CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème n° 1 : VRAI-FAUX

Proportionnalité

1. FAUX. Soit m un réel différent de -1. $\dfrac{1-m}{8} = \dfrac{-3}{1+m} \Leftrightarrow 1 - m^2 = -24 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow m = 5$ ou $m = -5$. Il existe donc deux valeurs distinctes de m telles que le tableau proposé soit un tableau de proportionnalité.

2. FAUX. Soit c le coût initial et c' le coût final. $c' = (1-0,28)(1+0,55)c = 0,72 \times 1,55 = 1,116c$. L'augmentation est $c' - c = 0,116c$. Le pourcentage d'augmentation est $\dfrac{c'}{c} \times 100 = 11,6$. Au total, le coût subit une augmentation de $11,6\%$.

3. FAUX. Notons r (resp. r') le rayon du disque avant (resp. après) augmentation. Donc $\dfrac{r'}{r} = 1,22$. Notons A (resp. A') l'aire du disque avant (resp. après) augmentation.

$$\frac{A'}{A} = \frac{r'^2}{r^2} = (1,22)^2 = 1,4884.$$

L'aire du disque augmente donc de $48,84\%$.

Analyse

4. FAUX. Pour tout réel t de $[0,1]$, $t^2 \leqslant t$ puis $-t^2 \geqslant -t$ puis $e^{-t^2} \geqslant e^{-t}$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Mais alors, par croissance de l'intégration,

$$F(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\ dt \geqslant \int_0^1 e^{-t}\ dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Plus précisément, $F(1) - \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) = \displaystyle\int_0^1 \left(e^{-t^2} - e^{-t}\right) dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle. Donc, $F(1) - \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) > 0$ puis $F(1) > 1 - \dfrac{1}{e}$ (des considérations graphiques montrent aussi que l'inégalité est une inégalité stricte).

5. VRAI. Soit $t \geqslant 1$. Pour tout $x \in [1,t]$, $\dfrac{1}{t^2}x^2 = \left(\dfrac{x}{t}\right)^2 \geqslant 1$ puis $\dfrac{1}{t^2}x^2 \ln(x) \geqslant \ln(x)$ après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel positif $\ln(x)$. Mais alors $\dfrac{A(t)}{t^2} \geqslant \displaystyle\int_1^t \ln(x)\ dx$.

Une intégration par parties fournit : $\displaystyle\int_1^t \ln(x)\ dx = [x\ln(x)]_1^t - \int_1^t x \times \frac{1}{x}\ dx = t\ln(t) - \int_1^t 1\ dt = t\ln(t) - t + 1 = t(\ln(t) - 1) + 1$. Donc,

$$\forall t \geqslant 1,\ \frac{A(t)}{t^2} \geqslant t(\ln(t) - 1) + 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t(\ln(t) - 1) + 1 = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{A(t)}{t^2} = +\infty$.

6. FAUX. La bonne définition est : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A)$. On note qu'aucune suite réelle ne vérifie l'assertion de l'énoncé car il n'est pas possible que pour n supérieur ou égal à un certain n_0, u_n soit supérieur ou égal à tous les réels A.

Arithmétique

7. FAUX. $\dfrac{3}{11} = 0,272727272727\ldots$

8. FAUX. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel mais $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ est un nombre irrationnel.

9. FAUX. La contraposée de l'implication « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair » est « n impair $\Rightarrow n^2$ impair ».

10. FAUX. La somme des chiffres en base 10 de l'entier naturel 3 est divisible par 3 mais l'entier naturel 3 n'est pas divisible par 9.

11. FAUX. Soient $n = 4$, $a = 2$ et $b = 0$. $2a = 4$ et $2b = 0$ puis $4 \equiv 0$ [4]. Mais $2 \not\equiv 0$ [4].

12. FAUX. Si $n = 2$, la somme des deux premiers entiers impairs est 4. Mais le carré de $2 \times 2 + 1$ est 25. (Pour $n \geqslant 1$, la somme des des n premiers entiers impairs est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$).

13. VRAI. Soit n un entier naturel. Si $n \not\equiv 0$ [5], alors $n \equiv 1$ [5] ou $n \equiv -1$ [5] ou $n \equiv 2$ [5] ou $n \equiv -2$ [5]. Mais alors, $n^2 \equiv 1$ [5] ou $n^2 \equiv -1$ [5].

