SESSION 2021

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Problème n° 1

Partie A : une première approche

I. La formule à rentrer dans la case B5 puis à recopier vers le bas est :

=(D1+3)*B4-(3*D1+2)*B3+2*D1*B2.

II. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n = (a+3-3a-2+2a)u_0 = u_0 = u_{n+3}.$$

Donc, la suite constante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_a.

Partie B : le cas $a = 0$

III.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $n+1$, $n+2$ et $n+3$ sont trois entiers supérieurs ou égaux à 1 puis $e_{n+1} = e_{n+2} = e_{n+3} = 0$ et donc $e_{n+3} = 3e_{n+2} - 2e_{n+1}$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_{n+3} = 3e_{n+2} - 2e_{n+1}$ et donc $e \in E_0$.

III.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} v_2 = 3v_1 - 2v_0 &\Leftrightarrow u_2 - \lambda e_2 = 3(u_1 - \lambda e_1) - 2(u_0 - \lambda e_0) \Leftrightarrow u_2 = 3u_1 - 2u_0 + 2\lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}(u_2 - 3u_1 + 2u_0). \end{aligned}$$

Dorénavant, $\lambda = \frac{1}{2}(u_2 - 3u_1 + 2u_0)$. Par construction, l'égalité $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ est vraie quand $n = 0$. D'autre part, si n est un entier supérieur ou égal à 1, alors $e_{n+2} = e_{n+1} = e_n = 0$ puis $v_n = u_n$. Mais alors, puisque $n - 1 \geqslant 0$,

$$v_{n+2} = u_{n+2} = u_{(n-1)+3} = 3u_{(n-1)+2} - 2u_{(n-1)+1} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3v_{n+1} - 2v_n.$$

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.

III.3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = v_0 \\ \alpha + 2\beta = v_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = v_0 \\ \beta = v_1 - v_0 \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = v_1 - v_0 \\ \alpha = v_0 - (v_1 - v_0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = v_1 - v_0 \\ \alpha = 2v_0 - v_1 \end{array}\right..$$

Les réels $\alpha = 2v_0 - v_1$ et $\beta = v_1 - v_0$ conviennent.

III.4. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha + \beta 2^n$.

- L'égalité est vraie quand $n = 0$ et $n = 1$ par définition de α et β d'après la question précédente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n = \alpha + \beta 2^n$ et $v_{n+1} = \alpha + \beta 2^{n+1}$. Alors

$$v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n = 3\left(\alpha + \beta 2^{n+1}\right) - 2\left(\alpha + \beta 2^n\right) = \alpha + (3-1)\beta 2^{n+1} = \alpha + \beta 2^{n+2}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha + \beta 2^n$.

III.5. D'après les questions III.2. et III.4., si u est un élément de E_0, alors il existe $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda e_n + v_n = \lambda e_n + \alpha + \beta 2^n$ ou encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (e_n)_{n\in\mathbb{N}} + \alpha (1)_{n\in\mathbb{N}} + \beta (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tout élément de E_0 est donc une combinaison linéaire des trois suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IV. Réciproquement, soient $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (e_n)_{n\in\mathbb{N}} + \alpha (1)_{n\in\mathbb{N}} + \beta (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}3u_{n+2} - 2u_{n+1} &= 3\left(\lambda e_{n+2} + \alpha + \beta 2^{n+2}\right) - 2\left(\lambda e_{n+1} + \alpha + \beta 2^{n+1}\right)\\&= \lambda\left(3e_{n+2} - 2e_{n+1}\right) + \alpha + (3-1)\beta 2^{n+2} = \lambda e_{n+3} + \alpha + \beta 2^{n+3}\\&= u_{n+3}.\end{aligned}$$

On a montré que toute combinaison linéaire des trois suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E_0.

V.1. D'après les questions III. et IV., E_0 est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$E_0 = \left\{(\lambda e_n + \alpha + \beta 2^n),\ (\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

V.2. On a obtenu E_0 par analyse-synthèse ou par double inclusion ou en raisonnant par condition nécessaire et suffisante ou ...

Partie C : le cas $a = 3$

VI.1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3}\\ u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n\\ u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+2}\\ u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix} = AU_n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

VI.2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$.

- $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $U_n = A^nU_0$. Alors, $U_{n+1} = AU_n = A \times A^nU_0 = A^{n+1}U_0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$.

