SESSION 2021

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Partie A : étude des nombres harmoniques

I. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Donc, $[k-1,k]\subset]0,+\infty[$ puis la fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[k-1,k]$. On en déduit que, pour tout réel x de $[k-1,k]$, $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{k}$. Par croissance de l'intégration, on obtient

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx\geqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,dx=(k-(k-1))\times\frac{1}{k}=\frac{1}{k}.$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1. Donc, $[k,k+1]\subset]0,+\infty[$. La fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[k,k+1]$. Donc, pour tout réel x de $[k,k+1]$, $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{k}$. Par croissance de l'intégration, on obtient

$$\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\leqslant\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k}\,dx=((k+1)-k)\times\frac{1}{k}=\frac{1}{k}.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall k\geqslant 1,\ \int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\leqslant\frac{1}{k}\text{ et }\forall k\geqslant 2,\ \frac{1}{k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx.}$$

II. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier $k\in[\![2,n]\!]$, $\dfrac{1}{k}\leqslant\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient par la relation de Chasles,

$$H_n-1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx=\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\,dx=\ln(n).$$

En ajoutant 1 aux deux membres de l'inégalité précédente, on obtient $H_n\leqslant 1+\ln(n)$. Cette dernière inégalité reste vraie quand $n=1$ car $H_1=1\leqslant 1+\ln(1)$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{k}\geqslant\displaystyle\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\ln(n+1).$$

On a montré que,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant 1+\ln(n).}$$

III.1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $H_n\geqslant\ln(n+1)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$. Donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}H_n=+\infty.}$$

III.2. Pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(n)(\leqslant \ln(n+1)) \leqslant H_n \leqslant 1+\ln(n)$. Pour $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$ puis après division des trois membres de l'encadrement par $\ln(n)$, on obtient $1 \leqslant \dfrac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$.

Puisque $1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\left(\dfrac{H_n}{\ln(n)}\right)$ converge et a pour limite 1 ou encore

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

IV.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx.\end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{x} \leqslant 0$ (par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$) et donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \leqslant 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= (H_{n+1} - \ln(n+2)) - (H_n - \ln(n+1)) = (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx.\end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[n+1, n+2]$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ et donc $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. Donc, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = -\ln(n) + \ln(n+1) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \ln(1) = 0$.

En résumé, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes.}}$$

IV.2. Puisque les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes, les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont convergentes et ont même limite. On note γ cette limite. D'après II., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = H_n - \ln(n+1) \geqslant 0$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\gamma \geqslant 0$.

V.1. La suite u tend vers γ en décroissant. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \gamma$ puis $H_n - \ln(n) - \gamma \geqslant 0$.
La suite v tend vers γ en croissant. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma$ ou encore $H_n - \ln(n+1) \leqslant \gamma$. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n - \gamma \leqslant \ln(n+1)$ puis que $H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).}$$

V.2. Fonction en langage Python.

```python
def gamma(epsilon):
    n=1
    somme_harmonique=1
    while math.log(1+1/n)>= epsilon :
        n += 1
        somme_harmonique += 1/n
    return somme_harmonique-math.log(n)
```

Partie B : le problème de Bâle

VI. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \times k} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

VII. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En additionnant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ (somme télescopique).}$$

En rajoutant 1 à chaque membre, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$ et donc $B_n \leqslant 2$. Cette dernière inégalité reste vraie quand $n = 1$. Ainsi, la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ est majorée par 2.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} - B_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$. Donc, la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante. Finalement, la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée par 2. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n \geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

VIII.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \pi]$. D'après les formules d'Euler,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = D_n(t).$$

VIII.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, \pi]$. Alors, $e^{it} \neq 1$ puis

$$\begin{aligned}
D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{it}\right)^k = \left(e^{it}\right)^{-n} \times \frac{1 - \left(e^{it}\right)^{2n+1}}{1 - e^{it}} = e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\
&= \frac{e^{-int} \times e^{\frac{i(2n+1)t}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}} \times \frac{e^{\frac{i(2n+1)t}{2}} - e^{-\frac{i(2n+1)t}{2}}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} = e^0 \frac{2i \sin\left(\dfrac{2n+1}{2} t\right)}{2i \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2} t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

