SESSION 2023

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème n° 1 : VRAI-FAUX

I. Analyse

1. FAUX. Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas paire si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq f(-x)$.

2. VRAI. Pour $x \in [a, b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ car f l'est. Ensuite, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ (car $a \leqslant f(a) \leqslant b$) et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

Ainsi, la fonction g est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie $g(a)g(b) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x dans $[a, b]$ tel que $g(x) = 0$ ou encore tel que $f(x) = x$. L'équation $f(x) = x$ admet donc au moins une solution dans $[a, b]$.

3. FAUX. Pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = 0$. $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 0$ et d'autre part, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^1 - 1 = \frac{1}{2}$.

En particulier, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 g(x)\,dx$ mais $f(0) = -1 \leqslant 0 = g(0)$.

Ainsi, il existe deux fonctions f et g telles que $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 g(x)\,dx \text{ et } \exists x \in [0, 1]/\ f(x) \leqslant g(x)\right)$.

4. FAUX. La fonction $f\ :\ x \mapsto x$ n'est pas nulle sur $[-1, 1]$ mais sa valeur moyenne sur $[-1, 1]$, à savoir $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x\,dx$, est nulle.

5. FAUX. La fonction $x \mapsto 1$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $z^2 - 3z + 2 = 0$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation sont $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto ke^x + k'e^{2x} + 1,\ (k, k') \in \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, la solution $x \mapsto e^x + 1$ ne fait pas partie des solutions proposées par l'énoncé.

6. FAUX. La négation demandée est « il existe une suite réelle majorée qui ne converge pas ». On note que cette affirmation est vraie : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par exemple.

7. FAUX. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(-7)^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{7}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{7}{8}\left(1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)$.

Puisque $\left|-\frac{1}{7}\right| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1} = 0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{7}\right)^k = \frac{7}{8}$ avec $\frac{7}{8} \leqslant 1$.

8. FAUX. La variable u est en trop. Le bon programme est

```
def seuil(n) :
    k=0
    S=40
    while S<n
        k=k+1
        S=S+5
    return k
```

II. Géométrie

9. FAUX. La contraposée demandée est : $AB^2 + AC^2 \neq BC^2 \Rightarrow ABC$ n'est pas un triangle rectangle en A.

10. VRAI. $((x+y)|(x-y)) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ et donc $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.

11. FAUX. Si par exemple, $z = 0$ et x et y sont deux vecteurs distincts, on a $(x|z) = 0 = (y|z)$ et $x \neq y$.

12. FAUX. Le milieu I de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \text{med}[AC] &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 9\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + y = 4. \end{aligned}$$

13. FAUX. L'ensemble considéré est la médiatrice du segment $[AB]$ où $z_A = 2$ et $z_B = -1$, à savoir la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

14. VRAI. $z_A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$ et $z_B = \overline{z_A} = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$.

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{2e^{\frac{i\pi}{6}}}{2e^{-\frac{i\pi}{6}}}\right) = \arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

15. FAUX. Un vecteur directeur de la droite D est $\overrightarrow{u}(1, -1, -1)$ et un vecteur normal au plan P est $\overrightarrow{n}(1, -2, 3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires et donc la droite D n'est pas perpendiculaire au plan P.

III. Matrices

16. VRAI. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = I_2$. Donc, A est inversible et $A^{-1} = A$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - 1$. Il est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

17. VRAI. Si A n'est pas inversible, alors une des deux matrices A ou B n'est pas inversible. Sinon A est inversible puis $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 \Rightarrow B = 0$ et en particulier B n'est pas inversible et donc A ou B n'est pas inversible.

IV. Pourcentages

18. FAUX. L'augmentation totale en pourcentage est

$$100 \times (1,12 \times 1,16 \times 1,07 - 1) = 39,0144.$$

Au bout des trois ans, le tabac a augmenté de $39,0144$%.

