SESSION 2020

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Partie A : barycentres

I. Existence et caractérisation

I.1.a. Soit $(M, N) \in \mathcal{P}^2$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} f(N) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NP_i} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP_i}\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} + \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{NM} \\ &= f(M) + \alpha \overrightarrow{NM}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (M, N) \in \mathcal{P}^2,\ f(N) = f(M) + \alpha \overrightarrow{NM}.}$$

I.1.b. Supposons $\alpha \neq 0$.

Injectivité. Soit $(M, N) \in \mathcal{P}^2$.

$$\begin{aligned} f(M) = f(N) &\Rightarrow f(M) = f(M) + \alpha \overrightarrow{NM} \Rightarrow \alpha \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{0} \text{ (car } \alpha \neq 0) \\ &\Rightarrow M = N. \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall (M, N) \in \mathcal{P}^2$, $(f(M) = f(N) \Rightarrow M = N)$. Donc, f est injective.

Surjectivité. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. D'après la question précédente, pour tout point M de $\mathcal{P}$, $f(M) = f(O) + \alpha \overrightarrow{MO} = f(O) - \alpha \overrightarrow{OM}$. Par suite, puisque α est un réel non nul,

$$\begin{aligned} f(M) = \overrightarrow{u} &\Leftrightarrow f(O) - \alpha \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{OM} = f(O) - \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha}\left(f(O) - \overrightarrow{u}\right) \\ &\Leftrightarrow M = O + \frac{1}{\alpha}\left(f(O) - \overrightarrow{u}\right). \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\exists M \in \mathcal{P}/\ f(M) = \overrightarrow{u}$. Donc, f est surjective.

$$\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0, f \text{ est injective et surjective.}}$$

I.1.c. Ainsi, si $\alpha \neq 0$, f est bijective. Si $\alpha = 0$, pour tout point M, $f(M) = f(O)$ et donc f est constante. Puisque $\mathcal{P}$ contient au moins deux points distincts, f n'est pas bijective. On a montré que

$$\boxed{f \text{ est bijective si et seulement si } \alpha \neq 0.}$$

I.2. On suppose $\alpha \neq 0$. f est donc bijective. En particulier, il existe un point G et un seul tel que $f(G) = \overrightarrow{0}$ ou encore

$$\boxed{\text{si } \alpha \neq 0,\ \exists! G \in \mathcal{P}/\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}.}$$

I.3. D'après la question 1.a., pour tout point M du plan, $f(M) = f(G) + \alpha\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MG}$. Donc,

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha\overrightarrow{MG}.}$$

II. Barycentre de deux points

Puisque P_0 et P_1 sont deux points distincts, ces deux points définissent une unique droite.

II.1. Soient P_0 et P_1 deux points distincts puis $I = \text{bar}\left((P_0, 1), (P_1, 1)\right)$. Par définition, $\overrightarrow{IP_0} + \overrightarrow{IP_1} = \overrightarrow{0}$. Donc, I est le milieu du segment $[P_0, P_1]$.

II.2. Soient $t \in \mathbb{R}$ puis $G = \text{bar}\left((P_0, t), (P_1, 1-t)\right)$ (G est bien défini car $t + 1 - t = 1 \neq 0$). Pour tout point M du plan, on a

$$t\overrightarrow{MP_0} + (1-t)\overrightarrow{MP_1} = (t + 1 - t)\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG}.$$

Pour $M = P_0$, on obtient en particulier $\overrightarrow{P_0G} = (1-t)\overrightarrow{P_0P_1}$. Ainsi, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{P_0G} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}$ et donc le point G appartient à la droite (P_0P_1).

II.3. Soit M un point de la droite (P_0P_1).

II.3.a. Il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{P_0M} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}$. Soit $t = 1 - \lambda$. Alors,

$$-\overrightarrow{MP_0} = \overrightarrow{P_0M} = (1-t)\overrightarrow{P_0P_1} = (1-t)\left(\overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MP_1}\right) = -(1-t)\overrightarrow{MP_0} + (1-t)\overrightarrow{MP_1}$$

et finalement, $t\overrightarrow{MP_0} + (1-t)\overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{0}$ ou encore $M = \text{bar}\left((P_0, t), (P_1, 1-t)\right)$. On a montré que

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ M \in (P_0P_1) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/\ M = \text{bar}\left((P_0, t), (P_1, 1-t)\right).}$$

II.3.b. Avec les notations précédentes, M appartient au segment $[P_0P_1]$ si et seulement si $\lambda \in [0, 1]$ ce qui équivaut à $t \in [0, 1]$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ M \in [P_0P_1] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1]/\ M = \text{bar}\left((P_0, t), (P_1, 1-t)\right).}$$

III. Propriétés du barycentre

III.1. Homogénéité

III.1.a. Soit λ un réel non nul. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda\alpha_i = \lambda\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = \lambda\alpha \neq 0$ et donc le barycentre du système $\left((P_0, \lambda\alpha_0), \dots, (P_n, \lambda\alpha_n)\right)$ est bien défini. Ensuite, pour tout M du plan,

$$\begin{aligned} M = \text{bar}\left((P_0, \lambda\alpha_0), \dots, (P_n, \lambda\alpha_n)\right) &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda\alpha_i\overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow M = \text{bar}\left((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n)\right). \end{aligned}$$

Donc, $\text{bar}\left((P_0, \lambda\alpha_0), \dots, (P_n, \lambda\alpha_n)\right) = \text{bar}\left((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n)\right)$.

III.1.b. Puisque le triangle $P_0P_1P_2$ est non aplati, les deux vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_0P_2}$ ne sont pas colinéaires. Mais alors, $\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\right)$ est une base du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Soit $M = \text{bar}\left((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2)\right) = \text{bar}\left((P_0, \alpha'_0), (P_1, \alpha'_1), (P_2, \alpha'_2)\right)$. D'après la question I.3.,

$$\alpha\overrightarrow{P_0M} = \alpha_0\overrightarrow{P_0P_0} + \alpha_1\overrightarrow{P_0P_1} + \alpha_2\overrightarrow{P_0P_2} = \alpha_1\overrightarrow{P_0P_1} + \alpha_2\overrightarrow{P_0P_2}.$$

puis $\overrightarrow{P_0M} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha}\overrightarrow{P_0P_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha}\overrightarrow{P_0P_2}$. De même, $\overrightarrow{P_0M} = \dfrac{\alpha'_1}{\alpha'}\overrightarrow{P_0P_1} + \dfrac{\alpha'_2}{\alpha'}\overrightarrow{P_0P_2}$. Par unicité des coordonnées, on en déduit que $\dfrac{\alpha_1}{\alpha} = \dfrac{\alpha'_1}{\alpha'}$ et que $\dfrac{\alpha_2}{\alpha} = \dfrac{\alpha'_2}{\alpha'}$.

Ainsi, $\alpha_1' = \dfrac{\alpha'}{\alpha}\alpha_1$ et $\alpha_2' = \dfrac{\alpha'}{\alpha}\alpha_2$. En échangeant les rôles des points P_0, P_1 et P_2, on obtient également le fait que $\alpha_0' = \dfrac{\alpha'}{\alpha}\alpha_0$.

Finalement, $(\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2') = \dfrac{\alpha'}{\alpha}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$. Donc, les deux triplets $(\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2')$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ sont proportionnels.

III.2. Associativité simple

III.2.a. *Un cas particulier.*

III.2.a.i.

$$\begin{aligned}
G = \operatorname{bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)) &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A}\right) + \beta\left(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B}\right) + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GG_1} + \left(\alpha\overrightarrow{G_1A} + \beta\overrightarrow{G_1B}\right) + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow m_1\overrightarrow{GG_1} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow G = \operatorname{bar}((G_1, m_1), (C,\gamma)).
\end{aligned}$$

Donc, $\operatorname{bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)) = \operatorname{bar}((G_1, m_1), (C,\gamma))$.