VIII.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $D_n(0) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(0) = 2n + 1$. Finalement,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,\pi],\ D_n(t)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\text{ si } t\in]0,\pi]\\ 2n+1 \text{ si } t=0\end{array}\right.}.$$

IX.1. f est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. D'autre part,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}=1=f(0).$$

Donc, f est également continue en 0 et finalement

$$\boxed{f\text{ est continue sur }\left[0,\frac{\pi}{2}\right].}$$

IX.2. $f(t)\underset{t\to 0^+}{=}\dfrac{t}{t+o\left(t^2\right)}\underset{t\to 0^+}{=}\dfrac{1}{1+o(t)}\underset{t\to 0^+}{=}1+o(t)\underset{t\to 0^+}{=}f(0)+0\times t+o(t)$. Ainsi, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et donc

$$\boxed{f\text{ est dérivable en }0\text{ et }f'(0)=0.}$$

IX.3. f est de classe C^1 sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. D'autre part, f est dérivable en 0. De plus, pour $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(t)=\frac{\sin(t)-t\cos(t)}{\sin^2(t)}.$$

Par suite,

$$f'(t)\underset{t\to 0^+}{=}\frac{\left(t+o\left(t^2\right)\right)-t(1+o(t))}{t^2+o\left(t^2\right)}\underset{t\to 0^+}{=}\frac{o\left(t^2\right)}{t^2+o\left(t^2\right)}\underset{t\to 0^+}{=}\frac{o(1)}{1+o(1)}\underset{t\to 0^+}{=}o(1).$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t)=0=f'(0)$. Par suite, f' est continue en 0 et finalement

$$\boxed{f\text{ est de classe }C^1\text{ sur }\left[0,\frac{\pi}{2}\right].}$$

X.1. Soit k un entier naturel non nul. Les deux fonctions $t\mapsto\dfrac{t^2}{2\pi}-t$ et $t\mapsto\dfrac{\sin(kt)}{k}$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une première intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt&=\left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\\&=0-\frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(kt)\,dt=-\frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(kt)\,dt.\end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties, licite, fournit alors

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt&=-\frac{1}{k}\left(\left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_0^\pi+\frac{1}{k}\int_0^\pi\frac{1}{\pi}\cos(kt)\,dt\right)\\&=-\frac{1}{k}\left(0-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi\right)=\frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt=\frac{1}{k^2}.}$$

X.2. Soit n un entier naturel non nul. Par linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\ dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right) dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2}\ dt \text{ (d'après III.1.).}\end{aligned}$$

X.3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \frac{\pi^2}{3}.}$$

X.4. Pour tout entier naturel non nul n,

$$B_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\ dt + \frac{\pi^2}{6},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t)\ dt.}$$

X.5. Soit n un entier naturel non nul. On pose $u = \dfrac{t}{2}$ (changement de variable linéaire et donc légitime) ou encore $t = 2u$ et donc $dt = 2du$. On obtient (la variable d'intégration étant muette)

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2u - \frac{(2u)^2}{2\pi}\right) D_n(2u)\ 2du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) tD_n(2t)\ dt.$$

Ensuite, pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $2t \in]0,\pi]$ puis, d'après VIII.2., $tD_n(2t) = \dfrac{t}{\sin(t)}\sin((2n+1)t)$. La fonction $t \mapsto tD_n(2t)$ étant continue sur $[0,\pi]$, on peut donc écrire

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)}\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)\sin((2n+1)t)\ dt.$$

XI. Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $g(t) = f(t)\left(2 - \dfrac{2t}{\pi}\right)$ (où f a été définie à la question X.). D'après la question X., g est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et d'autre part, pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(t) = \dfrac{t}{\sin(t)}\left(2 - \dfrac{2t}{\pi}\right)$. Donc, g est une fonction de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\ dt.$$

XII. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto -\dfrac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\ dt &= \left[g(t) \times -\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos((2n+1)t)\ dt \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(-g\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) + g(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos((2n+1)t)\ dt\right) \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(g(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos((2n+1)t)\ dt\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\ dt\right| \leqslant \frac{1}{2n+1}\left(|g(0)| + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(t)||\cos((2n+1)t)|\ dt\right) \leqslant \frac{1}{2n+1}\left(|g(0)| + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(t)|\ dt\right).$$