Supposons que ni b, ni c, ne soient divisibles par 5, alors modulo 5, $b^2 + c^2$ est congru à -2, 0 ou 2. Si $b^2 + c^2$ est congru à -2 ou 2, alors $a^2 \neq b^2 + c^2$ car a^2 n'est pas congru à -2 ou à 2 modulo 5. Il ne reste que $a^2 \equiv 0$ [5] ce qui n'est possible que si $a \equiv 0$ [5]. En résumé, si b et c ne sont pas divisibles par 5, alors a est nécessairement divisible par 5. Et sinon, b ou c est un entier divisible par 5.

Géométrie

14. VRAI. Notons θ, 2θ et 3θ les mesures en degré des angles d'un certain triangle. Alors, $\theta + 2\theta + 3\theta = 180$ puis $6\theta = 180$ puis $\theta = 30$. Mais alors, les angles de ce triangle ont des mesures de $30°$, $60°$ et $90°$. Ce triangle est donc un triangle rectangle.

15. VRAI. On oriente le plan de sorte que $B = r(D)$ et $E = r(C)$ où $r = r_{A,\frac{\pi}{3}}$ est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Puisque r est une ismométrie,

$$BE = r(D)r(C) = DC.$$

16. VRAI. Un vecteur directeur de D (resp. D') est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, -1, -2)$ (resp. $(1, -1, -5)$). Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc D et D' ne sont pas parallèles. Par suite, D et D' sont sécantes ou non coplanaires.

Soient $M(1+t, 3-t, 5-2t)$ un point de D et $M' = (1+u, 2-u, -5u-1)$ un point de D' où t et u sont deux réels.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+t = 1+u \\ 3-t = 3-u \\ 5-2t = -5u-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = t \\ 6-2t = -5t-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = t \\ t = -2 \end{array}\right. .$$

Le point de coordonnées $(-1, 5, 9)$, obtenu pour $t = -2$, est un point commun à D et D'. Donc, les droites D et D' sont sécantes et en particulier coplanaires.

17. VRAI. Soit $ax + by + cz + d = 0$ une équation du plan (ABG) où a, b, c et d sont quatre réels non tous nuls. Le point $A(1, 0, 0)$ est dans ce plan et donc $a + d = 0$ puis $d = -a$. Le point $B(1, 1, 0)$ et dans ce plan et donc $a + b + d = 0$ puis $b = 0$. Le point $G(0, 1, 1)$ est dans ce plan et donc $b + c + d = 0$ puis $c = -d = a$. En prenant $a = 1$, on obtient une équation du plan (ABG) : $x + z - 1 = 0$.

Ensuite, $x_K + z_K - 1 = 9 - 8 - 1 = 0$ et donc le point K appartient au plan (ABG).

Dénombrement. Probabilités

18. VRAI. Notons $\mathscr{P}_a$ (resp. $\overline{\mathscr{P}_a}$) l'ensemble des parties de E qui contiennent a (resp. qui ne contiennent pas a).

Soient $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_a & \to & \overline{\mathscr{P}_a} \\ A & \mapsto & A \setminus \{a\} \end{array}$ et $\Psi : \begin{array}{ccc} \overline{\mathscr{P}_a} & \to & \mathscr{P}_a \\ A & \mapsto & A \cup \{a\} \end{array}$. Φ et Ψ sont deux applications vérifiant $\Phi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\overline{\mathscr{P}_a}}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}_a}$. On sait alors que Φ est une bijection et en particulier, $\mathscr{P}_a$ et $\overline{\mathscr{P}_a}$ ont le même nombre d'éléments.

