SESSION 2019

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Problème n° 1

Partie A : logarithme de base a

I. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. La fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{a}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On sait alors qu'il existe une primitive de la fonction g sur $]0, +\infty[$ et une seule vérifiant de plus $g(1) = 0$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la fonction logarithme f_a.

II. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout réel $x > 0$, $f_a(x) = f_a(1) + \displaystyle\int_1^x f'_a(t)\ dt = a\int_1^x \frac{1}{t}\ dt = a\ln(x)$.

III. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $y > 0$. Pour $x > 0$, posons $g(x) = f_a(xy) - f_a(x) - f_a(y)$. La fonction $x \mapsto xy$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$. Donc, la fonction $x \mapsto f_a(xy)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de la fonction g et pour $x > 0$,

$$g'(x) = yf'_a(xy) - f'_a(x) = y\frac{a}{xy} - \frac{a}{x} = 0.$$

La fonction g est donc constante sur $]0, +\infty[$. Par suite, pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1) = f_a(y) - f_a(1) - f_a(y) = 0$. On a montré que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

IV. En particulier, pour $x > 0$, $f_a(x) + f_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = f_a\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = f_a(1) = 0$ et donc $f_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f_a(x)$.

V. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$*$ Soit $x > 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_a\left(x^n\right) = nf_a(x)$.

- $f_a\left(x^0\right) = f_a(1) = 0 = 0f_a(x)$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $f_a\left(x^n\right) = nf_a(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} f_a\left(x^{n+1}\right) &= f_a\left(x^n \times x\right) = f_a\left(x^n\right) + f_a(x) \text{ (d'après la question III.)} \\ &= nf_a(x) + f_a(x) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)f_a(x). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_a\left(x^n\right) = nf_a(x)$.

$*$ Soit $x > 0$. Soit n un entier relatif strictement négatif. Alors $-n > 0$ puis, d'après la question IV.,

$$f_a\left(x^n\right) = f_a\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -f_a\left(x^{-n}\right) = -(-n)f_a(x) = nf_a(x).$$

Ainsi, $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_a\left(x^n\right) = nf_a(x)$.

$*$ Soit $x > 0$. Soit p un entier naturel non nul. $f_a(x) = f_a\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right) = pf_a\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$ et donc $f_a\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \dfrac{1}{p}f_a(x)$. Donc, $\forall x > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f_a\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \dfrac{1}{p}f_a(x)$.

$*$ Soit $x > 0$. Soit r un nombre rationnel. Il existe $(n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{n}{p}$.

$$f_a\left(x^r\right) = f_a\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^n\right) = nf_a\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{n}{p}f_a(x) = rf_a(x).$$

On a montré que $\forall x > 0$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f_a\left(x^r\right) = rf_a(x)$.

VI. La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée, à savoir la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

VII. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, la fonction ln admet en $+\infty$ une limite ℓ élément de $]-\infty,+\infty]$. Supposons par l'absurde que ℓ est un réel. Pour tout $x>0$, $\ln(2x) = \ln(2)+\ln(x)$. Quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \ln(2)+\ell$ et donc $\ln(2) = 0$. Mais, $2>1$ et ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc, $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Ceci est une contradiction et donc $\ell = +\infty$. On a montré que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

De même, la fonction ln admet en 0 à droite une limite élément de $[-\infty,+\infty[$ puis, d'après la question IV.,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty.$$

On a montré que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty.$$

VIII. La fonction ln est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction ln est bijective de $]0,+\infty[$ sur $\ln(]0,+\infty[= \left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x), \lim_{x\to+\infty} \ln(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

On a montré que la fonction ln est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

IX. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Puisque $f_a = a\ln$, si $a>0$ f_a est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et si $a<0$, f_a est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Dans tous tous les cas, f_a est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : logarithme décimal

X. Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $x>0$, $f_a(x) = a\ln(x)$. Puisque $\ln(10) \neq \ln(1) = 0$, pour $a \in \mathbb{R}^*$,

$$f_a(10) = 1 \Leftrightarrow a\ln(10) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\ln(10)}.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité du logarithme décimal Log. De plus,

$$\forall x>0,\ \mathrm{Log}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

XI. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ puis $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de chiffres de N (N s'écrit donc sous la forme $N = c_0 + c_1 10 + \ldots + c_{n-1}10^{n-1}$ où les chiffres c_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, sont éléments de $[\![0,9]\!]$ et $c_{n-1} \neq 0$).
On a $10^{n-1} \leqslant N < 10^n$. Par stricte croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $\ln\left(10^{n-1}\right) \leqslant \ln(N) < \ln\left(10^n\right)$ puis $(n-1)\ln(10) \leqslant \ln(N) < n\ln(10)$. Puisque $\ln(10) > \ln(1) = 0$, on a encore $n-1 \leqslant \dfrac{\ln(N)}{\ln(10)} < n$ et finalement,

$$n-1 \leqslant \mathrm{Log}(N) < n.$$

Puisque $n-1$ est un entier, on en déduit que la partie entière de $\mathrm{Log}(N)$ est $n-1$. On en déduit encore que le nombre de chiffres en base 10 du nombre N est $n = \lfloor \mathrm{Log}(N) \rfloor + 1$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x).

