La fonction f' est donc strictement positive sur $\left]0, e^{-1}\right[$, est strictement négative sur $\left]e^{-1}, 1\right[\cup]1,+\infty[$ et s'annule en e^{-1}. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]0, e^{-1}\right]$, et est strictement décroissante sur $\left[e^{-1}, 1\right[$ et sur $]1,+\infty[$.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $x\ln(x)$ tend vers 0 par valeurs inférieures (d'après un théorème de croissances comparées). Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. On en déduit que l'axe (Oy) est asymptote à la courbe représentative de f.

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures (resp. supérieures), $x\ln(x)$ tend vers 0 par valeurs inférieures (resp. supérieures). Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

Quand x tend vers $+\infty$, $x\ln(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit que l'axe (Ox) est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Graphe de la fonction f.



2. Pour tout réel $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ puis $-\ln(x) > 0$. La fonction F est donc définie et dérivable sur $]0,1[$ et pour tout réel $x \in]0,1[$,

$$F'(x) = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{-\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)} = f(x).$$

D'après la question précédente, pour tout réel $x \in]0,1[$,

$$f(x) \leqslant f\left(e^{-1}\right) = -e < 0.$$

Donc, la fonction F est strictement décroissante sur $]0,1[$. Ainsi, la fonction F est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$ et donc bijective de $]0,1[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 1} F(x), \lim\limits_{x\to 0} F(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

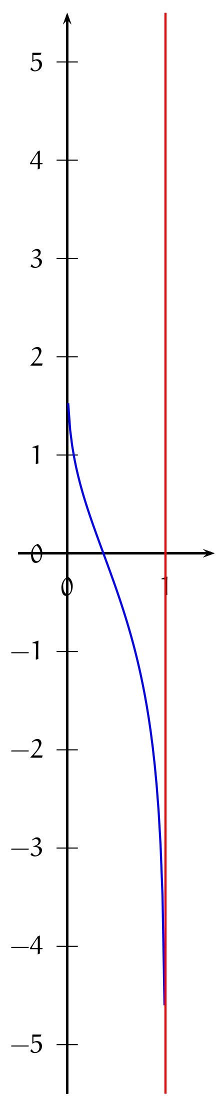
3. Soit $x \in]0,1[$.

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(-\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow -\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

De plus, $F\left({}^{-1}\right) = 0$ et $F'\left(e^{-1}\right) = f\left(e^{-1}\right) = -e$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de F en son point d'abscisse $x_0 = e^{-1}$ est $y = -e\left(x - e^{-1}\right)$ ou encore $y = -ex + 1$.

De plus, la fonction $F'' = f'$ s'annule en changeant de signe en $x_0 = e^{-1}$ (d'après la question 1)). Le point de la courbe représentative de F d'abscisse $x_0 = e^{-1}$ est donc un point d'inflexion de cette courbe représentative.

4. Graphe de la fonction F.



5. Pour $y \in]0,1[$, posons $G(y) = F(y) - y$. La fonction G est continue sur $]0,1[$ et vérifie $\lim\limits_{y \to 0} G(y) = +\infty > 0$ et $\lim\limits_{y \to 1} G(y) = -\infty < 0$. La fonction G s'annule donc au moins une fois sur $]0,1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

D'autre part, pour tout réel $y \in]0,1[$, $G'(y) = F'(y) - 1 = f(y) - 1 < 0$ (d'après la question 1)). La fonction G est strictement décroissante sur $]0,1[$ et en particulier, la fonction G s'annule au plus une fois sur $]0,1[$.

Finalement, la fonction G s'annule une fois et une seule sur $]0,1[$ et donc il existe un réel y de $]0,1[$ et un seul tel que $F(y) = y$.

Exercice 3

1. Quand $a = 0$, l'équation s'écrit $x = 1$ et admet pour ensemble de solutions $\{1\}$.

2. Soit $a < 0$. La fonction $f_a : x \mapsto e^{ax} - x - a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_a'(x) = ae^{ax} - 1 < 0.$$

La fonction f_a est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis l'équation $f_a(x) = 0$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$. D'autre part, puisque $a < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{ax} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty > 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = -\infty < 0$. Puisque la fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction f_a s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction f_a s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore l'équation $e^{ax} = x + a$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