19. VRAI. Un chemin du départ à l'arrivée s'identifie à un mot de 10 lettres constitués de 7 lettres D et 3 lettres H, D signifiant déplacement d'une unité vers la droite et H signifiant déplacement d'une unité vers le haut. Il y a autant de tes mots que de choix des emplacements des trois lettres H dans 10 positions à savoir

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120.$$

20. VRAI. Notons X la variable égale au nombre d'appels téléphoniques reçus par l'agence au cours d'une heure. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ où $\lambda = \mathbb{E}(X) = 8$. La probabilité demandée est $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$ si le mot « plus » signifie supérieur ou égal.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) = 1 - \left(1 + 8 + \frac{8^2}{2}\right) e^{-8} = 1 - 41e^{-8} = 0,98\ldots$$

Si le mot « plus » signifie strictement supérieur, la probabilité demandée est $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \left(41 + \dfrac{8^3}{6}\right) e^{-8} = 0,957\ldots$

21. VRAI. Supposons A et B indépendants.

$$\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}\left(\overline{B}\right).$$

Donc, A et $\overline{B}$ sont indépendants. En appliquant ce résultats aux événements $\overline{B}$ et A, on obtient le fait que $\overline{B}$ et $\overline{A}$ sont indépendants. Ainsi, si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi deux événements indépendants.

En appliquant ce résultat aux événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$, on obtient la réciproque de l'implication précédente et donc l'équivalence des deux affirmations.

22. VRAI. On note Ω l'ensemble $\mathscr{S}_n$ des permutations de $[\![1,n]\!]$ de sorte que $\text{card}(\Omega) = n!$. Une coïncidence d'une répartition donnée des boules dans les urnes s'identifie à un point fixe de la permutation correspondante. On note X la variable aléatoire égale aux nombres de points fixes d'une permutation donnée : $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $X(\sigma) = \text{card}\{k \in [\![0,n]\!] / \ \sigma(k) = k\}$.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire définie par : $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $X_k(\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(k) = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Alors, $X = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$ puis, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(X_k) = n\mathbb{E}(X_1),$$

les variables X_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, ayant bien sûr même loi. Ensuite, une permutation fixant 1 s'identifie à une permutation de $[\![2,n]\!]$. Il y en a $(n-1)!$ et donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$ et on sait que $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{n}$. Finalement,

$$\mathbb{E}(X) = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Algorithmique

23. VRAI. On suppose avoir établi l'existence et l'unicité d'une solution x_0 de l'équation dans $[0,2]$.
On entre $a = 0$ et $b = 2$. Tant que $b - a > 0,001$, on partage l'intervalle $[a,b]$ en deux demi-intervalles et on garde celui des deux intervalles qui contient la racine car, si $f(a)f(m) < 0$, $x_0 \in [a,m]$ et si $f(a)f(m) > 0$, $x_0 \in [m,b]$. Dès que $b - a \leqslant 0,001$, le programme s'arrête et renvoie a et b. a et b sont deux valeurs telles que $a \leqslant x_0 \leqslant b$ et $b - a \leqslant 0,001$.

Problème n° 2 : quelques modèles de dynamique d'une population

Le modèle logistique discret

Le cas $0 < a \leqslant 1$.

1. f_a est un trinôme du second degré s'annulant en 0 et 1 et de coefficient dominant $-a < 0$. Son tableau de variation est

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f'_a		$+$	0	$-$	
f_a	0	$\nearrow$	$a/4$	$\searrow$	0

2. Par suite, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_a(x) \leqslant \dfrac{a}{4} \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant 1$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.

- L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $v_n \in [0,1]$. Alors, $v_{n+1} = f(v_n) \in [0,1]$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.

3. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ, alors, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

Puisque f_a est continue sur $[0,1]$ et en particulier en ℓ,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f_a(v_n) = f_a\left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) = f_a(\ell).$$

4. Soit $x \in [0,1]$.

$$f_a(x) = x \Leftrightarrow ax(1-x) = x \Leftrightarrow ax\left(1 - x - \frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 - \frac{1}{a}.$$

De plus, si $a < 1$, $\dfrac{1}{a} > 1$ puis $1 - \dfrac{1}{a} > 1$ et en particulier, $1 - \dfrac{1}{a} \notin [0,1]$. Si $a = 1$, $1 - \dfrac{1}{a} = 0$. Dans tous les cas, l'équation $f_a(x) = x$ admet une solution et une seule dans $[0,1]$ à savoir 0.

