SESSION 2026

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème n° 1 : VRAI-FAUX

Calculs dans $\mathbb{R}$

1. FAUX. Si $x = 6$ et $y = 3$, alors $x \in [2,6]$, $y \in [3,4]$ mais $x - y = 3 \notin [-1,2]$.
Les inégalités $2 \leqslant x \leqslant 6$ et $3 \leqslant y \leqslant 4$ fournissent $2 \leqslant x \leqslant 6$ et $-4 \leqslant y \leqslant -3$ puis $2-4 \leqslant x-y \leqslant 6-3$ ou encore $-2 \leqslant x-y \leqslant 3$

2. FAUX. Notons C_n la cotisation l'année n et T le taux d'évolution annuel moyen de la cotisation. Par hypothèse, $C_{10} = 1,35C_0$
Puisque $C_{10} = (1+T)^{10}C_0$, on en déduit que $(1+T)^{10} = 1,35$ et donc $T = (1,35)^{\frac{1}{10}} - 1 = 0,0304...$
Le taux moyen annuel est quasiment égal à 3% et pas à 3,5%.

3. FAUX. $P(1) = 2+5-1-6 = 0$ et $P(2) = 2\times 8 + 5\times 4 - 2 - 6 = 16+20-8 = 28 \neq 0$. P est divisible par $X-1$ mais pas par $X-2$.

4. FAUX. On prend $a = 1$, $b = 2$ et $c = 5$. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1 + 0,5 + 0,2 = 1,7 \in \mathbb{D}$.

Analyse réelle

5. VRAI. C'est un résultat de cours dont voici une démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente.
Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$. Pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

Soit alors $M = \text{Max}\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1+|\ell|\}$. M est un réel tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

6. FAUX. La fonction $f : x \mapsto 2^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (\ln(2))2^x$.

7. FAUX. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n}$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{2} \neq 0$.

8. VRAI. La fonction $f : x \mapsto x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x|x|}{x} = |x|$ puis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

On note que si $x > 0$, $f(x) = x^2$ puis $f'(x) = 2x$, si $x < 0$, $f(x) = -x^2$ puis $f'(x) = -2x$ et enfin $f'(0) = 0$. Donc, pour tout réel x, $f'(x) = 2|x|$.

9. VRAI. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+0}\,dt = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

10. VRAI. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. En dérivant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f'(-x)$. La fonction f' est donc impaire.

11. FAUX. La fonction $f : x \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F : x \mapsto x+1$.
F n'est pas impaire car par exemple, $F(-1) = 0 \neq -2 = -F(1)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

12. FAUX. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F''(x) = f'(x) = 2xe^{(x^2)}.$$

La fonction F'' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et donc la fonction F est strictement concave sur $]-\infty, 0]$. En particulier, la fonction F n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

13. FAUX. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x,

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $]-\infty, -\ln(2)[\cup]0, +\infty[$ et strictement négative sur $]-\ln(2), 0[$.

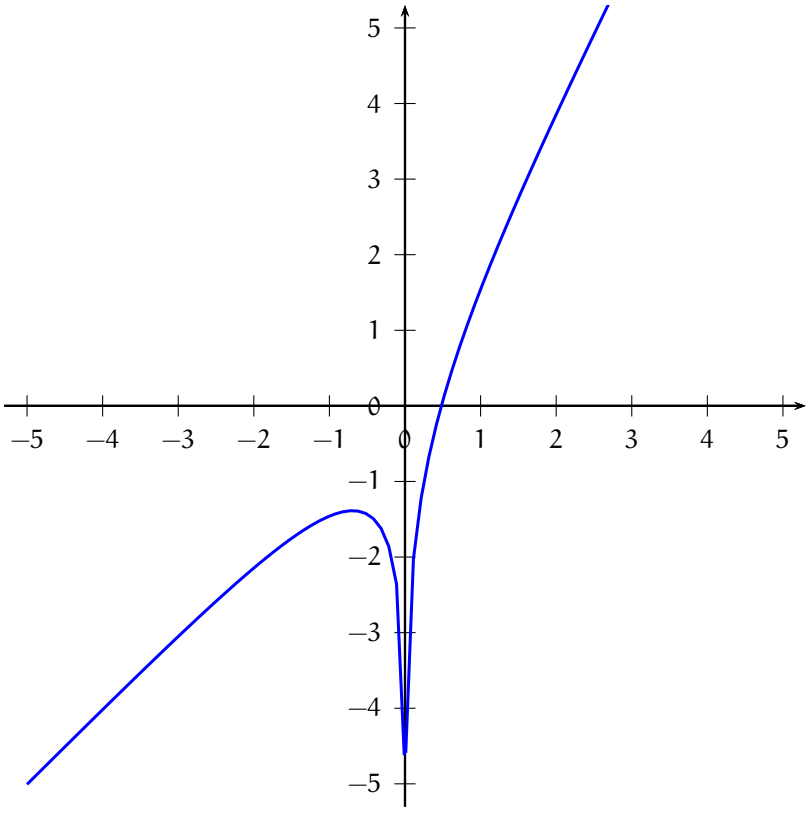
Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est continue et vérifie $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \times +\infty = -\infty < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$. De plus, la fonction est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et s'annule donc au plus une fois sur $]0, +\infty[$. Finalement, la fonction f s'annule exactement une fois sur $]0, +\infty[$.