VI.3. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times (-5) + 1 \times (-6) = -2.$$

Puisque $\det(P) \neq 0$, P est inversible. Notons C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de P.

• $AC_1 = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = C_1$. Donc, C_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

• $AC_2 = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\ 4\\ 2\end{pmatrix} = 2C_2$. Donc, C_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

• $AC_3 = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9\\ 3\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27\\ 9\\ 3\end{pmatrix} = 3C_3$. Donc, C_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

Mais alors, on sait que $P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$.

VI.4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = A^0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

VI.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \text{diag}(1, 2^n, 3^n)$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = P\text{diag}(1, 2^n, 3^n) P^{-1} U_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est la première composante de U_n. En effectuant le produit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient trois réels x, y et z, indépendants de n, tels que $u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n$.

On a montré que tout élément de E_3 est une combinaison linéaire des trois suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VI.6. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n$.

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = x + y + z \\ u_1 = x + 2y + 3z \\ u_2 = x + 3y + 9z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = u_0 - x - y \\ x + 2y + 3(u_0 - x - y) = u_1 \\ x + 3y + 9(u_0 - x - y) = u_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = u_0 - x - y \\ -2x - y = -3u_0 + u_1 \\ -8x - 6y = -9u_0 + u_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = u_0 - x - y \\ y = -2x + 3u_0 - u_1 \\ -8x - 6(-2x + 3u_0 - u_1) = -9u_0 + u_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}(9u_0 - 6u_1 + u_2) \\ y = -\dfrac{1}{2}(9u_0 - 6u_1 + u_2) + 3u_0 - u_1 \\ z = u_0 - x - y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}(9u_0 - 6u_1 + u_2) \\ y = \dfrac{1}{2}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) \\ z = u_0 - \dfrac{1}{4}(9u_0 - 6u_1 + u_2) - \dfrac{1}{2}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}(9u_0 - 6u_1 + u_2) \\ y = \dfrac{1}{2}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) \\ z = \dfrac{1}{4}(u_0 - 2u_1 + u_2) \end{array}\right. .$$

Ainsi, x, y et z s'expriment linéairement en fonction de u_0, u_1 et u_2.

VII. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n &= x(6 - 11 + 6) + y(6 \times 4 - 11 \times 2 + 6)2^n + z(6 \times 9 - 11 \times 3 + 6)3^n = x + 8y2^n + 27z3^n \\ &= x + y2^{n+3} + z3^{n+3} = u_{n+3} \end{aligned}$$

et donc la suite u est dans E_3.

VIII. On a montré que E_3 est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IX. Ici, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$. D'après la question VI.6., $x = \dfrac{1}{4}(9 - 0 + 1) = \dfrac{5}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}(-3 - 0 - 1) = -2$ et $z = \dfrac{1}{4}(1 - 0 + 1) = \dfrac{1}{2}$ puis,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5}{2} - 2 \times 2^n + \frac{1}{2} \times 3^n.$$

X. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^n}{2}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

XI. Algorithme.

$n = 0$.

Tant que $\dfrac{5}{2} - 2 \times 2^n + \dfrac{1}{2} \times 3^n < 10^5$,

  remplacer n par $n + 1$

Afficher n

XII. Quand $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Donc, il existe un rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^5$ puis il existe un plus petit rang pour lequel $u_n \geqslant 10^5$.
Quand $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 1$, $z = \dfrac{1}{4}(1-4+1) = -\dfrac{1}{2} < 0$. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Il n'existe alors pas nécessairement un rang pour lequel $u_n \geqslant 10^5$ ou encore il est possible que l'algorithme ne s'arrête pas.

Partie D : le cas général

XIII.1. $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

XIII.2. Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite nulle est dans E_a. Soit $(u, v) \in (E_a)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(a+3)(\alpha u+\beta v)_{n+2} &- (3a+2)(\alpha u+\beta v)_{n+1} + 2a(\alpha u+\beta v)_n \\ &= \alpha\left((a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n\right) + \beta\left((a+3)v_{n+2} - (3a+2)v_{n+1} + 2av_n\right) \\ &= \alpha u_{n+3} + \beta v_{n+3} = (\alpha u + \beta v)_{n+3}.\end{aligned}$$

et donc $\alpha u + \beta v \in E_a$.