III.2.a.ii. Soient A, B, C, trois points non alignés puis $G = \operatorname{bar}((A,1),(B,1),(C,1))$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

D'après la question II.1, $\operatorname{bar}((B,1),(C,1)) = I$, $\operatorname{bar}((A,1),(C,1)) = J$ et $\operatorname{bar}(((A,1),(B,1)) = K$. D'après la question précédente,

$$G = \operatorname{bar}((A,1),(I,2)) = \operatorname{bar}((B,1),(J,2)) = \operatorname{bar}(C(1),(K,2)).$$

D'après la question II.3., le point G appartient à chacune des trois médianes (AI), (BJ) et (CK). Ces trois médianes sont donc concourantes en G.

Enfin, d'après la question I.3., puisque $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI}$ et donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. De même, $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CK}$. Le point de concours des trois médianes est situé au deux tiers de chaque médiane à compter du sommet associé.

III.2.b. *Cas général.* Posons $G = \operatorname{bar}((P_i,\alpha_i),\ i \in [\![0,n]\!])$. Puisque $(J_k)_{0\leqslant k\leqslant r}$ est une partition de $I = [\![0,n]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{r}\beta_k = \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{i\in J_k}\alpha_i\right) = \sum_{i\in I}\alpha_i = \alpha \neq 0.$$

Donc, $\operatorname{bar}((Q_k,\beta_k),\ k\in[\![0,r]\!])$ est bien défini. Ensuite, D'après la question I.3.,

$$\sum_{k=0}^{r}\beta_k\overrightarrow{GQ_k} = \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{i\in J_k}\alpha_i\overrightarrow{GP_i}\right) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}.$$

Par unicité, $G = \operatorname{bar}((Q_k,\beta_k),\ k\in[\![0,r]\!])$. On a montré que

$$\boxed{\operatorname{bar}((P_i,\alpha_i),\ i\in[\![0,n]\!]) = \operatorname{bar}((Q_k,\beta_k),\ k\in[\![0,r]\!]).}$$

III.3. Associativité double Tout d'abord,

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n}\beta_i\alpha_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{p}\beta_i\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{p}\beta_i = 1.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right) \neq 0$ et donc le barycentre du sytème $\displaystyle\left(\left(P_j, \sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right),\ j\in[\![0,n]\!]\right)$ est bien défini. Ensuite,

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right)\overrightarrow{GP_j}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\overrightarrow{GP_j}\right)=\sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n}\beta_i\alpha_{i,j}\overrightarrow{GP_j}\right)=\sum_{i=0}^{p}\beta_i\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}\overrightarrow{GP_j}\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{p}\beta_i\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}\right)\overrightarrow{GB_i}\text{ (d'après la question I.3.)}$$
$$=\sum_{i=0}^{p}\beta_i\overrightarrow{GB_i}=\overrightarrow{0}\text{ (puisque }G=\mathrm{bar}\left((B_i,\beta_i)\,,\ i\in[\![0,p]\!]\right)).$$

Donc, $G=\mathrm{bar}\left(\left(P_j,\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right),\ j\in[\![0,n]\!]\right)$.

IV. Barycentres et applications affines

Posons $G'=g(G)$.

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\overrightarrow{G'g(P_k)}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\overrightarrow{g(G)g(P_k)}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_g\left(\overrightarrow{GP_k}\right)$$
$$=\varphi\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\overrightarrow{GP_k}\right)\text{ (car }\varphi_g\text{ est linéaire)}$$
$$=\varphi\left(\overrightarrow{0}\right)=\overrightarrow{0}\text{ (car }\varphi_g\text{ est linéaire).}$$

Donc, $f(G)=\mathrm{bar}\left((f(P_0),\alpha_0),\ldots,(f(P_n),\alpha_n)\right)$.

Partie B : polynômes de Bernstein

V. Propriétés des polynômes de Bernstein

V.1. Valeurs en 0 et 1

Soit $n\in\mathbb{N}$. $B_{n,0}=(1-X)^n$ et donc $B_{n,0}(0)=1^n=1$. De même, $B_{n,n}=X^n$ et donc $B_{n,n}(1)=1$.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis $k\in[\![1,n]\!]$. Puisque $k>0$, $B_{n,k}(0)=\binom{n}{k}\times 0^k\times 1^{n-k}=0$.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis $k\in[\![0,n-1]\!]$. Puisque $n-k>0$, $B_{n,k}(1)=\binom{n}{k}\times 1^k\times 0^{n-k}=0$.

V.2. Positivité

Soient $n\in\mathbb{N}$ puis $k\in[\![0,n]\!]$. Pour tout réel $t\in]0,1[$, $t\geqslant 0$ et $1-t\geqslant 0$. Donc, $B_{n,k}(t)=\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\geqslant 0$, ce qui reste vrai pour $t=0$ et $t=1$ d'après la question précédente.

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, pour tout $t\in[0,1]$, $B_{n,k}(t)\geqslant 0$.

V.3. Symétrie

Soient $n\in\mathbb{N}$ puis $k\in[\![0,n]\!]$.

$$B_{n,n-k}(1-X)=\binom{n}{n-k}(1-X)^{n-k}(1-(1-X))^{n-(n-k)}=\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}=B_{n,k}$$

ce qui démontre le résultat.

V.4. Partition de l'unité

Soit $n\in\mathbb{N}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $t\in\{0,1\}$ d'après la question V.1. Soit $t\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=(t+(1-t))^n=1^n=1.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1.}$$

V.5. Relations de récurrence

V.5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $B_{n,0} = (1-X)^n = (1-X)\times(1-X)^{n-1} = (1-X)B_{n-1,0}$. De même, $B_{n,n} = X^n = X\times X^{n-1} = XB_{n-1,n-1}$.

V.5.b. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 puis $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
(1-X)B_{n-1,k} + XB_{n-1,k-1} &= (1-X)\binom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} + X\binom{n-1}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \binom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1}X^k(1-X)^{n-k} \\
&= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right)X^k(1-X)^{n-k} = \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} \\
&= B_{n,k}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall t \in \mathbb{R},\ B_{n,k}(t) = (1-t)B_{n-1,k}(t) + tB_{n-1,k-1}(t).}$$

VI. Dérivabilité et maximum

VI.1. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times [\![0, n]\!]$, $B_{n,k}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $B_{n,0} = (1-X)^n$ et donc $B'_{n,0} = n \times (-1) \times (1-X)^{n-1} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$.
- $B_{n,n} = X^n$ puis $B'_{n,n} = nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}$.

Supposons de plus $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $B_{n,k} = \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$. Puisque $k \geqslant 1$ et $n-k \geqslant 1$,

$$B'_{n,k} = \binom{n}{k}\left(kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right).$$

Or,

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

et

$$(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} = n\binom{n-1}{k}.$$

Donc,

$$B'_{n,k} = n\binom{n-1}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)} - n\binom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} = n\left(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}\right).$$

VI.2. Soit n un entier naturel non nul. $B'_{n,0}(0) = -nB_{n-1,0}(0) = -n$ (d'après la question V.1. et puisque $n-1 \geqslant 0$).

D'après la question précédente, $B'_{1,1}(0) = 1 \times B_{0,0}(0) = 1$ et si $n \geqslant 2$ de sorte que $n-1 \geqslant 1$,

$$B'_{n,1}(0) = n\left(B_{n-1,0}(0) - B_{n-1,1}(0)\right) = n(1-0) = n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B'_{n,1}(0) = n$.