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -\ln(2)]$ et strictement décroissante sur $[-\ln(2), 0[$. La fonction f admet sur $]-\infty, 0[$ un maximum atteint en $-\ln(2)$ et de plus,

$$f(-\ln(2)) = -\ln(2) + \ln\left|e^{-\ln(2)} - 1\right| = -\ln(2) + \ln\left|\frac{1}{2} - 1\right| = -2\ln(2) < 0.$$

La fonction f est en particulier strictement négative sur $]-\infty, 0[$ puis la fonction f ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}^*$.



Arithmétique

14. FAUX. 5 est un nombre premier. Mais $5! + 1 = 121 = 11^2$ n'est pas un nombre premier.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

15. VRAI. Modulo 3, tout entier naturel est congru à -1, 0 ou 1.
Si $n \equiv 0$ [3], $n\left(n^2+5\right) \equiv 0 \times 5$ [3] ou encore $n\left(n^2+5\right) \equiv 0$ [3]. Dans ce cas, $n\left(n^2+5\right)$ est divisible par 3.
Sinon, $n \equiv \pm 1$ [3] puis $n\left(n^2+5\right) \equiv \pm 1 \times 6$ [3] et encore une fois $n\left(n^2+5\right) \equiv 0$ [3] puis $n\left(n^2+5\right)$ est divisible par 3.

16. VRAI. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n^2-3n}{2}$ puis

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 9 \Leftrightarrow \frac{n^2-3n}{2} = 9 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \Leftrightarrow n = -3 \text{ ou } n = 6 \Leftrightarrow n = 6.$$

De plus, 6 est effectivement un multiple de 3.

Géométrie

17. VRAI. Le plan $\mathcal{P}_1$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1,-1,-1)$ et $\mathcal{P}_2$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_2}(3,-1,1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants en une droite $\mathcal{D}$.

Puisque $x_A - y_A - z_A = 1 + 1 - 0 = 2$ et $3x_A - y_A + z_A = 3 + 1 + 0 = 4$, le point A appartient aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et donc à la droite $\mathcal{D}$.

Puisque $1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 1 - 2 + 1 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n_1}$. Puisque $1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1 = 3 - 2 - 1 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n_2}$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est donc effectivement un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

18. FAUX. Puisque le point K appartient à la droite (AE), la parallèle à la droite (AI) passant par le point K doit être contenue dans le plan (AEI) qui est le plan de la face ABFE. Puisque la droite (KH) n'est pas contenue dans ce plan, la droite (KH) n'est pas parallèle à la droite (AI).

19. FAUX. Soient M un point du plan puis $M' = h_{\Omega', \frac{1}{k}}(M)$ et $M'' = h_{\Omega,k}(M')$ de sorte que $M'' = h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega', \frac{1}{k}}(M)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega M''} &= k\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + k\overrightarrow{\Omega' M'} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + k \times \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega' M} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega' M} \\ &= k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = (k-1)\overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega M}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{\Omega M''} - \overrightarrow{\Omega M} = (k-1)\overrightarrow{\Omega\Omega'} \neq \overrightarrow{0}$ car $k \neq 1$ et $\Omega \neq \Omega'$.

Ainsi, pour tout point M, $M'' \neq M$ ou encore $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega', \frac{1}{k}}(M) \neq M$. f n'est pas l'identité du plan.

20. VRAI. Pour tout point M du plan, $\dfrac{z+z'}{2} = \dfrac{b}{2}$. Si on note I le point d'affixe $\dfrac{b}{2}$, pour tout point M du plan, I est le milieu du segment $[M, M']$. f est donc la symétrie centrale de centre I.

21. FAUX. La contraposée de la proposition « si les nombres z et z' sont réels, alors le produit zz' est réel » est « si le produit zz' n'est pas réel, alors z **ou** z' n'est pas réel ».

Dénombrements et probabilités

22. FAUX. Il y a $\binom{9}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$ tirages simultanés de 2 jetons parmi les 9.

Les tirages pour lesquels on obtient exactement un jeton rouge et exactement un jeton portant le numéro 2 sont de deux types disjoints :

- Ceux où on a obtenu le jeton rouge n° 2 et un autre jeton qui est vert et ne porte pas le n° 2. Il y a 3 tels tirages.
- Ceux pour lesquels on a obtenu le jeton vert n° 2 et un jeton rouge ne portant pas le n° 2. Il y a 4 tels tirages.