On a montré que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

XIV.1. Soient $(u, v) \in (E_a)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\theta(\alpha u + \beta v) = \begin{pmatrix} \alpha u_0 + \beta v_0 \\ \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \alpha\theta(u) + \beta\theta(v).$$

Donc, $\theta \in \mathscr{L}\left(E_a, \mathbb{R}^3\right)$.

XIV.2. $*$ θ est une application linéaire de l'espace vectoriel E_a vers l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

$*$ Soit $u \in E_a$. Si $u \in \mathrm{Ker}(\theta)$, alors $u_0 = u_1 = u_2 = 0$. Montrons alors par récurrence triple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

- $u_0 = u_1 = u_2 = 0$. Donc, l'égalité est vraie quand $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$. Alors, $u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Ainsi, si $u \in \mathrm{Ker}(\theta)$, alors $u = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\theta) \subset \{0\}$ puis $\mathrm{Ker}(\theta) = \{0\}$ car $\mathrm{Ker}(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de E_a. Ceci montre que θ est injective.

$*$ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit u la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_2 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n$. Alors, u est un élément de E_a tel que $\theta(u) = (a, b, c)$.
Ainsi, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe $u \in E_a$ telle que $\theta(u) = (a, b, c)$ et donc θ est surjective.

Finalement, θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

XIV.3. Puisque θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. on en déduit que $\dim(E_a) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$.

XV. En V. (resp. VIII.), on a obtenu une famille génératrice de E_0 (resp. E_3), de cardinal $3 = \dim(E_0) = \dim(E_3)$ et donc on a obtenu une base de E_0 (resp. E_3).

Une base de E_0 est $\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et une base de E_3 est $\left((1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Problème n° 2

Partie A : étude de la radioactivité d'un noyau atomique

I. Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$P(X \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Donc, pour tout réel positif t, $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

On en déduit encore que pour tout réel positif t, $P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$.

II. Donc, la probabilité que la durée de radioactivité d'un certain noyau radioactif n'excède par t jours est $1 - e^{-\lambda t}$ et la probabilité que sa durée de radioactivité dépasse strictement t jours est $e^{-\lambda t}$.

III. Soient t et h deux réels positifs. Tout d'abord, $P(X > t) = e^{-\lambda t} \neq 0$ et donc $P_{(X>t)}(X > t+h)$ est bien défini. Ensuite,

$$P_{(X>t)}(X > t+h) = \frac{P((X > t+h) \cap (X > t))}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X > h).$$

IV. Soit $h \in \mathbb{R}^+$. $P_{(X>t)}(X > t+h)$ est la probabilité que la durée de probabilité dépasse strictement $t + h$ sachant que la durée de radioactivité dépase strictement t.

V. D'après la question III., $P_{(X>t)}(X > t+h)$ ne dépend pas de t ou encore à tout instant t pour lequel le noyau est encore radioactif, la probabilité que le noyau soit encore radioactif au bout de h jours ne dépend pas de l'instant t. La désintégration radioactive est un phénomène sans mémoire.

VI. Soit $\lambda > 0$. L'espérance de X est $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\ dx$. Soit $t \in [0, +\infty[$. Les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -e^{-\lambda x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, t]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_0^t xf(x)\ dx &= \int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[x\left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_0^t - \int_0^t \left(-e^{-\lambda x}\right) dx \\ &= -te^{-\lambda t} + 0 - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^t = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - te^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Puisque $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} te^{-\lambda t} = \lim_{u\to-\infty} -\frac{1}{\lambda}ue^{-u} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Quand t tend vers $+\infty$, on obtient l'existence et la valeur de $E(X)$:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

VII. De même, une intégration par parties fournit pour $t \geqslant 0$:

$$\int_0^t x^2\lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[x^2\left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_0^t + 2\int_0^t xe^{-\lambda x}\ dx = -t^2e^{-\lambda t} + 2\int_0^t xe^{-\lambda x}\ dx.$$

Quand t tend vers $+\infty$, on obtient l'existence et la valeur de $E\left(X^2\right)$:

$$E\left(X^2\right) = 0 + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\ dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\ dx = \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Mais alors, d'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et de plus,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Enfin, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B : étude de l'évolution d'un échantillon de noyaux radioactifs

VIII.1. La proportion de noyaux radioactifs à l'instant t est $\dfrac{N(t)}{N_0}$. Quand N_0 est grand et en supposant que le fait qu'un noyau soit encore radioactif à l'instant t est indépendant du comportement des autres noyaux, la loi faible des grands nombres permet d'affirmer que la proportion $\dfrac{N(t)}{N_0}$ ou encore la fréquence observée, est approximativement la probabilité qu'un noyau donné soit encore radioactif.