19. FAUX. On suppose que la première semaine, Armelle a traité 100 exercices et 5 la seconde. Elle en a réussi $100 \times 0,5 + 5 \times 0,2 = 51$. Son pourcentage total de réussite est $\frac{51}{105}$% ou encore $48,5\ldots$%
On suppose que la première semaine, Boris a traité 10 exercices et 100 la seconde. Il en a réussi $10 \times 0,9 + 100 \times 0,4 = 49$. Son pourcentage total de réussite est $\frac{49}{110}$% ou encore $44,5\ldots$%, soit un pourcentage de réussite inférieur à celui d'Armelle.

V. Arithmétique

20. VRAI. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. L'un des deux entiers n ou $n+1$ est pair et donc le produit $(n-1)n(n+1)$ est pair.

21. FAUX. $9^2 = 81 = 4 \times 18 + 9$ et donc $9^2 \equiv 9\ [18]$ mais $9 \not\equiv 3\ [18]$ et $9 \not\equiv -3\ [18]$.

VI. Dénombrements

22. FAUX. Le nombre de parties d'un ensemble à 10 éléments est 2^{10} ou encore 1024.

23. VRAI. La donnée d'un triangle équivaut à la donnée d'un ensemble de trois droites. Il y en a donc

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

VII. Probabilités

24. VRAI. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention du numéro choisi. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 3)$ avec

$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{36 - 6 - 5}{36} = \frac{25}{36} = \frac{5^2}{6^2}.$$

25. VRAI. Supposons A et B indépendants. Alors,

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P\left(\overline{B}\right).$$

Donc, si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants. En appliquant à B et A, si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants puis en appliquant à B et $\overline{A}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants,

Enfin, en appliquant à $\overline{A}$ et $\overline{B}$, si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, alors $A = \overline{\overline{A}}$ et $B = \overline{\overline{B}}$ sont indépendants.

Problème n° 2 : équations fonctionnelles

I. Quelques résultats

1. Dérivabilité

a. f est dérivable en a si et seulement si le taux $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite réelle quand x tend vers a. Dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

b. Soit ε la fonction définie sur I par : pour tout $x \in I$, $\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \text{ si } x \neq a \\ 0 \text{ si } x = a \end{cases}$.

Pour $x \neq a$, on a $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x)$, ce qui reste vrai quand $x = a$. D'autre part, puisque f est dérivable en a, $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Pour tout x de I, on pose alors $g(x) = (x - a)\varepsilon(x)$. Puisque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, la fonction g est négligeable devant $x - a$ en a.

c. i. Supposons f dérivable en a. Alors, il existe une fonction ε définie sur I, de limite nulle en a, telle que pour tout x de I, $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x)$.
En particulier, $\lim\limits_{x \to a,\ x \neq a} f(x) = f(a)$ et donc f est continue en a.

ii. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

d. Pour $x \neq a$,

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + g(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

La fonction g est dérivable en a et en particulier continue en a. Donc, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. D'autre part, les taux $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ ont une limite réelle quand x tend vers a, à savoir $f'(a)$ et $g'(a)$ respectivement.

Finalement, le taux $\dfrac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$ a une limite réelle quand x tend vers a à savoir $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Ceci montre que la fonction fg est dérivable en a et que

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

e. Il existe une fonction ε_1 définie sur I, de limite nulle en a, telle que pour tout x de I, $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x)$. De même, en posant $b = f(a)$, il existe une fonction ε_2 définie sur J, de limite nulle en b, telle que pour tout y de J, $g(y) = g(b) + (y - b)g'(b) + (y - b)\varepsilon_2(y)$. Mais alors, pour $x \in I$,

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(f(x)) \\
&= g(f(a)) + ((x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x))\, g'(f(a)) \\
&+ ((x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x))\, \varepsilon_2(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)) \\
&= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

où, pour tout x de I, $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\, \varepsilon_2(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x))$.