Au total, il y a 7 tirages différents pour lesquels on obtient exactement un jeton rouge et exactement un jeton portant le numéro 2.

23. FAUX. Il y a $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ répartitions possibles des 4 boules dans les 3 urnes. Les répartitions pour lesquelles au moins une urne est vide sont de deux types disjoints.

- Type 1. Les répartitions pour lesquelles exactement une urne est vide. Il y a 3 possibilités pour l'urne vide et pour chacune de ces possibilités, il y a 2^4 répartitions possibles des 4 boules dans les 2 urnes restantes, auxquelles on retire les 2 répartitions où toutes les boules sont dans la même urne. Au total : $3\left(2^4 - 2\right)$.

- Type 2. Les répartitions pour lesquelles exactement deux urnes sont vides. Il y a exactement 3 telles répartitions.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

Au total, on obtient

$$3\left(2^4-2\right)+3=3\times\left(2^4-1\right)=45.$$

24. VRAI. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons R_n (resp. V_n) l'événement « on tire un jeton rouge (resp. vert) au n-ème tirage ». Déjà, $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(R_1)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1\times(1+1)}$.

Soit $n\geqslant 2$. $\{X=n\}=V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_{n-1}\cap R_n$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n)&=\mathbb{P}(V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_{n-1}\cap R_n)\\&=\mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}_{V_1}(V_2)\times\mathbb{P}_{V_1\cap V_2}(V_3)\times\ldots\times\mathbb{P}_{V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_{n-2}}(V_{n-1})\times\mathbb{P}_{V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_{n-1}}(R_n)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\text{ (produit télescopique)}\\&=\frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Algèbre linéaire

25. VRAI. $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2A$.

Montrons alors par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=2^{n-1}A$. L'égalité est vraie quand $n=1$.
Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $A^n=2^{n-1}A$. Alors

$$A^{n+1}=A^n\times A=2^{n-1}A\times A=2^{n-1}A^2=2^{n-1}\times 2A=2^{(n-1)+1}A.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

26. FAUX. $(AB)^T=B^TA^T=BA$ puis $(AB)^T=AB\Leftrightarrow AB=BA$. Le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent.

Un contre-exemple explicite est fourni par $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\notin\mathscr{S}_2(\mathbb{R}).$$

Problème n° 2 : calcul et géométrie

I - Autour du triangle rectangle

A. Une démonstration du théorème de Pythagore

1. Puisque les points A, B et D sont alignés dans cet ordre, $\widehat{ABC}+\widehat{CBE}+\widehat{EBD}=180°$. Les triangles ABC et BDE étant identiques, on a $\widehat{EBD}=\widehat{ACB}$ et donc

$$\begin{aligned}\widehat{CBE}&=180°-\left(\widehat{ABC}+\widehat{EBD}\right)=180°-\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)\\&=180°-\left(180°-\widehat{CAB}\right)\text{ (dans le triangle }ABC)\\&=\widehat{CAB}=90°.\end{aligned}$$

Ceci montre que les droites (BC) et (BE) sont perpendiculaires.

2. Les droite (AC) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (AD) et donc les droites (AC) et (DE) sont parallèles. Ceci montre que le quadrilatère ADEC est un trapèze.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

3. Puisque ADEC est un trapèze,

$$\text{aire de ADEC} = \frac{(AC+DE)AD}{2} = \frac{(b+c)^2}{2}.$$

D'autre part, l'aire du trapèze ADCE est égale à la somme des aires des triangles ABC, BCE et DBE. Donc,

$$\text{aire de ADEC} = 2 \times \text{aire de ABC} + \text{aire de BCE} = 2 \times \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + bc.$$

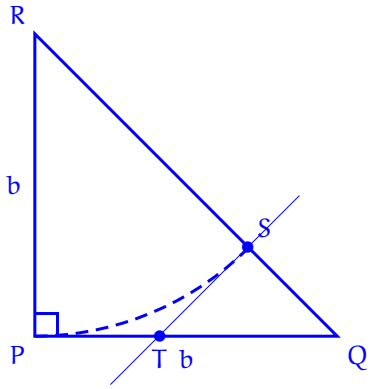
On a donc $\frac{a^2}{2} + bc = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2+2bc+c^2}{2}$ puis $a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$ et donc $a^2 = b^2 + c^2$. On a ainsi démontré que si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

B. Irrationalité de $\sqrt{2}$

4. $1 < 2 < 4$ et donc, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ ou encore $1 < \sqrt{2} < 2$. On en déduit encore que $2b > a > b \geqslant 2$ (car si $b = 1$, $\sqrt{2} = a$ est un entier strictement compris entre 1 et 2, ce qui est impossible).

5. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ fournit $a^2 = 2b^2$ puis $a^2 - ab = 2b^2 - ab$ ou encore $a(a-b) = b(2b-a)$ et finalement, $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{b-a}$.