XII.1. Supposons acquis le résultat de la question précédente. Le nombre de chiffres (en base 10) du nombre $N = 4^{2019}$ est la partie entière du nombre $\mathrm{Log}\left(4^{2019}\right)$ augmentée de 1. La calculatrice fournit

$$\mathrm{Log}\left(4^{2019}\right) = 2019\,\mathrm{Log}(4) = 2019\,\mathrm{Log}\left(2^2\right) = 4038\,\mathrm{Log}(2) = 1215,5\ldots$$

Le nombre de chiffres de 4^{2019} est donc 1216.

XII.2.a. Par hypothèse $\mathrm{I} = 10^{-5}$ W.m^{-2}. Le niveau sonore correspondant est

$$L = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right) = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\,\mathrm{Log}\left(10^7\right) = 10 \times 7\mathrm{Log}(10) = 70.$$

Le niveau sonore correspondant à une intensité de 10^{-5} W.m^{-2} est donc de 70 dB.

XII.2.b. Soit L le niveau sonore correspondant à une intensité sonore I. Soit I' l'intensité sonore correspondant à un niveau sonore $L' = L + 10$.

$$\begin{aligned} L' = L + 10 &\Leftrightarrow 10\,\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10\,\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) + 10 \Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) = \text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) + 1 \\ &\Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) - \text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 1 \Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{I'}{I_0} \times \frac{I_0}{I}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{I'}{I}\right) = 1 \Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{I'}{I}\right) = \text{Log}(10) \\ &\Leftrightarrow \frac{I'}{I} = 10 \text{ (car la fonction Log est une bijection de }]0, +\infty[\text{ sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow I' = 10I. \end{aligned}$$

Une augmentation de 10 dB correspond à une multiplication par 10 de l'intensité sonore.

XII.3. Supposons d'abord que la balle n'arrête pas de rebondir. Notons u_0 la hauteur initiale de la balle, exprimée en mètres, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n la hauteur de la balle après le n-ème rebond. Donc, $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0,7u_{n-1}$. Mais alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0(0,7)^n = 2 \times (0,7)^n.$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la hauteur de la balle après le n-ème rebond est $2 \times (0,7)^n$ mètres. Maintenant, la balle arrête de rebondir dès que $u_n < 10^{-3}$. Or,

$$\begin{aligned} u_n < 10^{-3} &\Leftrightarrow 2 \times (0,7)^n < 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \text{Log}\left(2 \times (0,7)^n\right) < \text{Log}\left(10^{-3}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction Log sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow \text{Log}(2) + n\ln(0,7) < -3 \Leftrightarrow n\text{Log}(0,7) < -3 - \text{Log}(2) \\ &\Leftrightarrow n > -\frac{3 + \text{Log}(2)}{\text{Log}(0,7)} \text{ (car Log}(0,7) < \text{Log}(1) = 0) \\ &\Leftrightarrow n > 21,3\ldots \text{ (fourni par la calculatrice)} \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 22 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le premier rebond après lequel la balle est à une hauteur strictement inférieure à 1 est le 22-ème. Donc, la balle s'arrête de rebondir après 22 rebonds.

Partie C : calcul de valeurs approchées du logarithme népérien

XIII. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \geqslant 1$. Puisque $-x \neq 1$, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-1)^n}{1 + x} = \frac{1}{1 + x} - (-1)^n \frac{x^n}{1 + x}$$

et donc $\dfrac{1}{1 + x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1 + x}$.

XIV. Ainsi, pour tout réel $t \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1 + t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1 + t}.$$

Soient $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Toutes les fonctions considérées étant continues sur $] - 1, +\infty[$, on peut intégrer de 0 à x. D'une part,

$$\int_0^x \frac{1}{1 + t}\, dt = [\ln(1 + t)]_0^x = \ln(1 + x) - \ln(1) = \ln(1 + x).$$

D'autre part, par linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned}\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\right)dt&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^x t^k\,dt+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall x>-1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

XV. Soit $x\in[0,+\infty[$ et $n\geqslant 1$. Pour tout réel t de $[0,x]$, $\dfrac{t^n}{1+t}\geqslant 0$ et donc, par positivité de l'intégration,

$$\left|\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\left|(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Pour tout réel t de $[0,x]$, $1+t\geqslant 1>0$ puis $\dfrac{1}{1+t}\leqslant 1$ et donc $\dfrac{t^n}{1+t}\leqslant t^n$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que

$$\left|\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\leqslant\int_0^x t^n\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x=\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