Puisque $\frac{1}{2n+1}\left(|g(0)| + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(t)|\ dt\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\ dt = 0.$$

XIII. D'après les deux questions précédentes, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}$. On a montré que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie C : les lois géométriques

XIV. Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout entier naturel n, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (car $x \neq 1$). Puisque $|x| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$. Donc, la série numérique de terme général x^k converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right) = \frac{1}{1-x}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.}$$

XV. On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. En dérivant deux fois l'égalité de la question précédente, on obtient pour $x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.}$$

XVI. Puisque $p \in]0,1[$, on a encore $1-p \in]0,1[$. Chaque p_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est donc un réel positif. De plus, la série géométrique de terme général $p(1-p)^{k-1}$ converge (toujours car $1-p \in]0,1[\subset]-1,1[$) et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

On a donc bien défini une loi de probabilité.

XVII. L'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kp_k = p\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$. Puisque $1-p \in]0,1[\subset]-1,1[$, la série de terme général $k(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge d'après la question XV. et de plus,

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Toujours d'après la question XV., la série de terme général $k(k-1)(1-p)^{k-2}$, $k \geqslant 2$, converge. D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (k(k-1)+k)p_k \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k \text{ (les deux séries convergent)} \\
&= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3} + \mathbb{E}(X) = \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

Enfin, puisque X admet un moment d'ordre 2, on sait que X admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

XVIII.1. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

XVIII.2. Puisque les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes, elles sont en particulier deux à deux indépendantes et on sait alors que

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-p_i}{p_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \text{ et } \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.}$$

Partie D : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

XIX. Inégalité de Markov

Soit a un réel strictement positif. On pose $Y_1 = \{y \in Y(\Omega)/\ y \geqslant a\}$ et $Y_2 = \{y \in Y(\Omega)/\ y < a\}$ de sorte que $Y(\Omega) = Y_1 \cup Y_2$ et $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y\ P(Y=y) = \sum_{y \in Y_1} y\ P(Y=y) + \sum_{y \in Y_2} y\ P(Y=y) \\
&\geqslant \sum_{y \in Y_1} y\ P(Y=y) \text{ (car la variable Y est positive)} \\
&\geqslant a \sum_{y \in Y_1} P(Y=y) = a\ P(Y \geqslant a),
\end{aligned}$$

(car l'événement $\{Y \geqslant a\}$ est la réunion disjointe des événements $\{Y = y\}$, $y \in Y(\omega)$ et $y \geqslant a$). Puisque $a > 0$, on en déduit que $P(Y \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{a}$. On a montré que

$$\boxed{\forall a > 0,\ \mathsf{P}(Y \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.}$$

XX. Inégalité de Bienaymé-Thchebychev

Soit a un réel strictement positif. Pour tout $\omega \in \Omega$, $|X(\omega) - \mathbb{E}(X)| \geqslant a \Leftrightarrow (X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant a^2$. Les événements $|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a$ et $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant a^2$ sont donc égaux. D'après l'inégalité de Markov et en tenant compte du fait que $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant 0$ et que $a^2 > 0$,

$$\mathsf{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) = \mathsf{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant a^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathsf{E}(X))^2\right)}{a^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

$$\boxed{\forall a > 0,\ \mathsf{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y)}{a^2}.}$$

Partie E : le problème du collectionneur

XXI. La variable aléatoire égale au nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection c'est-à-dire chacun des n animaux est la variable T_n.

XXII. $T_1(\Omega) = \{1\}$ et $\mathsf{P}(T_1 = 1) = 1$. On peut aussi considérer conventionnellement que $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis que $\mathsf{P}(T_1 = 1) = 1$ et pour tout $q \geqslant 2$, $\mathsf{P}(T_1 = q) = 0$.

XXIII.1. Pour $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$, notons $E_{i,k}$, l'événement « le collectionneur a obtenu l'animal n° i à l'achat n° k ». Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'événement « à chacun des q achats, le collectionneur a obtenu l'image n° i » est l'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{q} E_{i,k}$.