6. Figure



7. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle PQR rectangle en P,

$$QR = \sqrt{PQ^2 + PR^2} = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2} = a.$$

8. Par hypothèse, $\widehat{TSQ} = 90°$ et donc le triangle QST est rectangle en S. D'autre part, le triangle PQR étant isocèle rectangle en P, $\widehat{SQT} = \widehat{RQP} = 45°$. Le dernier angle, à savoir $\widehat{STQ}$, est donc égal à $180° - 90° - 45°$ ou encore $\widehat{STQ} = 45° = \widehat{SQT}$. On en déduit que le triangle QST est rectangle et isocèle en S.

9. $SQ = RQ - RS = a - b$. Ensuite, par construction, le point T est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{PRQ}$ et donc le point T est à égale distance des droites (RP) et (RQ). On en déduit que $TP = TS$ puis que $TP = SQ = a - b$ (le triangle QST étant isocèle en S). Mais alors, $TQ = PQ - PT = b - (a-b) = 2b - a$.

Finalement, $\frac{TQ}{SQ} = \frac{2b-a}{a-b}$.

10. Les triangles QPR et QST ont les mêmes angles. Ces triangles sont donc semblables. On en déduit que

$$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{TQ}{SQ} = \frac{RQ}{PQ} = \frac{a}{b}.$$

On a ainsi retrouvé géométriquement l'égalité de la question 5.

$b' = a - b$ est un entier naturel non nul (car $a > b$) et de plus, $b - b' = b - (a-b) = 2b - a > 0$ (car $a < 2b$). Donc, $b' < b$. De même, $a' = 2b - a$ est un entier naturel non nul et de plus $a - a' = a - (2b-a) = 2(a-b) > 0$. Donc, $a' < a$.

On peut alors réitérer le procédé et on obtient deux suites d'entiers naturels (a_n) et (b_n) strictement décroissantes telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

$$\sqrt{2} = \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

Ceci est absurde car une suite strictement décroissante d'entiers naturels n'existe pas. En effet, si (a_n) est une suite strictement décroissante d'entiers naturels, alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_0 - n$ et en particulier, $a_{a_0+1} < 0$.

On a montré par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

II - Autour du triangle équilatéral

A. Irrationalité de $\sqrt{3}$

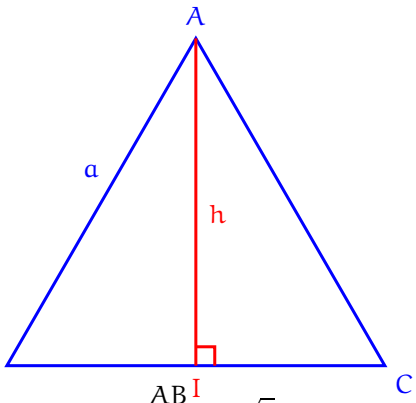
11. L'égalité $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ fournit $a^2 = 3b^2$ puis $2ab - 3b^2 = 2ab - a^2$ puis $b(2a-3b) = a(2b-a)$. On en déduit que

$$2a - 3b = \frac{a}{b}(2b-a) = \sqrt{3}(2b-a).$$

12. Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de hauteur h. Soit I le milieu du segment [BC]. Puisque le triangle ABC est équilatéral, la médiane (AI) est perpendiculaire au côté [BC]. D'après le théorème de Pythagore,

$$h = AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est alors $\mathscr{A} = \dfrac{BC \times AI}{2} = \dfrac{a \times a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.



13. Par construction, $\dfrac{AC}{AH} = \dfrac{a}{b} = \sqrt{3}$ et de même, $\dfrac{AB}{AG} = \sqrt{3}$. Le triangle ABC est l'image du triangle AGH par l'homothétie de centre A et de rapport $k = \sqrt{3}$. On sait alors que

$$\text{aire de } ABC = k^2 \text{aire de } AGH = 3 \text{ aire de } AGH.$$

14. $1 < 3 < 4$ et donc $1 = \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Ensuite, $\dfrac{a}{b} = \sqrt{3} < 2$ et donc $2b > a$ puis $AH + KC > AC$. Ceci montre que les segments [AH] et [KC] se chevauchent (et de même pour les segments [AG] et [BI] et les segments [BJ] et [CL] par symétrie) ou encore que les triangles AGH, IBJ et KLC se recouvrent comme sur la figure.

15. Puisque $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{AG}{AB}$ (et que $H \in [AC]$ et $G \in [AB]$), la droite (HG) est parallèle à la droite (BC) d'après le théorème de Thales. De même, la droite (KM) est parallèle à la droite (AB) et bien sûr, la droite (KH) est parallèle à la droite (AC) car égale à la droite (AC). Les triangles KMH et ABC sont donc semblables. En particulier, le triangle KMH est équilatéral.

De même, par symétrie, les triangles IGN et PLJ sont équilatéraux.

Enfin, (MN) = (MH) est parallèle à (BC), (MP) = (KM) est parallèle à (AB) et (NP) = (NI) est parallèle à (AC). Donc, le triangle MNP est semblable au triangle équilatéral ABC et est donc équilatéral.