On a montré que pour tout x de $[0,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|\leqslant\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

XVI. Soit $x\in]-1,0]$ et $n\geqslant 1$. Pour tout réel t de $[x,0]$, $\dfrac{(-t)^n}{1+t}\geqslant 0$ et donc, par positivité de l'intégration,

$$\left|\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\left|-\int_x^0\frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right|=\int_x^0\frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

Pour tout réel t de $[x,0]$, $1+t\geqslant 1+x>0$ puis $\dfrac{1}{1+t}\leqslant\dfrac{1}{1+x}$ et donc $\dfrac{(-t)^n}{1+t}\leqslant(-t)^n$ (car $(-t)\geqslant 0$). Par croissance de l'intégration, on en déduit que

$$\left|\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\int_x^0\frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\leqslant\frac{1}{1+x}\int_x^0(-t)^n\,dt=\frac{1}{1+x}\left[-\frac{(-t)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0=\frac{1}{1+x}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

On a montré que pour tout x de $]-1,0]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|\leqslant\dfrac{1}{1+x}\times\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$.

XVII. Soit $x\in]-1,1]$.

1er cas. Si $x\in[0,1[$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'après la question XV.,

$$\left|\ln(1+x)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|=\left|\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=\ln(1+x)$.

2ème cas. Si $x\in]-1,0]$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'après la question XVI.,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| = \left|\int_0^x (-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{1+x}\times\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)(x+1)}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)(x+1)} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$.

En résumé, on a montré que pour tout $x\in]-1,1]$, la série de terme général $(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, converge et que

$$\forall x\in]-1,1],\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x).$$

XVIII. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|>1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} = +\infty$. En particulier, $(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La série de terme général $(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est donc grossièrement divergente.

XIX. Soient $x\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$ puis

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leqslant 10^{-8} \Leftarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant 10^{-8}.$$

XIX.1. Si $x=\frac{1}{3}$, la calculatrice fournit $\frac{1}{3^{14+1}(14+1)} = 4,6\ldots 10^{-9}$. Donc $n=14$ convient.

XIX.2. Si $x=\frac{1}{8}$, la calculatrice fournit $\frac{1}{8^{7+1}(7+1)} = 7,4\ldots 10^{-9}$. Donc $n=7$ convient.

XIX.3. Si $x=1$, $\frac{1^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ et $n = 10^8-1$ convient.

XX.1. D'après la question XVII., la série de terme général $(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, converge et a pour somme $\ln(1+1) = \ln(2)$. Donc, $\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. En posant $k=n+1$ et donc $n=k-1$, on obtient

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

car les entiers $k-1$ et $k+1$ ont même parité.

XX.2. Soient p un entier naturel non nul puis N un entier naturel supérieur ou égal à p.

$$\sum_{k=p}^{N}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p+3}-\frac{1}{2p+4}+\ldots+\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+2} = \sum_{k=2p+1}^{2N+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Puisque la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge, la suite $\left(\sum_{k=2p+1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)_{m\geqslant 2p+1}$ converge et a pour limite R_p. Mais alors, la suite extraite $\left(\sum_{k=2p+1}^{2N+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)_{N\geqslant p}$ converge et a pour limite R_p. Ceci montre que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ R_p = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right).$$

D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2} = \dfrac{(2k+2)-(2k+1)}{(2k+1)(2k+2)} = \dfrac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ R_p = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

XX.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 < (2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1) \leqslant (2k+1)(2k+2) \leqslant (2k+2)(2k+2) = (2k+2)^2$. Par stricte décroisance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \dfrac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

Soient alors N et p deux entiers naturels tels que $0 < p \leqslant N$. En additionnant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

XX.4. Soit a un réel strictement positif. Soient p et N deux entiers naturels tels que $0 < p \leqslant N$. Soit $k \in [\![p, N]\!]$.

La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{(2x+a)^2}$ est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$ (car $a > 0$) et en particulier sur $[k, k+1]$ et sur $[k-1, k]$.

Pour tout réel x de $[k, k+1]$, $\dfrac{1}{(2x+a)^2} = f(x) \leqslant f(k) = \dfrac{1}{(2k+a)^2}$ et pour tout x de $[k-1, k]$, $\dfrac{1}{(2k+a)^2} = f(k) \leqslant f(x) = \dfrac{1}{(2x+a)^2}$. Par croissance de l'intégration, on obtient pour tout $k \in [\![p, N]\!]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{(2k+a)^2}\, dx = (k+1-k) \times \frac{1}{(2k+a)^2} = \frac{1}{(2k+a)^2}$$

et

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(2k+a)^2}\, dx = (k-(k-1)) \times \frac{1}{(2k+a)^2} = \frac{1}{(2k+a)^2}.$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![p, N]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx \leqslant \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=p}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx$$

ou encore, d'après la relation de Chasles,

$$\int_p^{N+1} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{1}{(2x+a)^2}\, dx.$$

XX.5. Soient p et N deux entiers naturels tels que $0 < p \leqslant N$.