A chaque achat de tablette, la probabilité d'obtenir un animal donné est $\dfrac{1}{n}$ ou encore pour $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$, $\mathsf{P}(E_{i,k}) = \dfrac{1}{n}$.
En supposant que les différents achats de tablettes sont mutuellement indépendants, la probabilité que le collectionneur obtienne toujours l'animal n° i au cours de q achats de tablettes est $\displaystyle\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{q} E_{i,k}\right) = \prod_{k=1}^{q} \mathsf{P}(E_{i,k}) = \prod_{k=1}^{q} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^q}$.

XXIII.2. Soit $q \geqslant 1$. $T_2 > q$ est l'événement « le collectionneur a obtenu toujours le même animal au cours des q premiers achats » c'est-à-dire $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{k=1}^{q} E_{i,k}\right)$, la réunion étant disjointe. Donc,

$$\mathsf{P}(T_2 > q) = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{q} E_{i,k}\right)\right) = n \times \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^{q-1}},$$

(y compris si $q = 1$ car $T_2 > 1$ est l'événement certain).

XXIII.3. A priori, $T_2(\Omega) = \{q \in \mathbb{N}/\ q \geqslant 2\} \cup \{\infty\}$. Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(T_2 = q) &= \mathsf{P}\left(\{T_2 > q - 1\} \setminus \{T_2 > q\}\right) \\
&= \mathsf{P}(T_2 > q - 1) - \mathsf{P}(T_2 > q) \ \text{(car } \{T_2 > q\} \subset \{T_2 > q - 1\}\text{)} \\
&= \frac{1}{n^{q-2}} - \frac{1}{n^{q-1}}.
\end{aligned}$$

On en déduit encore que

$$\begin{aligned}
P(T_2=\infty) &= 1-P(T_2<\infty) = 1-\sum_{q=2}^{+\infty} P(T_2=q) = 1-\sum_{q=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{q-2}}-\frac{1}{n^{q-1}}\right)\\
&= 1-\lim_{N\to+\infty}\sum_{q=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{q-2}}-\frac{1}{n^{q-1}}\right)\\
&= 1-\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^{N-1}}\right) \text{ (somme télescopique)}\\
&= 1-(1-0) \text{ (car } n>1)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On décide alors conventionnellement que $T_2(\Omega)=\{q\in\mathbb{N}/\ q\geqslant 2\}$.

$$\boxed{T_2(\Omega)=\{q\in\mathbb{N}/\ q\geqslant 2\} \text{ et } \forall q\geqslant 2,\ P(T_2=q)=\frac{1}{n^{q-2}}-\frac{1}{n^{q-1}}=\frac{n-1}{n^{q-1}}.}$$

XXIII.4. Dans cette question $n=100$ et donc pour tout $q\geqslant 2$, $P(T_2=q)=\dfrac{99}{100^{q-1}}=\dfrac{99}{10^{2(q-1)}}$. Par suite, $P(T_2=2)=\dfrac{99}{10^2}=0,99$. En achetant deux tablettes, la probabilité d'obtenir deux animaux différents est $0,99$ et donc en achetant au moins deux tablettes, la probabilité d'obtenir deux animaux différents est supérieure ou égale à $0,99$. Le nombre minimal d'achats est 2.

XXIII.5. Z_1 est le nombre d'achats jusqu'au moment où la collection comporte 1 animal. Donc, $Z_1=1=T_1$.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. T_{k-1} (resp. T_k) est le nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ (resp. k) animaux différents. Z_k est donc la différence entre ces deux nombres.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ Z_k=\left\{\begin{array}{l}T_1 \text{ si } k=1\\ T_k-T_{k-1} \text{ si } k\geqslant 2\end{array}\right..}$$

XXIII.6. Soit $k\geqslant 2$.

$$T_k=T_1+\sum_{i=2}^{k}(T_i-T_{i-1})=Z_1+\sum_{i=2}^{k}Z_i=\sum_{i=1}^{k}Z_i,$$

ce qui reste vrai quand $k=1$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ T_k=\sum_{i=1}^{k}Z_i.}$$

XXIII.7. Z_1 est la variable constante 1. Conventionnellement, Z_1 suit la loi géométrique de paramètre $p_1=1$.