16. $a = AB = AG + GB = AG + BI - GI = 2b - GI$ et donc $GI = 2b - a$. La longueur du côté de chacun des triangles IGN, KMH et PLJ est $2b - a$.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

$b = KL = KM + MP + PL = 2(2b-a) + MP$ et donc $MP = b - 2(2b-a) = 2a - 3b$. La longueur du côté du triangle MNP est $2a-3b$.

17. On note $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$, les aires respectives des triangles ABC et AGH (ou aussi BIJ ou CKL). On note encore $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ les aires respectives des triangles MNP et KMH (ou aussi IGN ou PLJ). On note enfin $\mathscr{A}_3$ l'aire du polygone AINMK (ou aussi BLPNG ou CHMPJ).

D'après la question 13, $\mathscr{A} = 3\mathscr{A}' = 3(2\mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3)$. Mais d'autre part, $\mathscr{A} = 3\mathscr{A}_3 + 3\mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_1$. Donc,

$$3\mathscr{A}_3 + 3\mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_1 = 6\mathscr{A}_2 + 3\mathscr{A}_3$$

puis $\mathscr{A}_1 = 3\mathscr{A}_2$. L'aire du triangle MNP est le triple de l'aire du triangle KHM.

18. D'après les questions 12. et 16., l'aire de KMH est $(2b-a)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ et l'aire de MNP est $(2a-3b)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. On a donc $(2a-3b)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 3\times(2b-a)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ puis $(2a-3b)^2 = 3(2b-a)^2$ puis en prenant les racines carrées des deux membres, $|2a-3b| = \sqrt{3}|2b-a|$ $(\star)$.

Ensuite, $\frac{a}{b} = \sqrt{3} < 2$ fournit $2b-a > 0$. D'autre part, puisque $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < 3$, on en déduit que $\frac{a}{b} = \sqrt{3} > \frac{3}{2}$ puis que $2a-3b > 0$. L'égalité $(\star)$ s'écrit finalement $2a-3b = \sqrt{3}(2b-a)$ et on a ainsi retrouvé géométriquement l'égalité de la question 11.

Posons $a' = 2a-3b$ et $b' = 2b-a$. a' et b' sont deux entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{3} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. De plus, $a - a' = a - (2a-3b) = 3b - a > 0$ car $\frac{a}{b} = \sqrt{3} < 2 < 3$ et donc $a < 3b$. De même, $b - b' = b - (2b-a) = a - b > 0$ car $\frac{a}{b} = \sqrt{3} > 1$ et donc $a > b$.

Par le même raisonnement qu'à la question 10., ceci montre par l'absurde que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

B. Théorème de Lucas

19. $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. Donc, C est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'expression complexe de cette rotation est $z' = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$. Donc,

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A).$$

20. Supposons que les points A, B et C soient à coordonnées rationnelles. Alors, le nombre complexe $2\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2\frac{(z_C - z_A)(\overline{z_B} - \overline{z_A})}{|z_B - z_A|^2}$ a une partie réelle et une partie imaginaire qui sont des nombres rationnels (car $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps).

Ce nombre ne peut être égal à $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ car la partie imaginaire de ce nombre, à savoir $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel d'après la question 18. Donc, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets soient à coordonnées rationnelles.

III - Irrationalité de e par la méthode de Sondow

21. a. Pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x)f(-x)$. Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction φ puis, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout réel x, $\varphi(x) = \varphi(0) = (f(0))^2 = 1$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x)\exp(-x) = 1.$$

En particulier, pour tout réel x, $\exp(x)\exp(-x) \neq 0$ puis $\exp(x) \neq 0$.

b. La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. f a donc sur $\mathbb{R}$ le signe de $f(0) = 1$ et finalement la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

Mais alors, la fonction $f' = f$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ puis la fonction $f = \exp$ est strictement croissante (et strictement positive) sur $\mathbb{R}$.

22. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{(1-t)^n}{n!}\exp(t)$ est continue, positive et non nulle sur $[0,1]$. Donc, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt > 0$. De même, pour tout $t \in [0,1[$, $\exp(t) < \exp(1) = e$ et donc, la fonction $g_n : t \mapsto \dfrac{(1-t)^n}{n!}(e - \exp(t))$ est continue, positive et non nulle sur $[0,1]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}(e-\exp(t))\,dt > 0$ puis que

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\exp(t)\,dt < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e\,dt = e\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}.$$

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \dfrac{e}{(n+1)!}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v : t \mapsto \exp(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(t)\,dt = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(t)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-t)^n}{n!}\exp(t)\,dt = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_{n+1} + I_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1} = S_n + I_n$ (d'après la question précédente). La suite $(S_n + I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n + I_n = S_0 + I_0 = 1 + \int_0^1 \exp(t)\,dt = 1 + [\exp(t)]_0^1 = 1 + e - 1 = e.$$

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n + I_n = e$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = e - I_n$. Or, d'après la question 22.a. et le théorème des gendarmes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Mais alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e.