D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx$ et $\displaystyle\int_p^{N+1} \frac{1}{(2x+2)^2}\, dx \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2}$. Mais alors, d'après la question XX.3.,

$$\int_p^{N+1} \frac{1}{(2x+2)^2}\, dx \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx.$$

Maintenant, $\displaystyle\int_p^{N+1}\frac{1}{(2x+2)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2(2x+2)}\right]_p^{N+1}=\frac{1}{4p+4}-\frac{1}{4N+8}$ puis $\displaystyle\int_{p-1}^{N}\frac{1}{(2x+1)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2(2x+1)}\right]_{p-1}^{N}=\frac{1}{4p-2}-\frac{1}{4N+2}$. Ainsi,

$$\frac{1}{4p+4}-\frac{1}{4N+8}\leqslant\sum_{k=p}^{N}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}\leqslant\frac{1}{4p-2}-\frac{1}{4N+2}.$$

p étant fixé, quand N tend vers $+\infty$, on obtient d'après la question XX.2.,

$$\frac{1}{4p+4}\leqslant R_p\leqslant\frac{1}{4p-2}.$$

XX.6. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{4p}{4p+4}\leqslant 4pR_p\leqslant\dfrac{4p}{4p-2}$. De plus, $\dfrac{4p}{4p+4}\underset{p\to+\infty}{\sim}\dfrac{4p}{4p}=1$ et $\dfrac{4p}{4p-2}\underset{p\to+\infty}{\sim}\dfrac{4p}{4p}=1$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite $(4pR_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim\limits_{p\to+\infty}4pR_p=1$ ou encore que

$$R_p\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4p}.$$

XXI.1. $\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)=2\ln(2)-\ln(3)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)=\ln\left(\dfrac{9}{8}\right)=-3\ln(2)+2\ln(3)$.

Par suite, $\ln(2)=2\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$ et $\ln(3)=3\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+2\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$

XXI.2. $2\times0,28768207+0,11778304=0,69314718$ et $3\times0,28768207+2\times0,11778304=1,09861229$.
De plus,

$$\begin{aligned}|\ln(2)-0,69314718|&=\left|2\left(\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)-0,28768207\right)+\left(\ln\left(1+\frac{1}{8}\right)-0,11778304\right)\right|\\&\leqslant 2\left|\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)-0,28768207\right|+\left|\ln\left(1+\frac{1}{8}\right)-0,11778304\right|\leqslant 2\times10^{-8}+10^{-8}=3\times10^{-8}.\end{aligned}$$

De même, $|\ln(3)-1,09861229|\leqslant 10^{-8}+2\times10^{-8}=3\times10^{-8}$. La précision obtenue est donc 3×10^{-8}.

XXII. Soient $x\in]-1,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $-x\in]-1,1[$ puis, d'après la question XIV.,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\int_0^x(-1)^{2n}\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$$

et, en posant $u=-t$,

$$\begin{aligned}\ln(1-x)&=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}+\int_0^{-x}\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt=-\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{x^{k+1}}{k+1}+\int_0^x\frac{(-u)^{2n}}{1-u}\,(-du)\\&=-\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{x^{k+1}}{k+1}-\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t}\,dt\text{ (la variable d'intégration étant muette).}\end{aligned}$$

On en déduit que pour $x\in]-1,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)&=\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))\\&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k+1}{2}\frac{x^{k+1}}{k+1}+\int_0^x\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)t^{2n}\,dt\\&=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(-1)^{2l+1}}{2}\frac{x^{2l}+1}{2l+1}+\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt\text{ (car si k est impair, }\frac{(-1)^k+1}{2}=0)\\&=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{x^{2l+1}}{2l+1}+\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

XXIII. Soient $x\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k}+1}{2k+1}\right|=\left|\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt\right|=\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt.$$

Ensuite, pour tout réel t de $[0,x]$, $t^2\leqslant x^2$ puis $1-t^2\geqslant 1-x^2>0$ puis $\dfrac{1}{1-t^2}\leqslant\dfrac{1}{1-x^2}$ et donc $\dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\leqslant\dfrac{t^{2n}}{1-x^2}$. Par croissance de l'intégration,

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k}+1}{2k+1}\right|\leqslant\frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^{2n}\,dt=\frac{1}{1-x^2}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On a montré que

$$\forall x\in[0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k}+1}{2k+1}\right|\leqslant\frac{1}{1-x^2}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV.1. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\dfrac{1+x}{1-x}=2\Leftrightarrow 1+x=2-2x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$. De plus $\dfrac{1}{3}\in[0,1[$.
$\dfrac{1+x}{1-x}=3\Leftrightarrow 1+x=3-3x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. De plus $\dfrac{1}{2}\in[0,1[$.
Ainsi, si $x=\dfrac{1}{3}$, alors $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln(2)$ et si $x=\dfrac{1}{2}$, alors $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln(3)$.