Quand x tend vers a, $f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ tend vers $f(a)$ puis $\varepsilon_2(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x))$ tend vers 0. Mais alors, $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. De plus, pour $x \neq a$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = f'(a)g'(f(a)) + \varepsilon(x).$$

Par suite, le taux $\dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}$ a une limite réelle quand x tend vers a et donc la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

2. La fonction logarithme népérien

a. Soit $y > 0$. Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$. La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi, la fonction φ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de dérivée nulle sur $]0, +\infty[$. La fonction φ est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(1) = \ln(x) - \ln(x) - \ln(1) = 0.$$

On a montré que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

b. Soit $x > 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

- Le résultat est vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\ln\left(x^{n+1}\right) &= \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x) \\
&= n\ln(x) + \ln(x) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)\ln(x).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Soit $x > 0$. $\ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ et donc $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

c. i. $g(1) = g(1 \times 1) = g(1) + g(1) = 2g(1)$ puis $g(1) = 0$.

ii. Soit $y > 0$ fixé. Pour tout $x > 0$, $g(xy) = g(x) + g(y)$. En dérivant les deux membres de l'égalité par rapport à x, on obtient pour tout $x > 0$, $yg'(xy) = g'(x)$ puis

$$g'(xy) = \frac{g'(x)}{y}.$$

On a montré que pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, $g'(xy) = \dfrac{g'(x)}{y}$.

iii. En particulier, pour tout $y > 0$, $g'(y) = g'(1 \times y) = \dfrac{g'(1)}{y}$. Le réel $c = g'(1)$ convient.

iv. Mais alors, pour tout $y > 0$, $g(y) = g(1) + \displaystyle\int_1^y \frac{c}{y}\, dy = c\ln(y)$. Ainsi, si g est fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifiant l'équation fonctionnelle, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y > 0$, $g(y) = c\ln(y)$.

Réciproquement, une telle fonction convient. Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto c\ln(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

d. La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sa dérivée, à savoir la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement croissante sur cet intervalle. Donc, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

e. On note tout d'abord que $\ln(2) > 0$ car $2 > 1 \Rightarrow \ln(2) > \ln(1)$. Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée et en particulier, $\dfrac{A}{\ln(2)}$ n'est pas un majorant de cette suite. Il existe donc un entier naturel non nul n tel que $n > \dfrac{A}{\ln(2)}$ et donc aussi $n \geqslant \dfrac{A}{\ln(2)}$.

Soit x un réel tel que $x \geqslant 2^n$. Alors, x est un réel strictement positif tel que $\ln(x) \geqslant \ln(2^n) = n\ln(2)$ (par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$) puis $\ln(x) \geqslant A$ (car $n\ln(2) \geqslant A$).

f. On a montré que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $B > 0$ tel que, si $x \geqslant B$, alors $\ln(x) \geqslant A$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. On en déduit encore que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$.

On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

g. La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc, la fonction ln réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\ln(]0, +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)\right[= \mathbb{R}$.

h. En particulier, la fonction ln est injective. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$.

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \ln(ab) \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{a+b}{4}\right)^2\right) = \ln(ab)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 16ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab.$$

II. Premières équations fonctionnelles

3. Résultats préliminaires

a. $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ puis $f(0) = 0$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) + f(x) = f(-x+x) = f(0) = 0$ puis $f(-x) = -f(x)$. Donc, pour tout réel x $f(-x) = -f(x)$ puis f est impaire.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$ car $f(0) = 0$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $f(nx) = nf(x)$. Alors, $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)+f(x) = nf(x)+f(x) = (n+1)f(x)$.

On a montré par récurrence que, pour tout réel x, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(nx) = nf(x)$, ce qui reste vrai quand $n = 0$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{Q}^+$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{p}{q}$.

$$f(rx) = f\left(p\frac{x}{q}\right) = pf\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q} \times qf\left(\frac{x}{q}\right) = rf\left(q \times \frac{x}{q}\right) = rf(x).$$

Soit maintenant $r \in \mathbb{Q}^{-*}$. f étant impaire et $-r$ étant un rationnel positif, $f(rx) = -f((-r)x) = -(-r)f(x) = rf(x)$.

On a montré que pour tout réel x et tout rationnel r, $f(rx) = rf(x)$.

e. Soit $a = f(1)$. Pour tout rationnel r, $f(r) = rf(1) = ar$. Donc, il existe un réel a tel que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.