3. a) Soit $a > 0$. De nouveau, pour tout réel x, $f_a'(x) = ae^{ax} - 1$ puis

$$f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow ae^{ax} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{ax} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow ax > \ln\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow x > -\frac{\ln(a)}{a}$$

et de même, $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(a)}{a}$. La fonction f_a est donc strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{\ln(a)}{a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\ln(a)}{a}, +\infty\right[$. Par suite, la fonction f_a admet un minimum m sur $\mathbb{R}$, atteint en un point et un seul, à savoir $x_0 = -\dfrac{\ln(a)}{a}$. De plus,

$$m = f_a\left(-\frac{\ln(a)}{a}\right) = e^{-\ln(a)} + \frac{\ln(a)}{a} - a = \frac{1}{a} + \frac{\ln(a)}{a} - a = \frac{1}{a}\left(1 + \ln(a) - a^2\right).$$

b) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $y > 0$,

$$g'(y) = \frac{1}{y} - 2y = \frac{1 - 2y^2}{y} = \frac{1 + \sqrt{2}y}{y}\left(1 - \sqrt{2}y\right).$$

La fonction g' est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. La fonction g admet donc un maximum en $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Le maximum de g est

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1 - \ln(2)}{2}.$$

Ce maximum est strictement positif (car $\ln(2) < 0,7$). Ainsi, la fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et d'autre part, $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = -\infty$ et $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$. Comme à la question b), la fonction g s'annule exactement une fois sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, en un certain réel α. De même, puisque $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = -\infty < 0$ (d'après un théorème de croissances comparées), la fonction s'annule une et une seule fois sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, en un certain réel β. De plus, $g(1) = 0$ avec $1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $\beta = 1$.

d) On a $m = \dfrac{1}{a}g(a)$ et donc m est du signe de $g(a)$. D'après la question précédente, si $a \in]0, \alpha[\cup]1, +\infty[$, $m < 0$, si $a \in]\alpha, 1[$, alors $m > 0$ et si $a \in \{\alpha, 1\}$, $m = 0$. Donc, d'après l'étude de la fonction f effectuée à la question

- Si $a \in]0, \alpha[\cup]1, +\infty[$, la fonction f s'annule en deux points distincts ou encore l'équation (1) a deux solutions.
- Si $a \in]\alpha, 1[$, la fonction f ne s'annule pas ou encore l'équation (1) n'a pas de solution.
- Si $a \in \{\alpha, 1\}$, la fonction f s'annule une fois et une seul ou encore l'équation (1) a une solution et une seule.

Exercice 4

1. Pour $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{x}{e} - \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-e}{ex}$. La fonction f' est négative sur $]0, e]$ et positive sur $[e, +\infty[$. La fonction f admet donc un minimum en $x = e$ et ce minimum est $f(e) = \dfrac{e}{e} - \ln(e) = 0$.

La fonction f est donc positive sur $]0, +\infty[$ et on a montré que pour $x > 0$, $\ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$.

2. $I_0 = \displaystyle\int_1^e x^2 \, dx = \dfrac{e^3 - 1}{3}$. Ensuite, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e x^2 \ln(x) = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \, dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x de $[1, e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$ puis $0 \leqslant x^2(\ln(x))^{n+1} \leqslant x^2(\ln(x))^n$ après multiplication des trois membres de l'encadrement par le réel positif $x^2(\ln(x))^n$. Par positivité et croissance de l'intégration, on obtient $0 \leqslant \displaystyle\int_1^e x^2(\ln(x))^{n+1} \, dx \leqslant \int_1^e x^2(\ln(x))^n \, dx$ ou encore $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif ou nul.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x de $[1, e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$ puis, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, +\infty[$, pour tout réel x de $[1, e]$, $0 \leqslant (\ln(x))^n \leqslant \left(\dfrac{x}{e}\right)^n$ puis $0 \leqslant x^2(\ln(x))^n \leqslant x^2\left(\dfrac{x}{e}\right)^n$. Par croissance l'intégration, on en déduit que

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2} \, dx = \frac{1}{e^n} \times \frac{e^{n+3} - 1}{n+3} \leqslant \frac{1}{e^n} \times \frac{e^{n+3}}{n+3} = \frac{e^3}{n+3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e^3}{n+3}$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^3}{n+3} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x^2(\ln(x))^{n+1} \, dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln(x))^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times (n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n \, dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\ln(x))^n \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n. \end{aligned}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $3I_{n+1} = -nI_n - I_n + e^3$ puis $nI_n = e^3 - 3I_{n+1} - I_n$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et donc aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3I_{n+1} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = e^3$.