23. a. Montrons par récurrence que pour tout $k \geqslant 4$, $k! > 2^k$.

- $4! = 24 > 16 = 2^4$. L'inégalité est vraie quand $k = 4$.
- Soit $k \geqslant 4$. Supposons que $k! > 2^k$. Alors,

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \times k! \\ &> (k+1) \times 2^k \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &> 2 \times 2^k \text{ (car } k+1 \geqslant 5 > 2) \\ &= 2^{k+1}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $k \geqslant 4$, $k! > 2^k$.

b. D'après les questions 22.b. et 22.c., $I_1 = -\dfrac{1}{1!} + I_0 = -1 + e - 1 = e - 2$. De même, $I_2 = -\dfrac{1}{2} + I_1 = e - \dfrac{5}{2}$.

c. D'après la question 22.a., $e - \dfrac{5}{2} = I_2 < \dfrac{e}{3!}$ puis $\dfrac{5e}{6} < \dfrac{5}{2}$ et finalement $e < 3$.

d. Soit $n \geqslant 2$. $I_n < \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{1}{n!} \times \dfrac{3}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n!} \times \dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{n!}$ (car $n+1 \geqslant 3$). D'autre part, $I_1 = e - 2 < 3 - 2 = 1 = \dfrac{1}{1!}$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n < \dfrac{1}{n!}$.

e. La suite $\left(2^{-k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus, $2^{-9} = \dfrac{1}{512} > 10^{-3}$ et $2^{-10} = \dfrac{1}{1024} < 10^{-3}$. Le plus petit entier k tel que $2^{-k} < 10^{-3}$ est $k_0 = 10$.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

f. Pour tout $k \geqslant 4$, $|e - S_k| = I_k < \dfrac{1}{k!} < 2^{-k}$ et en particulier, $|e - S_{10}| < 2^{-10} < 10^{-3}$. Le nombre

$$r = S_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}$$

est un nombre rationnel tel que $|e - r| < 10^{-3}$. Le calcul donne $e = 2,718\ldots$

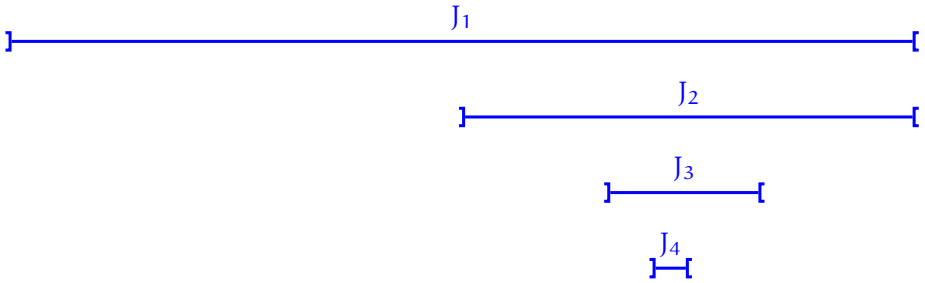
g. D'après les questions 22.c. et 23.d., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|e - S_n| = I_n < \dfrac{1}{n!}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \in \mathbb{Q}$. On en déduit l'écriture de la fonction Python demandée.

```
from math import factorial

def approximation(m):
    S_n = 0.0
    n = 0
        while True:
        S_n += 1 / factorial(n)
        if 1 / factorial(n) <= 10**(-m):
            break
        n += 1

    return S_n
```

24. a. Représentation graphique.



b. $J_2 = \left]\dfrac{5}{2}, 3\right[= \left]\dfrac{5}{2!}, \dfrac{6}{2!}\right[$.

$J_3 = \left]\dfrac{5}{2!} + \dfrac{1}{3!}, \dfrac{5}{2!} + \dfrac{2}{3!}\right[= \left]\dfrac{3\times 5+1}{3!}, \dfrac{3\times 5+2}{3!}\right[= \left]\dfrac{16}{3!}, \dfrac{17}{3!}\right[$.

$J_4 = \left]\dfrac{16}{3!} + \dfrac{1}{4!}, \dfrac{16}{3!} + \dfrac{2}{4!}\right[= \left]\dfrac{4\times 16+1}{4!}, \dfrac{4\times 16+2}{4!}\right[= \left]\dfrac{65}{4!}, \dfrac{66}{4!}\right[$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(S_n + \dfrac{1}{n!}\right) - \left(S_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!}\right) = -\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-2}{(n+1)!} = \dfrac{n-1}{(n+1)!} \geqslant 0$. D'autre part, $S_n < S_{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n < S_{n+1} < S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \leqslant S_n + \frac{1}{n!},$$

et donc $J_{n+1} \subset J_n$.

d. La suite (S_n) tend vers e en croissant strictement. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < e$. D'autre part, d'après les questions 22.c. et 23.d., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e = S_n + I_n < S_n + \frac{1}{n!}.$$