4. Première méthode.

On pose toujours $a = f(1)$. D'après la question précédente, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels, convergente, de limite x. Par continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et en particulier en x,

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} ar_n = ax.$$

Ainsi, si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et additive, il existe un réel a tel que, pour tout réel x, $f(x) = ax$. Réciproquement, une telle fonction convient.

5. Seconde méthode.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $t \mapsto f(x+t)$ et $t \mapsto f(t)$ sont continues sur le segment $[0,1]$. Donc, les deux intégrales de l'énoncé existent. Ensuite,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x)\int_0^1 dt = \int_0^1 f(x)\ dt = \int_0^1 f(x+t-t)\ dt &= \int_0^1 (f(x+t)+f(-t))\ dt \\ &= \int_0^1 (f(x+t)-f(t))\ dt \text{ (d'après 3)b))} \\ &= \int_0^1 f(x+t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt \text{ (par linéarité de l'intégration).} \end{aligned}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = t + x$, on obtient

$$f(x) = \int_0^1 f(x+t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt = \int_x^{x+1} f(u)\ du - \int_0^1 f(t)\ dt = \int_x^{x+1} f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt,$$

(la variable d'intégration étant muette).

c. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f. Mais alors, la fonction $x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\ dt = \int_0^{x+1} f(t)\ dt - \int_0^x f(t)\ dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction f. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) = f(x) + f(1) - f(x) = f(1).$$

d. Ainsi, la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$. Mais alors, la fonction f est affine. En tenant compte de $f(0) = 0$, on retrouve le fait que, pour tout réel x, $f(x) = xf(1)$.

III. Restriction des hypothèses

8. Continuité en un point.

a. Supposons f continue en un certain réel x_0. Pour tout réel h, $f(x_0+h) = f(x_0) + f(h)$ et donc, $f(h) = f(x_0+h) - f(x_0)$. f étant continue en x_0, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0,\ h\neq 0} f(h) = \lim_{h\to 0,\ h\neq 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = 0 = f(0).$$

La fonction f est donc continue en 0.

b. Soit x un réel quelconque. Puisque f est continue en 0,

$$\lim_{h\to 0,\ h\neq 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0,\ h\neq 0} (f(x)+f(h)) = f(x) + 0 = f(x)$$

et donc f est continue en x. Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et additive, la partie précédente permet d'affirmer que pour tout réel x, $f(x) = xf(1)$.

7. Monotonie.

a. Si $x_0 \in \mathbb{Q}$, les suites constantes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ conviennent. Dorénavant, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On pose déjà $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$ et $b_0 = \lfloor x_0 \rfloor + 1$. a_0 et b_0 sont deux rationnels tels que $a_0 < x_0 < b_0$ (les inégalité sont strictes car $x_0 \notin \mathbb{Q}$).

Construisons a_1 et b_1. Puisque $a_0 < x_0$, on a $a_0 < \dfrac{a_0+x_0}{2}$. De même, $\dfrac{b_0+x_0}{2} < b_0$. Les intervalles $\left]\dfrac{a_0+x_0}{2}, x_0\right[$ et $\left]x_0, \dfrac{b_0+x_0}{2}\right[$ ont une longueur non nulle. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe des rationnels a_1 et b_1 tels que $a_1 \in \left]\dfrac{a_0+x_0}{2}, x_0\right[$ et $b_1 \in \left]x_0, \dfrac{b_0+x_0}{2}\right[$. Par construction, $a_0 < a_1 < x_0 < b_1 < b_0$.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons avoir construit des nombres rationnels $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$, tels que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n < x_0 < b_n < \ldots < b_1 < b_0$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_{k+1} \in \left]\dfrac{a_k + x_0}{2}, x_0\right[$ et $b_{k+1} \in \left]x_0, \dfrac{b_k + x_0}{2}\right[$.

Les intervalles $\left]\dfrac{a_n + x_0}{2}, x_0\right[$ et $\left]x_0, \dfrac{b_n + x_0}{2}\right[$ ont une longueur non nulle. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe des rationnels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $a_{n+1} \in \left]\dfrac{a_n + x_0}{2}, x_0\right[$ et $b_{n+1} \in \left]x_0, \dfrac{b_n + x_0}{2}\right[$. Par construction, $a_0 < \ldots < a_n < a_{n+1} < x_0 < b_{n+1} < b_n < \ldots < b_0$.