XXIV.2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après les questions XXIII. et XXIV.1.,

$$\left|\ln(2)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^{2k+1}(2k+1)}\right|\leqslant\frac{2}{1-\dfrac{1}{3^2}}\frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)}=\frac{1}{4\times 3^{2n-1}(2n+1)}.$$

En particulier, pour $n=8$, $\left|\ln(2)-2\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{3^{2k+1}(2k+1)}\right|\leqslant\dfrac{1}{4\times 3^{13}\times 17}=1,02\ldots 10^{-9}\leqslant 10^{-8}$. De même,

$$\left|\ln(3)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)}\right|\leqslant\frac{2}{1-\dfrac{1}{2^2}}\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}=\frac{1}{3\times 2^{2n}(2n+1)}.$$

En particulier, pour $n=11$, $\left|\ln(3)-2\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)}\right|\leqslant\dfrac{1}{3\times 2^{20}\times 23}=3,45\ldots 10^{-9}\leqslant 10^{-8}$.

XXIV.3. En se rappelant qu'une valeur approchée de $\ln(3)$ avait été obtenue pour $n=14$ dans la question XIX., la méthode précédente semble plus performante que la méthode de la question XXI..

XXV.1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. n se décompose (de manière unique à l'ordre près des facteurs) en produit de facteurs premiers : $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_i sont des entiers naturels non nuls. Mais alors,

$$\ln(n)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ln(p_i).$$

La connaissance d'une valeur approchée de chaque $\ln(p)$, p premier, fournit alors une (un peu moins bonne) valeur approchée de $\ln(n)$.

XXV.2. Soit p un nombre premier. $\dfrac{1+x}{1-x}=p\Leftrightarrow 1+x=p-px\Leftrightarrow x=\dfrac{p-1}{p+1}$.
Donc, $x=\dfrac{1}{3}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=2$, $x=\dfrac{1}{2}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=3$, $x=\dfrac{2}{3}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=5$, $x=\dfrac{3}{4}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=7$, $x=\dfrac{5}{6}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=11$, $x=\dfrac{6}{7}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=13$, $x=\dfrac{8}{9}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=17$ et enfin, $x=\dfrac{9}{10}$ fournit $\dfrac{1+x}{1-x}=19$.
On applique alors la formule d'approximation de la question XXIII. à chacun de ces réels, en choisissant une valeur correcte de n pour chacun de ces x, pour obtenir une approximation des nombres $\ln(2)$, $\ln(3)$, $\ln(5)$, $\ln(7)$, $\ln(11)$, $\ln(13)$, $\ln(17)$ et $\ln(19)$ à un niveau de précision ε fixé.

On décompose alors chaque entier non premier de $[\![2, 20]\!]$ en produit de facteurs premiers. Pour chaque entier n de $[\![2, 20]\!]$, l'exposant maximum est $\alpha = 4$ ($2^4 = 16$) et le nombre de facteurs premiers deux à deux distincts est $k = 2$. On obtient donc chaque $\ln(n)$ à une précision de $4 \times 2\varepsilon$ ou encore 8ε.

Problème n° 2

Partie A : somme des cancres

I. Soit $(a, b, n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$. Soit d un entier relatif non nul.
Si d divise a et d divise b, alors d divise a et $b + na$. Réciproquement, si d divise a et d divise $b + na$, alors d divise a et d divise $(b + na) - na = b$.
Ainsi, l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs communs à a et $b + na$. En particulier, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b + na)$.

II.1. Soient x et y deux rationnels positifs.
Si $x = y = 0$, $x \oplus y = \dfrac{0}{1} \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{0+0}{1+1} = 0$. Donc $x \oplus y \in \mathbb{Q}^+$.
Si $x \neq 0$ et $y = 0$, posons $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. $x \oplus 0 = \dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{a+0}{b+1} = \dfrac{a}{b+1} \in \mathbb{Q}^+$. De même, si $x = 0$ était $y \neq 0$, $x \oplus y \in \mathbb{Q}^+$.
Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, posons $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ où a, b, c et d sont quatre entiers naturels non nuls, tels que a et b d'une part et c et d d'autre part, soient premiers entre eux. Alors, $x \oplus y = \dfrac{a+c}{b+d}$ est le quotient de deux entiers naturels, le dénominateur $b + d$ étant non nul. Donc, $x \oplus y$ est un rationnel positif.

On a montré que $\forall (x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, $x \oplus \in \mathbb{Q}^+$.

II.2. Si $a = c = 1$ et $b = d = 2$ puis $x = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{c}{d} = \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont les FFI de x et y respectivement. Mais $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{2}{4}$ n'est pas une fraction irréductible. La FFI de $x \oplus y$ n'est donc pas toujours $\dfrac{a+c}{b+d}$.