En résumé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < e < S_n + \dfrac{1}{n!}$ ou encore, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e \in J_n$ ou enfin,

$$e \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

e. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{k}{n!} \in J_n \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} < \frac{k}{n!} < \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!} \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!} < k < \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!} + 1.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\frac{n!}{p!}$ est un entier naturel et donc, $A = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!}$ et $B = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!} + 1$ sont deux entiers naturels consécutifs. Il n'existe pas d'entier naturel k strictement compris entre deux entiers naturels consécutifs et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k}{n!} \notin J_n$.

f. Supposons par l'absurde que e soit rationnel. Il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $e = \frac{a}{b}$. Mais alors, $e = \frac{p}{q!}$ avec $p = a \times (b-1)!$ et $q = b$, p et q étant deux entiers naturels non nuls. D'après la question précédente, $e \notin J_b$ et donc $e \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n$, ce qui contredit le résultat de la question 24.d.

On a montré par l'absurde que e est irrationnel.

IV -Polygones à angles rationnels

A. Un premier exemple

25. a. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \text{Im}\left(e^{3ix}\right) = \text{Im}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) = \text{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))^3\right)\\ &= \text{Im}\left(\cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - 3i\sin^3(x)\right)\\ &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3\left(1 - \sin^2(x)\right)\sin(x) - \sin^3(x)\\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$

b. Posons $a = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$. D'après la question précédente,

$$3a - 4a^3 = 3\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{18}\right) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{18}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Par suite, $8a^3 - 6a + 1 = 0$ puis a est racine du polynôme $P = 8X^3 - 6X + 1$.

26. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 24x^2 - 6 = 24\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 24\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

La fonction f' est strictement positive sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et strictement négative sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3 > 0$. La fonction f s'annule donc exactement une fois sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, en un certain réel α. De plus, $f(-1) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$ et donc $f(-1) < f(\alpha) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Par stricte croissance de la fonction f sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, on en déduit que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. De plus, $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$. La fonction f s'annule donc exactement une fois sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, en un certain réel β. De plus,

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

$f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{8^3} - \frac{6}{8} + 1 = \frac{1}{64} + \frac{1}{4} > 0$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{4^3} - \frac{6}{4} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} < 0$. Donc, $f\left(\frac{1}{8}\right) > f(\beta) > f\left(\frac{1}{4}\right)$. Par stricte décroissance de la fonction f sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que $\frac{1}{8} < \beta < \frac{1}{4}$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. La fonction f s'annule donc exactement une fois sur $\left[\frac{1}{2} + \infty\right[$, en un certain réel γ. De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ et $f(1) = 3 > 0$. Donc, $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\gamma) < f(1)$. Par stricte croissance de la fonction f sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on en déduit que $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

27. a. Soient a et b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. En élevant les deux membres à l'exposant k, on a $(au + bv)^k = 1$ ou encore, d'après la formule du binôme de Newton,

$$(v^k)\, b^k + a\left(\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} u^{k-p} v^p a^{k-p-1} b^p\right) = 1.$$

Les nombres v^k et $\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} u^{k-p} v^p a^{k-p-1} b^p$ sont des entiers relatifs et donc, d'après le théorème de Bézout, les entiers a et b^k sont premiers entre eux.

b. $0 = f(r) = \left(\frac{s}{t}\right)^3 - 6\left(\frac{s}{t}\right) + 1 = \frac{8s^3 - 6st^2 + t^3}{t^3}$ et donc $8s^3 - 6st^2 + t^3 = 0$.

c. s divise $s\left(6t^2 - 8s^2\right) = 6st^2 - 8s^3 = 1 \times t^3$ et s est premier à t^3 d'après la question précédente. D'après le théorème de Gauss, s divise 1 et donc $s \in \{-1, 1\}$.

On peut supposer sans perte de généralité que $s = 1$ (l'entier t donnant le signe du nombre r). On a donc $t^3 - 6t^2 + 8 = 0$. t divise $t\left(6t - t^2\right) = 6t^2 - t^3 = 8$ et donc $t \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$.

Il n'existe pas de nombre de la forme $r = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{Z}^*$, dans chacun des intervalles $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Donc, nécessairement, $\frac{1}{t} = r = \beta \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right[$ puis $4 < t < 8$.

d. Il est impossible que $t \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$ et vérifie de plus $4 < t < 8$. Donc, P n'a pas de racine rationnelle. Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est l'une des racines de P, $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.

28. Soit ABC un triangle rectangle en A dont les côtés ont des longueurs rationnelles. Soit θ un des angles de ce triangle, distinct de l'angle droit.

La formule $\sin(\theta) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$ montre que $\sin(\theta)$ est un rationnel (en tant que quotient de deux rationnels non nuls). θ ne peut donc être égal à $\frac{\pi}{18}$.