On a construit par récurrence deux suites de rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \in \left]\dfrac{a_n + x_0}{2}, x_0\right[$ et $b_{n+1} \in \left]x_0, \dfrac{b_n + x_0}{2}\right[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_{n+1} - x_0| \leqslant \left|\dfrac{a_n + x_0}{2} - x_0\right| = \dfrac{1}{2}|a_n - x_0|$. Mais alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n - x_0| \leqslant \frac{1}{2^n}|a_0 - x_0| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n - x_0| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x_0.

b. Supposons f croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ et de plus, a_n et b_n étant rationnel, $f(a_n) = a_n f(1)$ et $f(b_n) = b_n f(1)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n f(1) = f(a_n) \leqslant f(x_0) \leqslant f(b_n) = b_n f(1).$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $x_0 f(1) \leqslant f(x_0) \leqslant x_0 f(1)$ et donc $f(x_0) = x_0 f(1)$.

Si f est décroissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $-f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et additive. Donc, $(-f)(x_0) = x_0(-f)(1)$ puis de nouveau, $f(x_0) = x_0 f(1)$.

c. Ainsi, si f est solution et est monotone sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel x, $f(x) = xf(1)$. Réciproquement, une telle fonction convient.

8. Encadrement.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel y,

$$nx - y \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha \leqslant nx - y \leqslant \beta \Leftrightarrow nx - \beta \leqslant y \leqslant nx - \alpha \Leftrightarrow y \in [nx - \beta, nx - \alpha].$$

La longueur de l'intervalle $[nx - \beta, nx - \alpha]$ est $(nx - \alpha) - (nx - \beta) = \beta - \alpha$. Elle est strictement positive. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r_n tel que $r_n \in [nx - \beta, nx - \alpha]$ et donc tel que $nx - r_n \in [\alpha, \beta]$.

b. Puisque f est additive, d'après les différents résultats de la question 3.,

$$\begin{aligned}|f(nx - r_n)| &= |f(nx) - f(r_n)| = |nf(x) - ar_n| = |nf(x) - nax + nax - ar_n| = |n(f(x) - ax) - a(r_n - nx)| \\ &\geqslant |n(f(x) - ax)| - |a(r_n - nx)| = n|f(x) - ax| - |a||nx - r_n|\end{aligned}$$

c. On en déduit encore que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}|f(nx - r_n)| \geqslant |f(x) - ax| - \dfrac{|a|}{n}|nx - r_n| \quad (*)$.

Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[\alpha, \beta]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}|f(nx - r_n)| \leqslant \dfrac{M}{n}$ (car $nx - r_n \in [\alpha, \beta]$). Le théorème des gendarmes montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}|f(nx - r_n)| = 0$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{|a|}{n}|nx - r_n| \leqslant \dfrac{|a|\text{Max}\{|\alpha|, |\beta|\}}{n}$ et de nouveau, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a|}{n}|nx - r_n| = 0$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient $0 \geqslant |f(x) - ax|$ puis $|f(x) - ax| = 0$ et donc $f(x) = ax$. Ainsi, pour tout réel $f(x) = xf(1)$.

IV. D'autres équations fonctionnelles

9. Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy.

a. $f(0) = f(0+0) = f(0) \times f(0) = (f(0))^2$ puis $f(0)(f(0)-1) = 0$ et donc $f(0) \in \{0,1\}$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = f(x+0) = f(x) \times f(0) = 0$. Dans ce cas, f est la fonction nulle. Sinon, on a $f(0) = 1$.

b. f n'est pas la fonction nulle et donc $f(0) = 1$.

i. Soit x un réel. $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ et donc $f(x) \geqslant 0$. Supposons de plus qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Alors, $f(0) = f(x_0 - x_0) = f(x_0) \times f(-x_0) = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que f est la fonction nulle, ce qui est faux. Donc, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et finalement, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

ii. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(x+y) = \ln(f(x+y)) = \ln(f(x) \times f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = g(x) + g(y).$$

iii. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $\ln$ est continue sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction $g = \ln \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction g est additive. D'après la partie II, pour tout réel x, $g(x) = xg(1)$ ou encore, en posant $a = g(1)$, $\ln(f(x)) = ax$ et finalement $f(x) = \exp(ax)$.