III.1. Soit $x = \dfrac{1}{1}$. Alors $x \oplus 0 = \dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{1+0}{1+1} = \dfrac{1}{2} \neq x$. Donc, $\exists x \in \mathbb{Q}^+ / \ x \oplus 0 \neq x$. La proposition 1. est fausse.

III.2. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$. Si $x = 0$, alors $x \oplus x = \dfrac{0}{1} \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{0+0}{1+1} = 0 = x$.

Si $x \neq 0$, posons $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux. $x \oplus x = \dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+a}{b+b} = \dfrac{2a}{2b} = \dfrac{a}{b} = x$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$. La proposition 2. est vraie.

III.3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$. Si $x = y$, alors $x \oplus y = y \oplus x$. Dorénavant, $x \neq y$.
Soit $x \neq 0$, posons $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Alors, $x \oplus 0 = \dfrac{a+0}{b+1} = \dfrac{0+a}{1+b} = 0 \oplus x$.
Sinon, $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et on peut poser $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ où a, b, c et d sont quatre entiers naturels non nuls tels que a et b d'une part, et c et d d'autre part, soient premiers entre eux. Alors, $x \oplus y = \dfrac{a+c}{b+d} = y \oplus x$.

On a montré que $\forall (x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, $x \oplus y = y \oplus x$. La proposition 3. est vraie.

III.4. $\dfrac{1}{1} \oplus \left(\dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{0}{1}\right) = \dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$ et $\left(\dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{1}{1}\right) \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{2}{2} \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{1}{2}$. Donc, $\dfrac{1}{1} \oplus \left(\dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{0}{1}\right) \neq \left(\dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{1}{1}\right) \oplus \dfrac{0}{1}$.
Ainsi, $\exists (x, y, z) \in (\mathbb{Q}^+)^3 \ / \ x \oplus (y \oplus z) \neq (x \oplus y) \oplus z$. La proposition 4. est fausse.

III.5. Soit $(x, y) \in (\mathbb{Q}^{+*})^2$. Posons $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ où a, b, c et d sont quatre entiers naturels non nuls tels que a et b d'une part, et c et d d'autre part, soient premiers entre eux. Alors,

$$\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{(a+c)/(b+d)} = \frac{1}{x \oplus y}.$$

La proposition 5. est vraie.

III.6. Soient $(x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $x = y = 0$, $(n+x) \oplus (n+y) = n \oplus n = \dfrac{n}{1} \oplus \dfrac{n}{1} = \dfrac{n+n}{1+1} = n = n + 0 = n + (0 \oplus 0) = n + (x \oplus y)$.

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, posons $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ où a, b, c et d sont quatre entiers naturels non nuls tels que a et b d'une part, et c et d d'autre part, soient premiers entre eux.
$n + x = n + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+nb}{b}$. D'après la question I., $\text{PGCD}(a+nb, b) = \text{PGCD}(a, b) = 1$. Donc, $\dfrac{a+nb}{b}$ est la FFI de $n+x$. De même, $\dfrac{c+nd}{d}$ est la FFI de $n+y$. Donc,

$$(n+x) \oplus (n+y) = \frac{a+nb}{b} \oplus \frac{c+nd}{d} = \frac{a+nb+c+nd}{b+d} = n + \frac{a+c}{b+d} = n + (x \oplus y).$$

Supposons enfin $x \neq 0$ et $y = 0$ par exemple. Posons $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

$$(n+x) \oplus (n+y) = \frac{a+nb}{b} \oplus \frac{n}{1} = \frac{a+nb+b}{b+1} = n + \frac{a}{b+1} = n + \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{0}{1}\right) = n + (x \oplus y).$$

Le résultat est encore vrai si $x = 0$ et $y \neq 0$ par symétrie des rôles et d'après la question III.3..

On a montré que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$. La proposition 6. est vraie.

IV.1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$. D'après la question III.2., $x \oplus x = x$ ou encore, si $x = y$, $x \oplus y = x$.

Réciproquement, supposons que $x \oplus y = x$.

• Si $x = 0$ et $y \neq x$ ou encore $y \neq 0$, on peut poser $y = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

$$x \oplus y = x \Rightarrow \frac{0}{1} \oplus \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \Rightarrow \frac{a}{b+1} = \frac{0}{1} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (ce qui est faux).}$$

Donc, si $x = 0$, $x \oplus y = x \Rightarrow x = y$ puis $x \oplus y = x \Leftrightarrow x = y$.

• Si $x \neq 0$ et $y = 0$, on peut poser $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

$$x \oplus y = x \Rightarrow \frac{a}{b} \oplus \frac{0}{1} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b+1} = \frac{a}{b} \Rightarrow b + 1 = b \text{ (ce qui est faux).}$$

Sinon, $y \neq 0$ et on peut poser $y = \dfrac{c}{d}$ où c et d sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

$$x \oplus y = x \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \Rightarrow ab + cb = ab + ad \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = y.$$

Ainsi, si $x \neq 0$, $x \oplus y = x \Rightarrow x = y$ puis $x \oplus y = x \Leftrightarrow x = y$.