5. Pour $x \in [0,1]$, $g_a(x) = ax\left(1 - \dfrac{1}{a} - x\right)$. Pour $x \in [0,1]$, $ax \geqslant 0$ et $1 - \dfrac{1}{a} - x \leqslant 0$. Donc, $g_a(x) \leqslant 0$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = g_a(v_n)$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$, la question précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

7. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, d'après les questions 3. et 4., $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

8. Ainsi, la taille de la population décroît et la population se dirige vers l'extinction.

Le cas $a = \dfrac{5}{2}$**.**

9. Soit $x \in [0,1]$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5}{2}x(1-x) = x \Leftrightarrow \frac{5}{2}x\left(1 - x - \frac{2}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{5} - x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5}.$$

La fonction f admet exactement deux points fixes dans $[0,1]$, à savoir 0 et $\dfrac{3}{5}$.

10. Donnons les 5 premières valeurs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un tableau, en arrondissant à 10^{-3} :

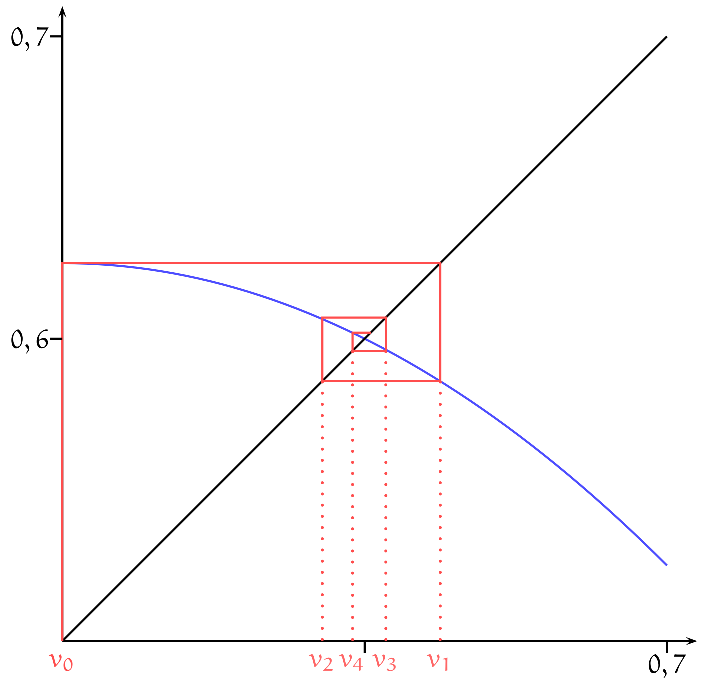
n	0	1	2	3	4
v_n	$0,5$	$0,625$	$0,586$	$0,607$	$0,597$

11. Algorithme.

$V = 0$
Pour k allant de 1 à 10
    $V \leftarrow 2,5 * V * (1 - V)$
Afficher V

On obtient $v_{10} =$ à 10^{-3} près

12. Graphique.



13. Pour tout réel x de $[0,1]$,

$$f\circ f(x)=\frac{5}{2}f(x)(1-f(x))=\frac{25}{4}x(1-x)\left(1-\frac{5}{2}x(1-x)\right)=\frac{25}{8}x(1-x)\left(5x^2-5x+2\right)$$

puis

$$h(x)=\frac{25}{8}x(1-x)\left(5x^2-5x+2\right)-x=\frac{x}{8}\left(25(1-x)\left(-5x^2+5x+2\right)-8\right)=-\frac{x}{8}\left(125x^3-125x^2+75x-42\right)$$
$$=-\frac{x(5x-3)\left(25x^2-35x+14\right)}{8}.$$

14. Les points fixes de $f\circ f$ sont les solutions de l'équation $h(x)=0$. Le discriminant du trinôme $25X^2-35X+14$ est $\Delta=35^2-4\times25\times14=1225-1400=-175<0$. Ce trinôme n'a pas de racine réelle et donc les points fixes de $f\circ f$ sont 0 et $\frac{3}{5}$. D'après la question 9., f et $f\circ f$ ont les mêmes points fixes, à savoir 0 et $\frac{3}{5}$.

15. Le trinôme $P\ :\ x\mapsto 25x^2-35x+14$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est donc du signe de $P(0)=14$. Par suite, le trinôme $x\mapsto 25x^2-35x+14$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Le signe de la fonction h est donc le signe de $-x(5x-3)$. On en déduit que la fonction h est strictement positive sur $\left]0,\frac{3}{5}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{3}{5},1\right]$ et s'annule en 0 et $\frac{3}{5}$.

16. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{2n+2}=f\left(v_{2n+1}\right)=f\circ f\left(v_{2n}\right)$.

$v_0=\frac{1}{2}\in\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$ et si pour $n\geqslant0$, $v_{2n}\in\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$, alors $v_{2n+2}=f\circ f\left(v_{2n}\right)\in\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$ d'après le résultat admis par l'énoncé. On a montré par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{2n}\in\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{2(n+1)}-v_{2n}=f\circ f\left(v_{2n}\right)-v_{2n}=h\left(v_{2n}\right)$ et donc $v_{2(n+1)}-v_{2n}\geqslant0$ car $v_{2n}\in\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$ et d'après la question précédente. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{2(n+1)}\geqslant v_{2n}$. La suite $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

17. La suite $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{3}{5}$. Donc, la suite $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ qui est un point fixe de $f\circ f$. $\ell\in\left\{0,\frac{3}{5}\right\}$ d'après la question 14. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{2n}\geqslant\frac{2}{5}$ ce qui fournit $\ell\geqslant\frac{2}{5}$ quand n tend vers $+\infty$. Finalement, $\ell=\frac{3}{5}$.

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+1} = f(v_{2n})$. Par continuité de f en $\ell = \dfrac{3}{5}$, la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(v_{2n}) = f(\ell) = \frac{3}{5}.$$

Les deux suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite, à savoir $\dfrac{3}{5}$. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{5}$.

19. La taille de la population à long terme se stabilisera autour de $\dfrac{6}{5}$ de la population initiale (c'est-à-dire une augmentation de 20% de cette population initiale), en oscillant légèrement autour de cette valeur limite.

Le modèle logistique continu

20. a) Pour tout réel $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, M\}$,

$$\frac{1}{z(M-z)} = \frac{1}{M} \times \frac{M-z+z}{z(M-z)} = \frac{1}{M} \times \frac{1}{z} + \frac{1}{M} \times \frac{1}{M-z}.$$

Puisque pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 < y(t) < M$,

$$\forall t \geqslant 0,\ y'(t) = ay(t)(M-y(t)) \Leftrightarrow \forall t \geqslant 0, \frac{y'(t)}{y(t)(M-y(t))} - a = 0 \Leftrightarrow \forall t \geqslant 0, \frac{1}{M} \times \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{1}{M} \times \frac{y'(t)}{M-y(t)} - a = 0.$$

b) Puisque les fonctions y et $M - y$ sont strictement positives sur $[0, +\infty[$, une primitive de la fonction ψ sur $[0, +\infty[$ est la fonction $\Psi\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{M}\ln(y(t)) - \dfrac{1}{M}\ln(M-y(t)) - at$.

21. Par suite, il existe un réel C tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{M}\ln\left(\dfrac{y(t)}{M-y(t)}\right) - at = C$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant 0,\ \frac{1}{M}\ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) - at = C &\Rightarrow \forall t \geqslant 0,\ \ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) = aMt + MC \\ &\Rightarrow \forall t \geqslant 0,\ \frac{y(t)}{M-y(t)} = e^{MC} \times e^{aMt} \Rightarrow \forall t \geqslant 0,\ y(t) = e^{MC} \times e^{aMt}(M-y(t)) \\ &\Rightarrow \forall t \geqslant 0,\ y(t) = \frac{Me^{MC} \times e^{aMt}}{1 + e^{MC}e^{aMt}}\end{aligned}$$

Donc, pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) = \dfrac{Mce^{aMt}}{1 + ce^{aMt}}$ où $c = e^{MC} > 0$

22. Puisque $M > 0$ et $c > 0$, $y(t) = \dfrac{Mce^{aMt}}{1 + ce^{aMt}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{Mce^{aMt}}{ce^{aMt}} = M$

23. A l'aide, la taille de la population se stabilisera légèrement en dessous de la valeur M.

Un modèle prédateurs-proies discret

24. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - \alpha y_n \\ y_n + \alpha x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

- Puisque $A^0 = I_2$, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \times A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. .