Supposons de plus $n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![2, n]\!]$, 0 est racine d'ordre $k \geqslant 2$ de $B_{n,k}$ et on sait alors que 0 est racine d'ordre $k-1 \geqslant 1$ de $B'_{n,k}$. Donc, $B'_{n,k}(0) = 0$. En résumé,

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ B'_{n,k}(0) = \left\{\begin{array}{l} -n \text{ si } k=0 \\ n \text{ si } k=1 \\ 0 \text{ si } k \geqslant 2 \end{array}\right.,$$

et d'autre part, pour $k \in [\![0,1]\!]$, $B'_{1,k}(0) = \left\{\begin{array}{l} -1 \text{ si } k=0 \\ 1 \text{ si } k=1 \end{array}\right.$.

Ensuite, d'après la question V.3., pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, pour tout réel t de $[0,1]$, $B_{n,k}(t) = B_{n,n-k}(1-t)$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall t \in [0,1],\ B'_{n,k}(t) = -B'_{n,n-k}(1-t).$$

En particulier, si $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0,n]\!]$, $B'_{n,k}(1) = -B'_{n,n-k}(0) = \left\{\begin{array}{l} n \text{ si } k=n \\ -n \text{ si } k=n-1 \\ 0 \text{ si } k \leqslant n-2 \end{array}\right.$ et si $n=1$, $B'_{1,k}(1) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } k=1 \\ -1 \text{ si } k=0 \end{array}\right.$.

VI.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n,0} = (1-X)^n$. Donc, $B_{n,0}$ a un maximum égal à 1, atteint en 0 et uniquement en 0 avec $0 = \dfrac{0}{n}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $B_{n,n} = X^n$. Donc, $B_{n,n}$ a un maximum égal à 1, atteint en 1 et uniquement en 1 avec $1 = \dfrac{n}{n}$.

Dorénavant, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un élément de $[\![1,n-1]\!]$.

$$\begin{aligned} B'_{n,k} &= \binom{n}{k}\left(kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-(k-1)}\right) = \binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-(k-1)}\left(k(1-X)-(n-k)X\right) \\ &= \binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-(k-1)}(k-nX) = -n\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-(k-1)}\left(X-\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

Sur $]0,1[$, la fonction $t \mapsto B'_{n,k}(t)$ est du signe de $-\left(t-\dfrac{k}{n}\right)$. Donc, la fonction $B'_{n,k}$ est strictement positive sur $\left]0,\dfrac{k}{n}\right[$ et strictement négative sur $\left]\dfrac{k}{n},1\right[$ (en tenant compte de $0 < \dfrac{k}{n} < 1$). Puisque la fonction $B_{n,k}$ est continue sur $[0,1]$, la fonction $B_{n,k}$ est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{k}{n}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{k}{n},1\right]$.

Par suite, la fonction $B_{n,k}$ admet un maximum sur $[0,1]$, atteint en $\dfrac{k}{n}$ et uniquement en $\dfrac{k}{n}$. Ce maximum est égal à :

$$B_{n,k}\left(\frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{k^k(n-k)^{n-k}}{n^n}.$$

VII. Un peu d'algèbre linéaire

VII.1. • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Tout d'abord $\Phi_n(P)$ est effectivement un polynôme.

Ensuite, $\deg(nXP) \leqslant n+1$, $\deg(P') \leqslant n-1$ puis $\deg(X(1-X)P') \leqslant n+1$ et finalement $\deg(\Phi_n(P)) \leqslant n+1$. Enfin, si on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, le coefficient de X^{n+1} dans $\Phi_n(P)$ est $na_n + (-1)na_n = 0$. Donc, $\deg(\Phi_n(P)) \leqslant n$. Ainsi, Φ_n est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \Phi_n(\lambda P + \mu Q) &= nX(\lambda P + \mu Q) + X(1-X)(\lambda P' + \mu Q') = \lambda(nXP + X(1-X)P') + \mu(nXQ + X(1-X)Q') \\ &= \lambda\Phi_n(P) + \mu\Phi_n(Q). \end{aligned}$$

On a montré que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\Psi_n(P)$ est effectivement un polynôme.

Ensuite, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(B_{n,k}) = k+n-k = n$. Par suite, $\deg(\Psi_n(P)) \leqslant n$. Donc, Ψ_n est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\Psi_n(\lambda P+\mu Q) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\lambda P\left(\frac{k}{n}\right)+\mu Q\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}=\lambda\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}+\mu\sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}\\ &= \lambda\Psi_n(P)+\mu\Psi_n(Q).\end{aligned}$$

On a montré que Ψ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

VII.2. $B_{n,0}=(1-X)^n$ puis $B'_{n,0}=-n(1-X)^{n-1}$ (car $n\geqslant 1$) et donc

$$\Phi_n\left(B_{n,0}\right)=nX(1-X)^n+X(1-X)(-n)(1-X)^{n-1}=nX(1-X)^n-nX(1-X)^n=0=0B_{n,0}.$$

$B_{n,n}=X^n$ puis $B'_{n,n}=nX^{n-1}$ (car $n\geqslant 1$) et donc

$$\Phi_n\left(B_{n,n}\right)=nX\times X^n+X(1-X)nX^{n-1}=nX^n(X+1-X)=nX^n=nB_{n,n}.$$

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$ (pour $n\geqslant 2$). D'après la question VI.3.

$$\begin{aligned}\Phi_n\left(B_{n,k}\right) &= nX\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}+X(1-X)\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-1-k}(k-nX)=\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}(nX+(k-nX))\\ &= k\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}=kB_{n,k}.\end{aligned}$$

On a montré que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\Phi_n\left(B_{n,k}\right)=kB_{n,k}$.

VII.3. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Puisque $\Phi_n\left(B_{n,k}\right)=kB_{n,k}$ et que $B_{n,k}\neq 0$, k est valeur propre de Φ_n et $B_{n,k}$ est un vecteur propre associé.

Ainsi, la famille $\left(B_{n,k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On en déduit que la famille $\left(B_{n,k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\mathrm{card}\left(B_{n,k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}=n+1=\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)<+\infty$ et donc la famille $\left(B_{n,k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\left(B_{n,k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de Φ_n et donc Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est diagonalisable.

VII.4. $B_{n,0}\in\mathrm{Ker}\left(\Phi_n\right)$ et $B_{n,0}\neq 0$. Donc, $\mathrm{Ker}\left(\Phi_n\right)\neq\{0\}$. On en déduit que Φ_n n'est pas bijectif.

Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}\Psi_n(P)=0 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}=0\\ &\Rightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ P\left(\frac{k}{n}\right)=0\ \text{(car la famille } \left(B_{n,k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}\text{ est une famille libre de } \mathbb{R}_n[X])\\ &\Rightarrow P=0\ \text{(polynôme de degré inférieur ou égal à } n \text{ ayant au moins } n+1 \text{ racines 2 à 2 distinctes)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\left(\Psi_n\right)=\{0\}$. Puisque $\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)<+\infty$, on en déduit que Ψ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et en particulier que Ψ_n est bijectif.

Partie C : courbes de Bézier

VIII.1. Soit $t\in[0,1]$. D'après la question V.4., $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)=1$ et en particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)\neq 0$. Donc, le point $M(t)$ est bien défini.

VIII.2. Soit $t\in[0,1]$. D'après la question I.3. appliquée en remplaçant G par $M(t)$ et M par O, on a (en tenant compte de $\alpha=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)=1$),

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k}.$$

VIII.3. D'après la question V.1., $B_{n,0}(0) = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $B_{n,k}(0) = 0$. Donc,

$$\overrightarrow{OM(0)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(0)\overrightarrow{OP_k} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{k,0}\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OP_0}$$

puis $P_0 = M(0)$. De même, $B_{n,n}(1) = 1$ et pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $B_{n,k}(1) = 0$ et donc

$$\overrightarrow{OM(1)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(1)\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OP_n}$$

puis $P_n = M(1)$. En particulier, les points P_0 et P_n appartiennent à la courbe $\Gamma\left((P_0, \dots, P_n)\right)$.