On a montré que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, $x \oplus y = x \Leftrightarrow x = y$.

IV.2. Soient $(x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$ est tel que $x < y$. En particulier $y \neq 0$ et on peut poser $y = \dfrac{c}{d}$ où c et d sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Si $x = 0$, $x \oplus y = \dfrac{0}{1} \oplus \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d+1}$. Dune part, $\dfrac{c}{d+1} > 0$ et donc $x \oplus y > x$. D'autre part, $d + 1 > d > 0$ puis $\dfrac{1}{d+1} < \dfrac{1}{d}$ puis $\dfrac{c}{d+1} < \dfrac{c}{d}$ (car $c > 0$) et donc $x \oplus y < y$.

Si $x \neq 0$, on peut poser $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux. L'inégalité $x < y$ se traduit par le fait que $ad < bc$. Mais alors

$$x \oplus y - x = \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0,$$

et

$$y - x \oplus y = \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0,$$

et encore une fois $x < x \oplus y < y$.

On a montré que $\forall (x, y) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, $(x < y \Rightarrow x < x \oplus y < y)$.

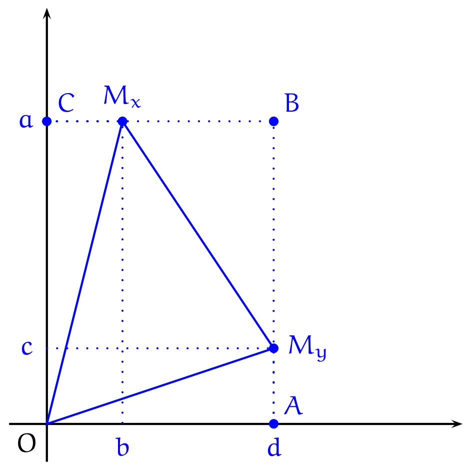
V.1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{Q}^{+*})^2$. Posons $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux et $y = \dfrac{c}{d}$ où c et d sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Donc, $M_x(b, a)$, $M_y(d, c)$, $x \oplus y = \dfrac{a+c}{b+d}$. Notons $\dfrac{e}{f}$ la FFI de $x \oplus y$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a + c = ke$ et $b + d = kf$ puis $M_{x\oplus y}(f, e)$.

D'autre part, le milieu $I_{x,y}$ du segment $[M_x, M_y]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{b+d}{2}, \dfrac{a+c}{2}\right)$.

Par suite, $k\overrightarrow{OM_{x\oplus y}} = 2\overrightarrow{OI_{x,y}}$ ou encore $\overrightarrow{OI_{x,y}} = \dfrac{k}{2}\overrightarrow{OM_{x\oplus y}}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OI_{x,y}}$ et $\overrightarrow{OM_{x\oplus y}}$ sont colinéaires. On note que quand la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible et donc $k = 1$, le quadrilatère $OM_xM_{x\oplus y}M_y$ est un parallélogramme.

V.2. Dans le triangle OM_xM_y, la droite $(OM_{x\oplus y})$ est la médiane issue de O.

VI. On note A, B et C les points de coordonnées respectives $(d, 0)$, (d, a) et $(0, a)$.



$$\begin{aligned}
\text{aire}\,(OM_xM_y) &= \text{aire}(OABC) - \text{aire}\,(OAM_y) - \text{aire}\,(M_yBM_x) - \text{aire}\,(OM_xC)\\
&= ad - \frac{cd}{2} - \frac{(d-b)(a-c)}{2} - \frac{ab}{2} = \frac{2ad - cd - ad + cd + ab - bc - ab}{2}\\
&= \frac{ad - bc}{2}.
\end{aligned}$$

Partie B : suites de Farey

VII. $F_4 = \left(\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{1}\right)$, $F_5 = \left(\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{1}\right)$ et $F_6 = \left(\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{1}{1}\right)$.

VIII. Soient $x \in \mathbb{Q}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si x est un des termes de la suite F_n, ou bien $x = \dfrac{0}{1}$, auquel cas x est de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$, ou bien $0 < x \leqslant 1$ et x s'écrit sous la forme $x = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, $a \leqslant b$ (car $x \leqslant 1$) et $b \leqslant n$. Dans tous les cas, il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$. Si $a = 0$ alors $x = 0 = \dfrac{0}{1}$ et donc x est un terme de la suite F_n. Sinon, $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$ ce qui entraine déjà $0 \leqslant x \leqslant 1$. En notant d le PGCD de a et b, on peut écrire a et b sous la forme $a = da'$ et $b = db'$ où a' et b' sont premiers entre eux. Mais alors, $x = \dfrac{da'}{db'} = \dfrac{a'}{b'}$ avec $a' \wedge b' = 1$ et la FFI de x est $\dfrac{a'}{b'}$. Enfin, $b' \leqslant b \leqslant n$ et donc x est un terme de la suite F_n.