VIII.2. Soit $t \geqslant 0$. On a donc par approximation $\dfrac{N(t)}{N_0} = P(X > t) = e^{-\lambda t}$ puis $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$.

VIII.3. Si un élève constate que le nombre $N(t)$ obtenu n'est pas toujours un entier naturel, on peut expliquer que le nombre $N_0e^{-\lambda t}$ est une approximation de $N(t)$ et qu'une autre approximation de $N(t)$ plus cohérente est par exemple l'entier le plus proche de $N_0e^{-\lambda t}$. Mais cette autre approximation est plus difficile à manipuler mathématiquement parlant.

IX.1. Soit $t \geqslant 0$.

$$N(t) \leqslant \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda t} \leqslant \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{\lambda t} \geqslant 2 \Leftrightarrow t \geqslant \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

La demi-vie de l'échantillon est $\tau = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

IX.2. Soit $\lambda > 0$. $\dfrac{\ln(2)}{\lambda} = 8 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln(2)}{8}$. La caractéristique de radioactivité de l'iode 131 est $\dfrac{\ln(2)}{8}$.

IX.3. La probabilité demandée est $P(6 \leqslant X \leqslant 10)$.

$$\begin{aligned} P(6 \leqslant X \leqslant 10) &= P(6 < X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 6) = \left(1 - e^{-10\lambda}\right) - \left(1 - e^{-6\lambda}\right) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda} \\ &= e^{-\frac{3\ln(2)}{4}} - e^{-\frac{5\ln(2)}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}} - 2^{-\frac{5}{4}} = 0,174\dots. \end{aligned}$$

X.1. On sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $\exp' = \exp$ et que $\exp(0) = 1$. Donc,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$

X.2. La désintégration radioactive étant un phénomène sans mémoire, la probabilité considérée est

$$P_{X>t}(X \leqslant t + \Delta t) = 1 - P_{(X>t)}(X > t + \Delta t) = 1 - P(X > \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}.$$

D'après la question précédente, puisque Δt est petit, $e^{-\lambda \Delta t} - 1$ est approximativement égal à $-\lambda \Delta t$ et donc, la probabilité $P_{(X>t)}(X \leqslant t + \Delta t)$ est approximativement égale à $\lambda \Delta t$.

XI.1. Dire que U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$ équivaut à dire que pour tout $(a, b) \in [0, 1[^2$ tel que $a \leqslant b$,

$$P(a \leqslant U \leqslant b) = \frac{b - a}{1 - 0} = b - a.$$

Puisque $U < 1$ et donc $1 - U > 0$, la variable X est bien définie. Ensuite, $U \geqslant 0$ et donc $\ln(1 - U) \leqslant 0$ puis $X \geqslant 0$. Soit alors $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} X \leqslant t &\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leqslant t \Leftrightarrow \ln(1 - U) \geqslant -\lambda t \\ &\Leftrightarrow 1 - U \geqslant e^{-\lambda t} \text{ (par croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow U \leqslant 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Mais alors, pour tout réel t, $P(X \leqslant t) = P\left(U \leqslant 1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$. Soit f la densité associée à la variable X. Pour tout réel positif t, $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx = P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$. En dérivant cette égalité, on obtient pour tout réel positif t, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Donc, X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

XI.2.

```python
import random
import math

def expo(Lambda):
   return (-1/Lambda)*math.log(1-random.random())
```

XI.3.a. On simule 1000 fois des variables aléatoites indépendantes qui suivent des lois E(Lambda). La fonction renvoie la fréquence des variables qui prennent une valeur strictement supérieure à la valeur t qui est un paramètre de la fonction.

b. Par la loi faible des grands nombres, on s'attend à ce que cette fréquence approche $P(X > t)$. De plus, puisque X est à densité :

$$P(6 < X < 10) = P(X > 6) - P(X > 10).$$

On écrit donc : parametre_lambda = ln(2)/8 puis mystere(parametre_lambda, 6) - mystere(parametre_lambda, 10)