Exercice 5

1. Soient z_1, z_2 et z_3 trois réels.

$$(z_1+z_2+z_3)^2 = z_1^2+z_2^2+z_3^2+2\left(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3\right),$$

et donc aussi $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 = \dfrac{1}{2}\left((z_1+z_2+z_3)^2 - \left(z_1^2+z_2^2+z_3^2\right)\right)$.

Si le triplet (z_1,z_2,z_3) est solution de (2), alors $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 = \dfrac{1}{2}\left(1^2-7\right) = -3$ et donc le triplet (z_1,z_2,z_3) est solution de $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=1 \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=-3 \\ z_1z_2z_3=1 \end{cases}$ $(2')$. Inversement, le triplet (z_1,z_2,z_3) est solution de $(2')$, alors $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = (z_1+z_2+z_3)^2 - 2\left(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3\right) = 1^2-2(-3) = 7$ puis le triplet (z_1,z_2,z_3) est solution de (2).

Finalement, $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1+z_2+z_3=1 \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=-3 \\ z_1z_2z_3=1 \end{cases}$.

2. Pour tout réel x, $(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3) = x^3-(z_1+z_2+z_3)x^2+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)x-z_1z_2z_3$.

3. Si le triplet (z_1,z_2,z_3) est solution de (2), alors pour tout réel x, $(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3) = x^3-x^2-3x-1$ et donc z_1, z_2 et z_3 sont les trois solutions de l'équation $x^3-x^2-3x-1=0$. Inversement, si z_1, z_2 et z_3 sont les trois solutions de l'équation $x^3-x^2-3x-1=0$, alors pour tout réel x, $(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3) = x^3-x^2-3x-1$ puis, par identification des coefficients, le triplet (z_1,z_2,z_3) est solution de (2).

En résumé, le triplet (z_1,z_2,z_3) est solution de (2) si et seulement si z_1, z_2 et z_3 sont les trois solutions de l'équation $x^3-x^2-3x-1=0$. Or pour tout réel x,

$$x^3-x^2-3x-1 = (x+1)\left(x^2-2x-1\right) = (x+1)\left(x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right).$$

Le système (2) admet donc 6 triplets solutions : $\left(-1,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$, $\left(-1,1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1+\sqrt{2},-1,1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2},-1,1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1+\sqrt{2},1-\sqrt{2},-1\right)$ et $\left(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2},-1\right)$.

Exercice 6

1. Soit z un nombre complexe solution de l'équation (3). Alors $(-z)^4 = z^4 = -4$ et donc $-z$ est solution de l'équation (3). D'autre part, en conjuguant, $\overline{z}^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$ et donc $\overline{z}$ est solution de l'équation (3).

2. $z_0 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

3. $z_0^4 = (1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$. Mais aussi $(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\times\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\times\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 4(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) = -4$. z_0 est donc une solution de l'équation (3).

4. Le nombre complexe z_0 est solution de l'équation (3). Mais alors, les nombres $-z_0 = -1-i$, $\overline{z_0} = 1-i$ et donc aussi $-\overline{z_0} = -1+i$ sont trois autres solutions de l'équation (3).

Exercice 7

1. Le nombre de tirages simultanés de trois boules parmi 24 est $C_{24}^3 = \dfrac{24\times23\times22}{3\times2} = 4\times23\times22 = 2024$. Ces tirages sont équiprobables. Le nombre de tirages simultanés de trois boules parmi les trois boules blanches numérotées 1, 2 et 3 est $C_3^3 = 1$. La probabilité demandée est

$$p = \frac{C_3^3}{C_{24}^3} = \frac{1}{2024}.$$

2. Il y a six ensembles de numéros à considérer à savoir $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$, $\{4,5,6\}$, $\{5,6,7\}$ et $\{6,7,8\}$. Pour chaque numéro d'un de ces ensembles, il y a trois couleurs possibles et donc $3\times3\times3 = 27$ tirages fournissant $\{1,2,3\}$, 27 tirages fournissant $\{2, 3, 4\}$ ... 27 tirages fournissant $\{6, 7, 8\}$. Au total, il y a $6 \times 27 = 162$ tirages fournissant trois numéros consécutifs. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{162}{2024} = \frac{81}{1012}.$$