IX.1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $Q_k = P_{n-k}$. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM(t)} &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\,\overrightarrow{OP_k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_{n,n-k}(1-t)\,\overrightarrow{OP_k} \text{ (d'après la question V.3.)} \\
&= \sum_{k'=0}^{n} B_{n,k'}(1-t)\,\overrightarrow{OP_{n-k'}} \text{ (en posant } k' = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(1-t)\,\overrightarrow{OQ_k} = \overrightarrow{ON(1-t)}.
\end{aligned}$$

puis $M(t) = N(1-t)$.

IX.2. Puisque l'application $\varphi\ :\ t \mapsto 1-t$ est une permutation de $[0, 1]$ (car φ est une involution de $[0, 1]$),

$$\Gamma = \{M(t),\ t \in [0, 1]\} = \{N(1-t),\ t \in [0, 1]\} = \{N(t'),\ t' \in [0, 1]\} = \Gamma'.$$

Ainsi, les courbes de Bézier Γ et Γ' sont les mêmes.

X. Dans cette question $n = 1$. Pour tout réel t de $[0, 1]$,

$$M(t) = \text{bar}\left((P_0, B_{1,0}(t)), (P_1, B_{1,1}(t))\right) = \text{bar}\left((P_0, 1-t), (P_1, t)\right) = \text{bar}\left((P_0, t'), (P_1, 1-t')\right)$$

où $t' = 1-t$. Or, t décrit $[0, 1]$ si et seulement si t' décrit $[0, 1]$ et donc $\Gamma(P_0, P_1)$ est le segment $[P_0P_1]$ d'après la question II.3.b.

XI. On dérive l'égalité de la question VIII.2. (la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ étant dérivable sur $[0, 1]$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $[0, 1]$). On obtient pour tout réel t de $[0, 1]$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \sum_{k=0}^{n} B'_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k}.$$

En particulier, d'après la question VI.2., $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B'_{n,k}(0)\overrightarrow{OP_k} = -n\overrightarrow{OP_0} + n\overrightarrow{OP_1} = n\overrightarrow{P_0P_1}$. Puisque le vecteur $n\overrightarrow{P_0P_1}$ n'est pas nul par hypothèse, un vecteur tangent à Γ en $M(0) = P_0$ est $n\overrightarrow{P_0P_1}$ (un autre vecteur tangent est plus simplement $\overrightarrow{P_0P_1}$).

De même, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B'_{n,k}(0)\overrightarrow{OP_k} = -n\overrightarrow{OP_{n-1}} + n\overrightarrow{OP_n} = n\overrightarrow{P_{n-1}P_n} \neq \overrightarrow{0}$. Un vecteur tangent à Γ en $M(1) = P_n$ est $n\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ (un autre vecteur tangent est plus simplement $\overrightarrow{P_nP_{n-1}}$).

XII. D'après la question IV., pour tout réel t de $[0, 1]$,

$$g(M(t)) = g\left(\text{bar}\left((P_k, B_{n,k}(t)),\ k \in [\![0,n]\!]\right)\right) = \text{bar}\left((g(P_k), B_{n,k}(t)),\ k \in [\![0,n]\!]\right).$$

Donc, $g(\Gamma(P_0,\ldots,P_n))$ est la courbe de BÉZIER associée à la famille de points de contrôle $(g(P_0),\ldots,g(P_n))$.

XIII. Par définition, $\overrightarrow{P_{i_0}, P'_{i_0}} = \overrightarrow{u}$. Pour tout réel t de $[0,1]$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON(t)} &= \sum_{\substack{i=0\\ i\neq i_0}}^{n} B_{n,i}(t)\overrightarrow{OP_i} + B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{OP'_{i_0}} = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq i_0}}^{n} B_{n,i}(t)\overrightarrow{OP_i} + B_{n,i_0}(t)\left(\overrightarrow{OP_{i_0}} + \overrightarrow{P_{i_0}P'_{i_0}}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t)\overrightarrow{OP_i} + B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{P_{i_0}P'_{i_0}} = \overrightarrow{OM(t)} + B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{u},\end{aligned}$$

et donc $\overrightarrow{M(t)N(t)} = B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{u}$ (en particulier, $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$). On en déduit que pour tout réel t de $[0,1]$,

$$\left\|\overrightarrow{M(t)N(t)}\right\| = |B_{n,i_0}(t)|\left\|\overrightarrow{u}\right\| = B_{n,i_0}(t)\left\|\overrightarrow{u}\right\| \text{ (d'après la question V.2.).}$$

Mais alors, d'après la question VI.3., la fonction $t \mapsto \left\|\overrightarrow{M(t)N(t)}\right\|$ admet un maximum sur $[0,1]$ et

$$\underset{t\in[0,1]}{\text{Max}} \left\|\overrightarrow{M(t)N(t)}\right\| = B_{n,i_0}\left(\frac{i_0}{n}\right)\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \binom{n}{i_0}\frac{i_0^{i_0}(n-i_0)^{n-i_0}}{n^n}\left\|\overrightarrow{u}\right\|.$$

Partie D : algorithme de CASTELJAU

XIV.1. Pour tout réel t de $[0,1]$, $B_{2,0}(t) = (1-t)^2$, $B_{2,1}(t) = 2t(1-t)$ et $B_2(t) = t^2$.

XIV.2. Soit $t \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM(t)} &= (1-t)^2\overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2}\\ &= \left((1-t)^2\overrightarrow{OP_0} + t(1-t)\overrightarrow{OP_1}\right) + \left(t(1-t)\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2}\right)\\ &= (1-t)\left((1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}\right) + t\left((1-t)\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_2}\right)\\ &= (1-t)(1-t+t)\overrightarrow{OM_{0,1}(t)} + t(1-t+t)\overrightarrow{OM_{1,1}(t)} \text{ (d'après I.3. et car } 1-t+t = 1 \neq 0)\\ &= (1-t)\overrightarrow{OM_{0,1}(t)} + t\overrightarrow{OM_{1,1}(t)}\\ &= (1-t+t)\overrightarrow{OM_{0,2}(t)} \text{ (d'après I.3. et car } 1-t+t = 1 \neq 0)\\ &= \overrightarrow{OM_{0,2}(t)}\end{aligned}$$

et donc $M(t) = M_{0,2}(t)$.

Autre solution : soit $t \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}M(t) &= \text{bar}\left(\left(P_0,(1-t)^2\right),(P_1,2t(1-t)),\left(P_2,t^2\right)\right)\\ &= \text{bar}\left(\left(M_{0,0}(t),(1-t)^2\right),(M_{1,0}(t),t(1-t)),(M_{1,0}(t),t(1-t)),\left(M_{2,0}(t),t^2\right)\right) \quad \text{[a]}\\ &= \text{bar}\left(\left(M_{0,1}(t),(1-t)^2+t(1-t)\right),\left(M_{1,1}(t),t(1-t)+t^2\right)\right) \quad \textbf{[b]}\\ &= \text{bar}\left((M_{0,1}(t),1-t),(M_{1,1}(t),t)\right)\\ &= M_{0,2}(t).\end{aligned}$$

L'égalité [a] vient du fait que l'égalité $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{OM_{0,0}(t)} + 2t(1-t)\overrightarrow{OM_{1,0}(t)} + t^2\overrightarrow{OM_{2,0}(t)}$ s'écrit encore $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{OM_{0,0}(t)} + t(1-t)\overrightarrow{OM_{1,0}(t)} + t(1-t)\overrightarrow{OM_{1,0}(t)} + t^2\overrightarrow{OM_{2,0}(t)}$.
L'égalité [b] est une conséquence de la question III.2.b. en tenant compte du fait que $(1-t)^2+t(1-t) = (1-t)(1-t+t) = 1-t \neq 0$ et $t(1-t)+t^2 = t \neq 0$.