Soit $k\geqslant 2$. Comme à la question XXIII.3., a priori, $Z_k(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$. Soit $q\geqslant 1$. L'événement $\{Z_k=q\}$ est l'événement « à partir du moment où le collectionneur a obtenu $k-1$ animaux différents pour la première fois, le collectionneur a acheté $q-1$ tablettes contenant l'un des $k-1$ animaux déjà obtenus et à son q-ème achat, a obtenu l'un des $n-(k-1)$ animaux qu'il n'avait pas encore ».

On reconnaît le fait que Z_k suit la loi géométrique de paramètre $p_k=\dfrac{n-(k-1)}{n}$ ce qui reste conventionnellement vrai quand $k=1$ et donc que

$$\forall q\in\mathbb{N}^*,\ P(Z_k=q)=\frac{n-(k-1)}{n}\left(1-\frac{n-(k-1)}{n}\right)^{q-1}.$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ Z_k \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p_k=\frac{n-(k-1)}{n}.}$$

On en déduit encore que pour $k \geqslant 2$, $\mathbb{E}(Z_k) = \dfrac{n}{n-(k-1)}$ et $\mathbb{V}(Z_k) = \dfrac{(k-1)/n}{(n-(k-1))^2/n^2} = \dfrac{n(k-1)}{(n-(k-1))^2}$ ce qui reste vrai quand $k = 1$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Z_k) = \frac{n}{n-(k-1)} \text{ et } \mathbb{V}(Z_k) = \frac{n(k-1)}{(n-(k-1))^2}.}$$

XXIII.8. D'après la question précédente et la question XVIII.1., en posant $k' = n-(k-1)$,

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-(k-1)} = \sum_{k'=1}^{n} \frac{n}{k'} = nH_n.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n.}$$

XXIII.9. D'après la question III.2., $\mathbb{E}(T_n) = nH_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).}$$

XXIV.1. Puisque les variables Z_k sont indépendantes, puisque chaque Z_k suit la loi géométrique de paramètre $p_k = \dfrac{n-(k-1)}{n}$ et que $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$, la question XVIII.2. permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Z_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n-(k-1))^2} - nH_n \\
&= n^2 \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{k'^2} - nH_n \text{ (toujours en posant } k' = n-(k-1)) \\
&= n^2 B_n - nH_n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) = n^2 B_n - nH_n.}$$

XXIV.2. Puisque la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ en croissant, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{6}$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{V}(T_n) = n^2 B_n - nH_n \leqslant n^2 B_n \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}.}$$

XXV. Soit λ un réel strictement positif. Puisque $n \geqslant 3$, $\lambda n\ln(n) > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et d'après la question précédente,

$$P\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n\ln(n)\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T_n)}{\lambda^2 n^2 (\ln(n))^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln(n))^2}.$$

XXVI.

$$\begin{aligned}
\{T_n \geqslant nH_n + n\ln(n)\} &= \{T_n - E(T_n) \geqslant n\ln(n)\} \\
&\subset \{T_n - E(T_n) \geqslant n\ln(n)\} \cup \{T_n - E(T_n) \leqslant -n\ln(n)\} = \{|T_n - E(T_n)| \geqslant n\ln(n)\}
\end{aligned}$$

et donc, d'après la question précédente appliquée dans le cas où $\lambda = 1$,

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{T}_n \geqslant n\mathsf{H}_n + n\ln(n)\right) \leqslant \mathsf{P}\left(|\mathsf{T}_n - \mathsf{E}\left(\mathsf{T}_n\right)| \geqslant n\ln(n)\right) \leqslant \frac{\pi^2}{6(\ln(n))^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\mathsf{T}_n \geqslant n\mathsf{H}_n + n\ln(n)\right) \leqslant 0,01 &\Leftarrow \frac{\pi^2}{6(\ln(n))^2} \leqslant 0,01 \Leftarrow (\ln(n))^2 \geqslant \frac{100\pi^2}{6} \\ &\Leftarrow \ln(n) \geqslant \sqrt{\frac{50\pi^2}{3}} \Leftarrow n \geqslant \exp\left(\sqrt{\frac{50\pi^2}{3}}\right) \\ &\Leftarrow n \geqslant 371\,572,1\ldots \Leftarrow n \geqslant 371\,573.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'entier } n_0 = 371\,573 \text{ convient.}}$