25. a) Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}(A))X + \det(A) = X^2 - 2X + 1\alpha^2 = (X-1)^2 - (i\alpha)^2 = (X-1-i\alpha)(X-1+i\alpha).$$

La matrice A admet donc deux valeurs propres simples, non réelles et conjuguées : $\lambda = 1 + i\alpha$ et $\mu = 1 - i\alpha$.

b) $\lambda = \sqrt{1+\alpha^2}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + i\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$. Puisque $\alpha > 0$, λ admet un argument dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: le réel $\theta = \mathrm{Arctan}(\alpha)$ (ou aussi $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$). On peut alors écrire

$$\lambda = re^{i\theta} \text{ où } r = \sqrt{1+\alpha^2} \text{ et } \theta = \mathrm{Arctan}(\alpha) \text{ et } \mu = re^{-i\theta}.$$

26. Le polynôme caractéristique de la matrice A est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Par suite, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P\ \mathrm{diag}(\lambda, \mu)\ P^{-1}$.

27. Notons C_1 et C_2 les deux colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

$$AC_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i\alpha \\ \alpha - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i\alpha \\ -i(1+i\alpha) \end{pmatrix} = (1+i\alpha)C_1 = \lambda C_1$$

puis, en conjuguant, $AC_2 = \overline{\lambda C_1} = \mu C_2$. La matrice P proposée par l'énoncé convient.

$\det(P) = 2i$ et on sait alors que $P^{-1} = \dfrac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

28. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\ \mathrm{diag}(\lambda^n, \mu^n)\ P^{-1}$.

- $P\ \mathrm{diag}\left(\lambda^0, \mu^0\right)\ P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2 = A^0$. L'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $A^n = P\ \mathrm{diag}(\lambda^n, \mu^n)\ P^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = P\ \mathrm{diag}(\lambda^n, \mu^n)\ P^{-1} \times P\ \mathrm{diag}(\lambda, \mu)\ P^{-1} = P\ \mathrm{diag}(\lambda^n, \mu^n)\ \mathrm{diag}(\lambda, \mu)\ P^{-1} \\ &= P\ \mathrm{diag}\left(\lambda^{n+1}, \mu^{n+1}\right)\ P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\ \mathrm{diag}(\lambda^n, \mu^n)\ P^{-1}$.

29. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^n &= P\ \mathrm{diag}(\lambda^n, \mu^n)\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^n e^{in\theta} & 0 \\ 0 & r^n e^{-in\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r^n e^{in\theta} & r^n e^{-in\theta} \\ -ir^n e^{in\theta} & ir^n e^{-in\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^n \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} & ir^n \dfrac{e^{in\theta} - ie^{-in\theta}}{2} \\ -ir^n \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2} & r^n \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^n \cos(n\theta) & -r^n \sin(n\theta) \\ r^n \sin(n\theta) & r^n \cos(n\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^n\left(\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0\right) \\ r^n\left(\sin(n\theta)x_0 + \cos(n\theta)y_0\right) \end{pmatrix}$.

30. Le tracé en spirale traduit le fait que quand la population de proies décroît (on va de droite à gauche sur le graphique), la population de prédateurs finit par décroître (par absence de nourriture). Mais alors, la population de proies finit par recroître (en raison du petit nombre de prédateurs) puis la population de prédateurs finit par recroître (par abondance de nourriture).

31. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n^2 + y_n^2 = r^{2n}\left((\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0)^2 + (\sin(n\theta)x_0 + \cos(n\theta)y_0)^2\right) = r^{2n}\left(x_0^2 + y_0^2\right).$$

Puisque $r = \sqrt{1+\alpha^2} > 0$ et que $x_0^2 + y_0^2 > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n^2 + y_n^2\right) = +\infty$. Si les suites (u_n) et (v_n) sont toutes deux bornées, il en est de même des suites (x_n) et (y_n), ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n^2 + y_n^2\right) = +\infty$. Donc, une au moins des deux suites (u_n) ou (v_n) est non bornée.

Il est peu crédible que l'une des deux populations puisse être aussi grande que l'on veut, ne serait-ce que parce que le territoire n'est pas infini. Donc, le modèle proposé ne semble pas pertinent pour des prévisions à long terme.