Enfin, $M_{0,2}(0) = \text{bar}\left((M_{0,1}(0), 1), (M_{1,1}(0), 0)\right) = M_{0,1}(0) = \text{bar}\left((M_{0,0}(0), 1), (M_{1,0}(0), 0)\right) = M_{0,0}(0) = P_0 = M(0)$.
De même, $M_{0,2}(1) = M_{1,1}(1) = M_{2,0}(1) = P_2 = M(1)$.
On a monté que pour tout $t \in [0, 1]$, $M_{0,2}(t) = M(t)$.

XV.1. Montrons par récurrence (finie) que pour tout $l \in [\![0, n]\!]$, pour tout $k \in [\![0, n-l]\!]$,

$$M_{k,l}(t) = \text{bar}\left((P_k, B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t))\right).$$

- Pour $l = 0$, soit $k \in [\![0, n]\!]$. $\text{bar}\left((P_k, B_{0,0}(t))\right) = \text{bar}\left((P_k, 1)\right) = P_k = M_{k,0}(t)$. La formule est vraie quand $l = 0$.
- Soit $l \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, n-l]\!]$,

$$M_{k,l}(t) = \text{bar}\left((P_k, B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t))\right).$$

Soit $k \in [\![0, n-(l+1)]\!]$. D'après le théorème du barycentre partiel et en tenant compte de $\displaystyle\sum_{i=0}^{l} B_{l,i}(t) = 1$, de sorte que $\displaystyle\sum_{i=0}^{l}(1-t)B_{l,i}(t) = 1-t$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{l} tB_{l,i}(t) = t$,

$$\begin{aligned}
M_{k,l+1} &= \text{bar}\left((M_{k,l}(t), 1-t), (M_{k+1,l}(t), t)\right) \\
&= \text{bar}\left((\text{bar}\left((P_k, B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t))\right), 1-t),\right. \\
&\left.(\text{bar}\left((P_{k+1}, B_{l,0}(t)), (P_{k+2}, B_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+1+l}, B_{l,l}(t))\right), t)\right) \\
&= \text{bar}\left((P_k, (1-t)B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, (1-t)B_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+l}, (1-t)B_{l,l}(t)),\right. \\
&\left.(P_{k+1}, tB_{l,0}(t)), (P_{k+2}, tB_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+1+l}, tB_{l,l}(t))\right) \\
&= \text{bar}\left((P_k, B_{l+1,0}(t)), (P_{k+1}, (1-t)B_{l,1}(t)), (P_{k+1}, tB_{l,0}(t)), (P_{k+2}, (1-t)B_{l,2}(t)), (P_{k+2}, tB_{l,1}(t)), \ldots,\right. \\
&\left.(P_{k+l}, (1-t)B_{l,l}(t)), (P_{k+l}, tB_{l,l-1}(t)), (P_{k+1+l}, B_{l+1,l+1}(t))\right) \\
&= \text{bar}\left((P_k, (1-t)B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, (1-t)B_{l,1}(t) + tB_{l,0}(t)), \ldots,\right. \\
&\left.(P_{k+l}, (1-t)B_{l,l}(t) + tB_{l,l-1}(t)), (P_{k+1+l}, tB_{l,l}(t))\right) \\
&= \text{bar}\left((P_k, B_{l+1,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l+1,1}(t)), \ldots, (P_{k+l}, B_{l+1,l}(t)), (P_{k+1+l}, B_{l+1,l+1}(t))\right) \text{ (d'après V.5.a. et b.)}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $l \in [\![0, n]\!]$, pour tout $k \in [\![0, n-l]\!]$,

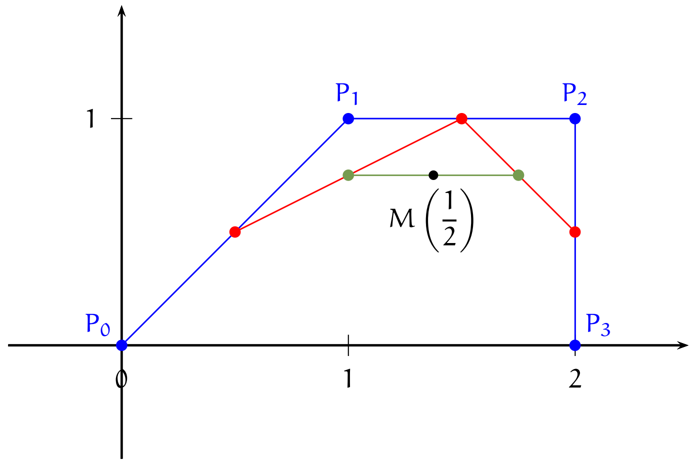
$$M_{k,l}(t) = \text{bar}\left((P_k, B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)), \ldots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t))\right).$$

XV.2. En particulier pour $l = n$, pour tout $t \in [0, 1]$,

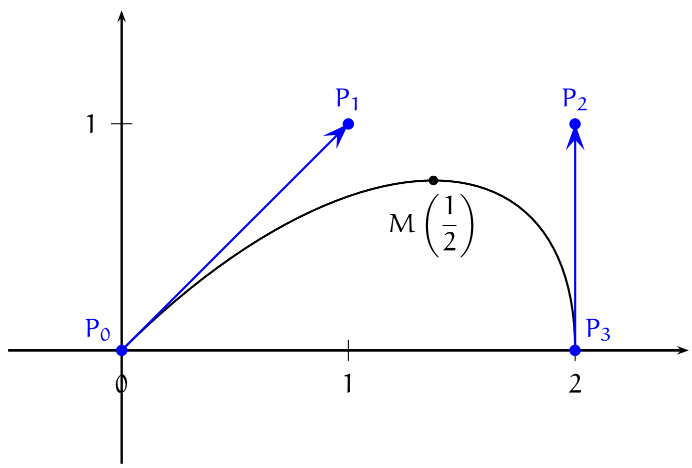
$$M_{0,n}(t) = \text{bar}\left((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \ldots, (P_n, B_{n,n}(t))\right) = M(t).$$

Pour construire le point $M(t)$, on part des points P_0, P_1, ..., P_n. On commence par construire les barycentres des n systèmes de points pondérés $((P_0, 1-t), (P_1, t))$, ..., $((P_{n-1}, 1-t), (P_n, t))$. On obtient les n points $M_{0,1}(t)$, ..., $M_{n-1,1}(t)$. On construit ensuite les barycentres des $n-1$ systèmes de points pondérés $((M_{0,1}(t), 1-t), (M_{1,1}(t), t))$, ..., $((M_{n-2,1}(t), 1-t), (M_{n-1,1}(t), t))$. On obtient les $n-1$ points $M_{0,2}(t)$, ..., $M_{n-2,2}(t)$ et ainsi de suite jusqu'à $M_{0,n}(t) = M(t)$.

XVI. $M_{0,1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $M_{1,1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, et $M_{2,1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sont les milieux respectifs des segments $[P_0, P_1]$, $[P_1, P_2]$ et $[P_2, P_3]$.
$M_{0,2}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $M_{1,2}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sont les milieux respectifs des segments $\left[M_{0,1}\left(\dfrac{1}{2}\right), M_{1,1}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$ et $\left[M_{1,1}\left(\dfrac{1}{2}\right), M_{2,1}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$.
Enfin, $M\left(\dfrac{1}{2}\right) = M_{0,3}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $\left[M_{0,2}\left(\dfrac{1}{2}\right), M_{1,2}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$.