B. Théorème de Niven

29. a. $P(r) = \left(\frac{s}{t}\right)^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k \left(\frac{s}{t}\right)^k = \frac{1}{t^d}\left(s^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k}\right)$ puis

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow s^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k} = 0 \Leftrightarrow s^d = -t\sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k-1}.$$

b. Ainsi, si $P(r) = 0$, t divise $-t\sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k-1}$ (car $\sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k-1}$ est un entier) et donc t divise $s^d = 1 \times s^d$. Mais t est premier à s et donc à s^d d'après la question 27.a. D'après le théorème de Gauss, t divise 1 puis $t \in \{-1, 1\}$. Mais alors, $r = \frac{s}{t}$ est un entier relatif.

Ainsi, une éventuelle racine rationnelle de P est nécessairement un entier.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.

30. a. $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$. Ensuite, $P_3 = XP_2 - P_1 = X\left(X^2-2\right) - X = X^3 - 3X$.
Enfin, $P_4 = XP_3 - P_2 = X\left(X^3 - 3X\right) - \left(X^2-2\right) = X^4 - 4X^2 + 2$.

$$P_2 = X^2 - 2 \quad P_3 = X^3 - 3X \quad P_4 = X^4 - 4X^2 + 2.$$

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme de degré n, unitaire, à coefficients entiers $(\mathscr{P}_n)$.

- Puisque $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 2$, $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont vraies.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons $(\mathscr{P}_n)$ et $(\mathscr{P}_{n+1})$. P_{n+1} est donc de degré $n+1$ et unitaire puis XP_{n+1} est de degré $n+2$ et unitaire. Enfin, $\deg(P_n) < \deg(XP_{n+1})$ et donc $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ est de degré $n+2$ et unitaire.
  D'autre part, P_n et P_{n+1} étant à coefficients entiers, il en est de même de $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme de degré n, unitaire, à coefficients entiers.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$.

- $P_1(2\cos(x)) = 2\cos(x)$ et $P_2(2\cos(x)) = 4\cos^2(x) - 2 = 2\left(2\cos^2(x) - 1\right) = 2\cos(2x)$. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$ et $n = 2$
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$ et $P_{n+1}(2\cos(x)) = 2\cos((n+1)x)$. Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+2}(2\cos(x)) &= 2\cos(x)P_{n+1}(2\cos(x)) - P_n(2\cos(x)) = 4\cos(x)\cos((n+1)x) - 2\cos(nx) \\ &= 2(\cos(nx) + \cos((n+2)x)) - 2\cos(nx) \\ &= 2\cos((n+2)x). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$.

31. a. $P_t(2\cos(r\pi)) = 2\cos(tr\pi) = 2\cos(s\pi) = 2(-1)^s$. Le polynôme $Q = P_t - 2(-1)^s$ est donc un polynôme tel que $Q(2\cos(r\pi)) = 0$. Q est de degré t et unitaire (car $t \geqslant 1$), à coefficients entiers.

b. Ainsi, $2\cos(r\pi)$ est racine d'un polynôme non nul, unitaire, à coefficients entiers. Si de plus $\cos(r\pi)$ est rationnel et donc $2\cos(r\pi)$ est rationnel, alors $2\cos(r\pi)$ est entier d'après la question 29.b.

Mais d'autre part, $2\cos(r\pi) \in [-2,2]$ et donc $2\cos(r\pi) \in \{-2,-1,0,1,2\}$ puis $\cos(r\pi) \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

C. Applications du théorème de Niven : triangles à côtés et angles rationnels

32. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$. a, b et c sont par hypothèse trois nombres rationnels. D'après la formule d'Al Kashi,

$$\cos\left(\widehat{A}\right) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \in \mathbb{Q}.$$

De même, $\cos\left(\widehat{B}\right)$ et $\cos\left(\widehat{C}\right)$ sont des nombres rationnels.

33. On suppose de plus que $\widehat{A} = \alpha\pi$, $\widehat{B} = \beta\pi$ et $\widehat{C} = \gamma\pi$ où α, β et γ sont trois nombres rationnels de $]0,1[$. Déjà, l'égalité $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ fournit $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

$\cos(\alpha\pi)$ est rationnel d'après la question précédente. Puisque $\cos(\alpha\pi) \in]-1,1[$, $\cos(\alpha\pi) \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ d'après le théorème de Niven. Puisque $\alpha\pi \in]0,\pi[$, on en déduit que $\widehat{A} = \alpha\pi \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\}$. De même, $\widehat{B} = \beta\pi \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ et $\widehat{C} = \gamma\pi \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Si $\widehat{A} = \frac{2\pi}{3}$, alors $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ et si $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, alors $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Mais ceci est impossible car $\widehat{B} + \widehat{C} \geqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ avec $\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$.

Finalement, $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$ et de même, $\widehat{B} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$. On a montré que le triangle ABC est nécessairement équilatéral.

 © Jean-Louis Rouget, 2026. Tous droits réservés.