Réciproquement, pour tout réel a, la fonction $x \mapsto \exp(ax)$ vérifie l'équation de Cauchy. Finalement, les fonctions continues sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation de Cauchy, sont les fonctions de la forme $x \mapsto \exp(ax)$, $a \in \mathbb{R}$.

10. Equation fonctionnelle de Jensen.

a. Les fonctions solutions de l'équation de Jensen sont les fonctions telles que l'image de la moyenne arithmétique de deux réels quelconques est la moyenne arithmétique des images de ces deux réels.

b. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{f(x+y)+f(0)}{2} = f\left(\frac{x+y+0}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

et donc $f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y)$ puis $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$. On a montré que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0).$$

c. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(x+y) = f(x+y) - b = f(x) + f(y) - b - b = g(x) + g(y).$$

Puisque la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et additive, il existe un réel a tel que, pour tout réel x, $g(x) = ax$ et donc $f(x) = ax + b$. Ainsi, la fonction f est affine.

Réciproquement, soient a et b deux réels puis f la fonction $x \mapsto ax + b$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{ax+b+ay+b}{2} = a\frac{x+y}{2} + b = f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Les solutions de l'équation de Jensen sont les fonctions affines.

11.

a. i. Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{16}{x}\right)$. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = \frac{(x-4)(x+4)}{2x^2}.$$

Sur $]0,+\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $x-4$ et donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0,4]$ et est strictement croissante sur $[4,+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{8}{x} = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{x} = 0$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Enfin, $g(4) = \dfrac{4^2 + 16}{2 \times 4} = 4$.

ii. Pour $x > 0$, $h(x) = \dfrac{x^2 + 16}{2x} - x = \dfrac{-x^2 + 16}{2x} = \dfrac{-(x-4)(x+4)}{2x}$. Donc, la fonction h est strictement positive sur $]0, 4[$, strictement négative sur $]4, +\infty[$ et s'annule en 4. .

b. i. La question a. montre que pour tout réel $x \geqslant 4$, on a $g(x) \geqslant 4$ et pour tout réel $x \geqslant 4$, on a $h(x) \leqslant 0$ ou encore $g(x) \leqslant x$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 4$.

- C'est vrai quand $n = 0$ car $x \geqslant 4$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et $u_n \geqslant 4$. Alors, $u_{n+1} = g(u_n)$ existe et $u_{n+1} \geqslant 4$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 4$.

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n) \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 4. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ supérieur ou égal à 4. La fonction g est continue sur $[4, +\infty[$ et en particulier en ℓ. On en déduit que

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} g(u_n) = g\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = g(\ell).$$

D'après la question a.ii., l'équation $g(x) = x$ admet une solution et une seule dans $[4, +\infty[$, à savoir 4. Donc, $\ell = 4$.

Finalement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite 4.

ii. Puisque f est solution de l'équation fonctionnelle, on a en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) = f\left(\dfrac{u_n^2 + 16}{2u_n}\right) = f(u_n)$. La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante. Par continuité de la fonction f en 4,

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(4).$$

Puisque la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, on a alors

$$(f(x) = f(u_0) = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(4).$$

On a montré que pour tout réel $x \geqslant 4$, $f(x) = 4$.

c. Soit $x \in]0, 4[$. On considère la même suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que celle de b. D'après a.i., $u_1 = g(u_0) \geqslant 4$ puis, d'après b., pour $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 4$ puis la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 4, en décroissant à partir du rang 1. Mais alors, avec la même démarche qu'en b., on a encore $f(x) = f(4)$.

d. Finalement, si f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et solution de l'équation fonctionnelle, alors f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