On note que, pour $t \in [0,1]$, les coordonnées de $M(t)$ sont $\left(\begin{array}{c} 0\times(1-t)^3+1\times 3t(1-t)^2+2\times 3t^2(1-t)+2t^3 \\ 0\times(1-t)^3+1\times 3t(1-t)^2+1\times 3t^2(1-t)+0t^3 \end{array}\right)$ ou encore $\left(\begin{array}{c} 3t-t^3 \\ 3t(1-t) \end{array}\right)$



Partie E : points de contrôle aux sommets d'un carré

XVII. Isométries du carré

XVII.1. On sait qu'une isométrie du plan est en particulier une bijection du plan sur lui-même. Donc, une isométrie f laisse $\mathcal{Q}$ globalement invariant si et seulement si $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.

• Montrons que $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Is}(\mathcal{P}), \circ)$, le groupe des isométries du plan.

Tout d'abord, $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \subset \mathrm{Is}(\mathcal{P})$. Ensuite, $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$.
Soit $(f,g) \in (\mathcal{I}(\mathcal{Q}))^2$. $f\circ g(\mathcal{Q}) = f(g(\mathcal{Q})) = f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$. Donc, $f\circ g \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$.
Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ (on sait que f est bijective et que f^{-1} est une isométrie). $\mathcal{Q} = f(\mathcal{Q}) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{Q}) = f^{-1}(f(\mathcal{Q})) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ et donc $f^{-1} \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$.

On a montré que $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Is}(\mathcal{P}), \circ)$.

• Montrons que $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}(\mathcal{Q}), \circ)$. $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q}) = \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \mathrm{Is}^+(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Is}(\mathcal{P}), \circ)$ en tant qu'intersection de sous-groupes de ce groupe. Donc, $(\mathcal{I}^+(\mathcal{Q}), \circ)$ est un groupe.

• $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \notin \mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$ et donc $\mathrm{I}^-(\mathcal{Q})$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathcal{I}(\mathcal{Q}), \circ)$.

XVII.2. On sait que s_Δ est une isométrie négative du plan. Ensuite, $(s_\Delta(A), s_\Delta(B), s_\Delta(C), s_\Delta(B)) = (D, C, B, A)$ et donc, $s_\Delta(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$. Par suite, $s_\Delta \in \mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$.

Soit $f \in \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$. Alors, $s_\Delta \circ f \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ car $(\mathcal{I}(\mathcal{Q}), \circ)$ est un groupe et d'autre part, $f \circ s_\Delta$ est une isométrie négative en tant que composée d'une isométrie positive et d'une isométrie négative. Finalement, $s_\Delta \circ f \in \mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$. Ceci montre que F est bien une application de $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ dans $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$.

De même, $G : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}^-(\mathcal{Q}) & \rightarrow & \mathcal{I}^+(\mathcal{Q}) \\ f & \mapsto & s_\Delta \circ f \end{array}$ est une application de $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$ dans $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$. Ensuite, pour $f \in \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$, $G \circ F(f) = s_\Delta \circ s_\Delta \circ f = f$ et donc $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})}$ et de même, $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})}$.

On sait alors que F est une bijection (et que $G = F^{-1}$).

XVII.3. On note O le centre du carré $ABCD$. On oriente le plan de sorte que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

On sait que les isométries positives du plan sont l'identité du plan, les translations de vecteur non nul et les rotations d'angle non nul modulo 2π. L'identité du plan admet tout point pour point invariant. Une translation distincte de l'identité n'a pas de point invariant et une rotation distincte de l'identité a un point invariant et un seul, son centre.

Soit $f \in \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$. $f(A)$ est l'un des quatre points A, B, C ou D.

1er cas. Supposons $f(A) = A$. Donc, A est invariant par f. f est donc nécessairement l'identité du plan ou une rotation de centre A distincte de l'identité. Supposons que f soit une rotation de centre A distincte de l'identité. Alors, $f(B) \neq B$ (car A est l'unique point invariant) et $f(B) \neq A$ (car f est injective). Puisque $f(A)f(B) = AB$ et que $AC = \sqrt{2}AB \neq AB$, on a $f(B) \neq C$ et il ne reste que $f(B) = D$.
Mais alors, l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc, f est nécessairement égale à $r_{A,\frac{\pi}{2}}$ (la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$). Maintenant, il est clair que $r_{A,\frac{\pi}{2}}(C) \notin \mathcal{Q}$ et donc $r_{A,\frac{\pi}{2}} \notin \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$.

Finalement, si $f(A) = A$, alors nécessairement $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$.

2ème cas. Supposons $f(A) = C$. $f(C)$ n'est pas C (car f est injective) et $f(C)$ n'est ni B, ni D (car $f(A)f(C) = AC \neq BC$). Donc, $f(C) = A$. Mais alors, $f(O) = f(\mathrm{bar}((A,1),(C,1))) = \mathrm{bar}((f(A),1),(f(C),1)) = \mathrm{bar}((C,1),(A,1)) = O$. f est donc une isométrie positive distincte de l'identité admettant O pour point invariant. On en déduit que f est une rotation de centre O. Sonc angle est $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{f(O)f(A)}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \pi$ $[2\pi]$ et donc f est la rotation de centre O et d'angle π ou encore la symétrie centrale de centre O notée s_O.

Finalement, si $f(A) = C$, alors nécessairement $f = s_O$. Réciproquement, s_O est une isométrie positive et $(s_O(A), s_O(B), s_O(C), s_O(D)) = (C, D, A, B)$. Donc $s_O \in \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$.

3ème cas. Supposons $f(A) = B$. Donc, f est nécessairement la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ ou une rotation distincte de l'identité. $t_{\overrightarrow{u}}$ ne convient pas ($t_{\overrightarrow{u}}(B) \notin \mathcal{Q}$) et donc f est nécessairement une rotation transformant A en B.

$f \circ f$ est un élément de $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ tel que $f \circ f(A) = C$. D'après le deuxième cas, $f \circ f = r_{O,\pi}$. f est donc nécessairement une rotation de centre O. Son angle est $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ ou encore $\dfrac{\pi}{2}$. Donc, f est nécessairement la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui réciproquement convient.

Enfin, si $f(A) = D$, alors $f^{-1}(D) = A$ et l'étude précédente montre (en remplaçant A par D et B par A) que $f^{-1} = r_{O,\frac{\pi}{2}}$ puis que $f = r_{O,-\frac{\pi}{2}}$. Réciproquement, $r_{O,-\frac{\pi}{2}}$ convient.

Finalement,

$$\mathcal{I}^+(\mathcal{Q}) = \left\{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s_O, r_{O,\frac{\pi}{2}}, r_{O,-\frac{\pi}{2}}\right\} = \{r_k,\ 0 \leqslant k \leqslant 3\}$$

où pour $k \in [\![0,3]\!]$, $r_k = r_{O,\frac{k\pi}{2}}$.

La table de ce groupe (commutatif) est

$\circ$	Id	r_1	r_2	r_3
Id	Id	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	r_2	r_3	Id
r_2	r_2	r_3	Id	r_1
r_3	r_3	Id	r_1	r_2

XVII.4. D'après la question XVII.2., $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \left\{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s_O, r_{O,\frac{\pi}{2}}, r_{O,-\frac{\pi}{2}}, s_\Delta, s_\Delta \circ s_O, s_\Delta \circ r_{O,\frac{\pi}{2}}, s_\Delta \circ r_{O,-\frac{\pi}{2}}\right\}$.

On sait qu'une isométrie négative admettant un point invariant est une réflexion (et dans ce cas, l'ensemble des points invariants est une droite) et qu'une isométrie négative n'admettant pas de point invariant est la composée commutative d'une translation de vecteur non nul et d'une réflexion dont l'axe est dirigé par le vecteur de la translation. Puisque les quatre isométries négatives s_Δ, $s_\Delta \circ s_O$, $s_\Delta \circ r_{O,\frac{\pi}{2}}$, $s_\Delta \circ r_{O,-\frac{\pi}{2}}$ admettent toutes le point O pour point invariant, ces quatre isométries sont des réflexions.

Maintenant, en notant Δ' la médiatrice du segment $[A, B]$, il est clair que les quatre réflexions s_Δ, $s_{\Delta'}$, $s_{(AC)}$ et $s_{(BD)}$ sont quatre réflexions deux à deux distinctes laissant $\mathcal{Q}$ globalement invariant. Ce sont donc les quatre réflexions précédentes.

On a montré que $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \left\{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s_O, r_{O,\frac{\pi}{2}}, r_{O,-\frac{\pi}{2}}, s_\Delta, s_{\Delta'}, s_{(AC)}, s_{(BD)}\right\}$.

XVIII.1. $\mathrm{card}(\mathfrak{S}(\mathcal{Q})) = 4! = 24$.

XVIII.2. Γ_σ est isométrique à $\Gamma(A, B, C, D)$ si et seulement si il existe une isométrie f telle que $\Gamma_\sigma = f(\Gamma(A, B, C, D)) = \Gamma(f(A), f(B), f(C), f(D))$ (car une isométrie est une application affine et d'après la question IV.). On prend alors pour f chacune des huit isométries de $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$.

- Si $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (A, B, C, D)$.
- Si $f = r_{O,\frac{\pi}{2}}$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (B, C, D, A)$.
- Si $f = r_{O,\pi}$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (C, D, A, B)$.
- Si $f = r_{O,-\frac{\pi}{2}}$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (D, A, B, C)$.
- Si $f = s_\Delta$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (D, C, B, A)$.
- Si $f = s_{\Delta'}$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (B, A, D, C)$.
- Si $f = s_{(AC)}$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (A, D, C, B)$.
- Si $f = s_{(BD)}$, $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (C, B, A, D)$.

Les huit éléments de $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ (A, B, C, D), (B, C, D, A), (C, D, A, B), (D, A, B, C), (D, C, B, A), (B, A, D, C), (A, D, C, B) et (C, B, A, D) sont huit permutations σ telles que $\Gamma\sigma$ est isométrique à $\Gamma(A, B, C, D)$.

XVIII.3.a. Pour $t \in [0, 1]$, on note $M(t)$ le point courant de $\Gamma_1 = \Gamma((A, B, D, C))$ et $N(t)$ le point courant de $\Gamma((C, D, B, A))$. D'après la question XI., pour tout $t \in [0, 1]$, $M(t) = N(1 - t)$ puis $\Gamma((C, D, B, A)) = \Gamma_1$.

D'autre part, $C = s_O(A)$ et $D = s_O(B)$. Donc,

$$\Gamma((C, D, B, A)) = \Gamma\left((s_O(A), s_O(D), s_O(D), s_O(C))\right) = s_O(\Gamma(A, B, D, C)) = s_O\left(\Gamma_1\right).$$

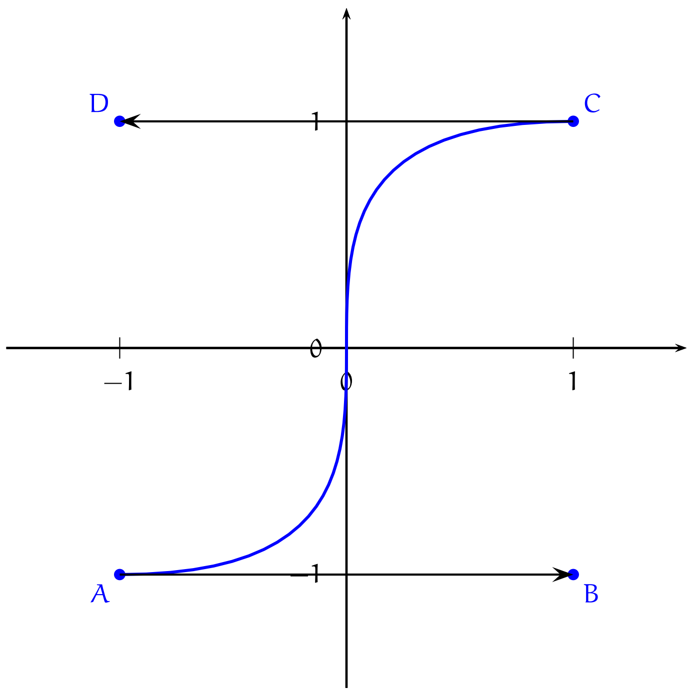
Donc, $s_O\left(\Gamma_1\right) = \Gamma_1$ ou encore Γ_1 est symétrique par rapport à O.

XVIII.3.b. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM(t)} &= (1-t)^3\overrightarrow{OA} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OB} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OD} + t^3\overrightarrow{OC} \\
&= \begin{pmatrix} (-1) \times (1-t)^3 + 1 \times 3t(1-t)^2 + (-1) \times 3t^2(1-t) + 1 \times t^3 \\ (-1) \times (1-t)^3 + (-1) \times 3t(1-t)^2 + 1 \times 3t^2(1-t) + 1 \times t^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 - 3t^2(1-t) + t^3 \\ -(1-t)^3 - 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 \\ -4t^3 + 6t^2 - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $(x(t), y(t)) = \left(8t^3 - 12t^2 + 6t - 1, -4t^3 + 6t^2 - 1\right)$.

XVII.3.c. Courbe Γ_1.



XVII.4. On rappelle que la tangente en P_0 est dirigée par $\overrightarrow{P_0P_1}$ et la tangente en P_3 est dirigée par $\overrightarrow{P_3P_2}$. Donc, $\Gamma_2 = \Gamma((A, B, C, D))$ et $\Gamma_3 = \Gamma((A, C, B, D))$. $\tau_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{Q}}$ et $\tau_3 = \tau_{B,C}$ (la transposition qui échange B et C) conviennent.

XVII.5. L'axe des abscisses est la droite Δ.

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \Gamma((A, B, C, D)) = \Gamma\left((s_\Delta(D), s_\Delta(C), s_\Delta(B), s_\Delta(A))\right) = s_\Delta\left(\Gamma(D, C, B, A)\right) \text{ (d'après IV.)}\\ &= s_\Delta(\Gamma(A, B, C, D)) \text{ (d'après IX.2.)}\\ &= s_\Delta\left(\Gamma_2\right).\end{aligned}$$

Donc, Γ_2 est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. De même,

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= \Gamma((A, C, B, D)) = \Gamma\left((s_\Delta(D), s_\Delta(B), s_\Delta(C), s_\Delta(A))\right) = s_\Delta\left(\Gamma(D, B, C, A)\right) = s_\Delta(\Gamma(A, C, B, D))\\ &= s_\Delta\left(\Gamma_3\right).\end{aligned}$$

Donc, Γ_3 est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

XVII.6. Il y a 24 permutations de la famille de points (A, B, C, D).

• Les 8 permutations suivantes (A, B, C, D), (B, C, D, A), (C, D, A, B), (D, A, B, C), (A, D, C, B), (C, B, A, D), (D, C, B, A), et (B, A, D, C) fournissent des courbes isométriques à Γ_2 d'après la question XVIII.2.

• Les 8 permutations suivantes (A, B, D, C), (B, D, C, A), (D, C, A, B), (C, A, B, D), (A, D, B, C), (C, B, D, A), (D, C, A, B), et (B, A, C, D) fournissent des courbes isométriques à Γ_1 en appliquant la question XVIII.2. à la famille (A, B, D, C).

• Les 8 permutations suivantes (A, C, B, D), (C, B, D, A), (B, D, A, C), (D, A, C, B), (C, A, B, D), (A, C, D, B), (D, B, C, A), et (B, D, A, C) fournissent des courbes isométriques à Γ_3.

Toute courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets du carré $ABCD$ est isométrique à l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2 ou Γ_3.

XVII.7. Soit $A'B'C'D'$ un carré. Il existe une similitude plane f telle que $f(A'B'C'D') = ABCD$. Si Γ' est une courbe de Bézier ayant pour point de contrôle les points A', B', C', D', alors $f(\Gamma')$ est une courbe de Bézier dont les points de contrôle sont A, B C et D. Il existe donc une isométrie g et $i \in [\![1, 3]\!]$ tel que $f(\Gamma') = g\left(\Gamma_i\right)$. Mais alors $\Gamma' = f^{-1} \circ g\left(\Gamma_i\right)$ où $f^{-1} \circ g$ est une similitude plane.

On a montré que toute courbe de Bézier dont les points de contrôle sont les sommets d'un carré est semblable à une des trois courbes Γ_1, Γ_2 ou Γ_3.

Partie F : raccordement de courbes de Bézier

XIX.1. Puisque $P_{n-1} \neq P_n$, la demi-tangente à gauche en $P_n = Q_0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ d'après la question XI.. De même, la demi-tangente à droite en $P_n = Q_0$ est dirigée par $\overrightarrow{Q_0Q_1}$.
Ainsi, la courbe raccordée est lisse en $P_n = Q_0 \Leftrightarrow (P_{n-1}P_n) = (Q_0Q_1) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{P_{n-1}P_n}, \overrightarrow{Q_0Q_1}\right)$ liée $\Leftrightarrow P_{n-1}$, P_n et Q_1 sont alignés.

XIX.2. La paramétrisation γ de la courbe raccordée est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Cette paramétrisation est de classe C^1 sur $[0, 1]$ si et seulement si elle est dérivable à droite en $\frac{1}{2}$, $\overrightarrow{\gamma_d'\left(\frac{1}{2}\right)} = \overrightarrow{\gamma_g'\left(\frac{1}{2}\right)}$ et $\lim\limits_{\substack{t\to\frac{1}{2}\\ t>\frac{1}{2}}} \overrightarrow{\gamma'(t)} = \overrightarrow{\gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}$.

D'après la question XI., $\overrightarrow{\gamma_g'\left(\frac{1}{2}\right)} = n\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ et, puisque $Q_0 = P_n$, γ est dérivable à droite en $\frac{1}{2}$ et $\overrightarrow{\gamma_d'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\overrightarrow{dN}}{dt}(0) = n\overrightarrow{P_nQ_1}$. Donc, γ est dérivable en $\frac{1}{2}$ si et seulement $\overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_nQ_1}$ ce qui équivaut au fait que P_n est le milieu du segment $[P_{n-1}, Q_1]$.

Maintenant, sous cette condition, l'application $t \mapsto \overrightarrow{OR(t)}$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car l'application $t \mapsto \overrightarrow{ON(2t-1)}$ est de classe C^1 sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $\overrightarrow{ON\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)} = \overrightarrow{OM\left(\frac{1}{2}\right)}$) et dérivable en $\frac{1}{2}$. L'application $t \mapsto \overrightarrow{OR(t)}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

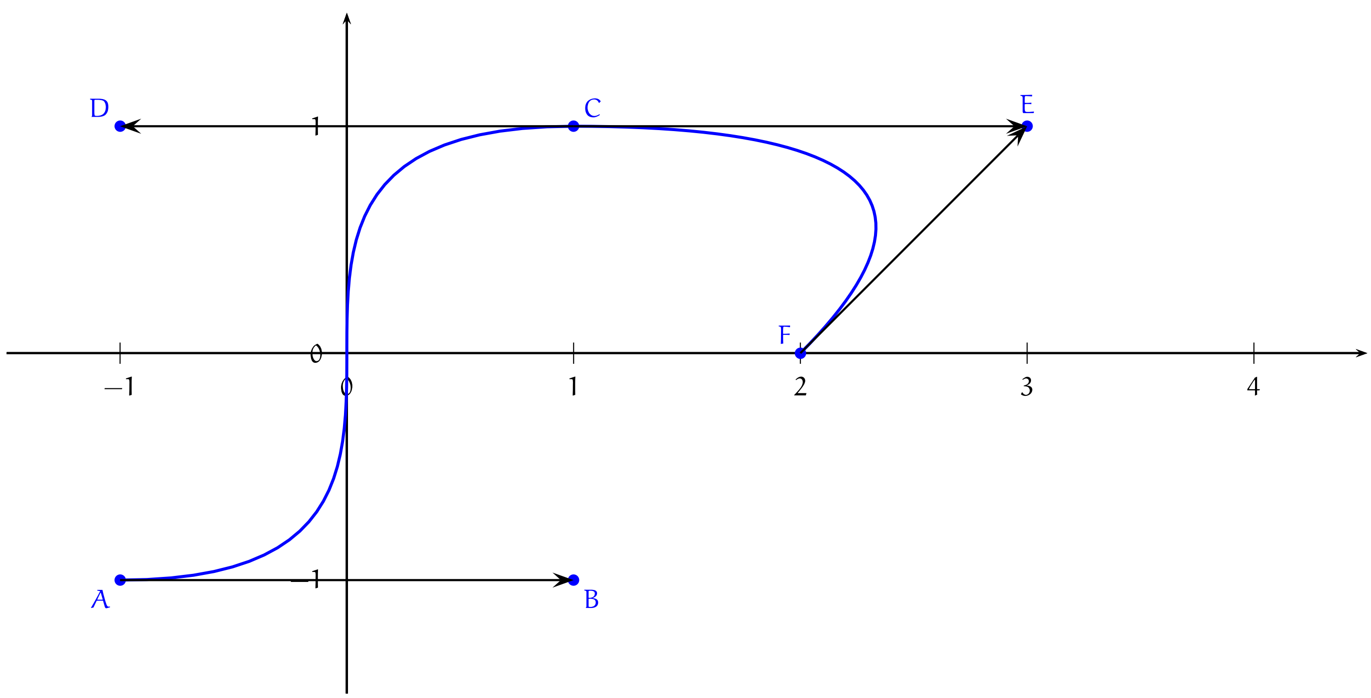
On a montré que la paramétrisation de la courbe raccordée est de classe C^1 sur $[0, 1]$ si et seulement si P_n est le milieu du segment $[P_{n-1}, P_n]$.

XX.1.a. D'après ce qui précède, le paramétrage est de classe C^1 sur $[0, 1]$ si et seulement si C est le milieu de $[D, E]$ ou encore $E = s_C(D)$. Les coordonnées de E sont donc $(2x_C - x_D, 2y_C - y_D)$ ou encore $(3, 1)$.

Notons $(a, 0)$ les coordonnées du point F. La tangente à Γ en F est dirigée par $\overrightarrow{EF}$ dont les coordonnées sont $(a-3, -1)$. La tangente en F a pour pente 1 si et seulement si $a - 3 = -1$ ou encore $a = 2$. Les coordonnées du point F sont $(2, 0)$

XX.1.b.

XX.2. Allure de la courbe Γ.



$$\big((1-t)^2+6t(1-t)+2t^2,(1-t)^2+2t(1-t)\big)=\big(-3t^2+4t+1,-t^2+1\big)$$