On a montré que x est un terme de la suite F_n si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

IX. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in F_n$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$. On a alors $x = \dfrac{a}{b}$ avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n+1$ et donc x est un terme de la suite F_{n+1} d'après la question précédente.

X. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$. Si $x \in F_n$, il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$. Mais alors $1 - x = \dfrac{b-a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ où $a' = b - a \in \mathbb{N}$, $b' = b \in \mathbb{N}^*$ et $b' \leqslant n$. Enfin, $0 \leqslant x$ et donc $1 - x \leqslant 1$ puis $a' \leqslant b'$. Finalement, il existe $(a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $1 - x = \dfrac{a'}{b'}$ et $0 \leqslant a' \leqslant b' \leqslant 1$. On a montré que pour tout $x \in F_n$, $1 - x \in F_n$.

Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ tel que $1 - x \in F_n$. En appliquant ce qui précède à $x' = 1 - x$, on obtient $x = 1 - (1 - x) \in F_n$.

On a montré que : $\forall x \in \mathbb{Q}^+$, $(x \in F_n \Leftrightarrow 1 - x \in F_n)$.

XI.1. Soit $(x, x') \in (\mathbb{Q}^+)^2$ tel que $\theta(x) = \theta(x')$. Soit $\dfrac{a}{b}$ la FFI commune de x et x'. Alors, $x = \dfrac{a}{b} = x'$. On a montré que : $\forall (x, x') \in (\mathbb{Q}^+)^2\ (\theta(x) = \theta(x') \Rightarrow x = x')$. Donc, θ est injective.

XI.2. $(2, 2)$ est un élément de $\mathbb{N}$ mais la fraction $\dfrac{2}{2}$ n'est pas irréductible et n'est donc pas la FFI d'un élément de x de $\mathbb{Q}^+$. On a montré que : $\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 /\ \forall x \in \mathbb{Q}^+,\ \theta(x) \neq (a, b)$. Donc, θ n'est pas surjective. On peut noter aussi que $(0, 0)$ n'a pas d'antécédent par θ.

XI.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit x un élément non nul de F_n. Il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$, $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$ et a et b premiers entre eux. Dans ce cas, $(a, b) = \theta(x)$ avec $1 \leqslant a \leqslant n$ et $1 \leqslant b \leqslant n$. Ceci montre que $\theta(x) \in [\![1, n]\!]^2$.

XI.4. Ainsi, $\theta\left(F_n \setminus \{0\}\right) \subset [\![1, n]\!]^2$. Puisque θ est injective,

$$\operatorname{card}\left(F_n \setminus \{0\}\right) = \operatorname{card}\left(\theta\left(F_n \setminus \{0\}\right)\right) \leqslant \operatorname{card}\left([\![1, n]\!]^2\right) = n^2.$$

Mais alors, $\operatorname{card}(F_n) = \operatorname{card}\left(\left\{\dfrac{0}{1}\right\}\right) + \operatorname{card}\left(F_n \setminus \{0\}\right) \leqslant n^2 + 1$.

Puisque $F_1 = \left(\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{1}\right)$, $f_1 = 2 = 1^2 + 1$. Donc, l'inégalité précédente est une égalité quand $n = 1$.

Si $n \geqslant 2$, $(2, 2) \in [\![1, n]\!]^2$ et $(2, 2) \notin \theta\left(\mathbb{Q}^+\right)$. Donc $f_n = 1 + \operatorname{card}\left(\theta\left(F_n \setminus \{0\}\right)\right) < 1 + \operatorname{car}\left([\![1, n]\!]^2\right) = 1 + n^2$. Si $n \geqslant 2$, l'inégalité est stricte.

XII. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $E_k = \{(a, k) \in [\![1, k]\!] \times \{k\},\ \text{PGCD}(a, k) = 1\}$. $(\{(0, 1)\}, E_1, \ldots, E_n)$ est une partition de $\theta\left(F_n\right)$ et donc

$$f_n = \operatorname{card}\left(F_n\right) = \operatorname{card}\left(\theta\left(F_n\right)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}\left(E_k\right).$$

En suite, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, l'application $a \mapsto (a, k)$ est une bijection de $\{a \in [\![1, k]\!] /\ \text{PGCD}(a, k) = 1\}$ sur E_k et donc $\operatorname{card}\left(E_k\right) = \operatorname{card}(\{a \in [\![1, k]\!] /\ \text{PGCD}(a, k) = 1\}) = \varphi(k)$. On a montré que

$$\forall n \geqslant 1,\ f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII.1. D'après la question VIII., il existe $(k, k') \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $\dfrac{k'}{n+1}$ et $k < k'$. Si $k' \geqslant k+2$, alors $\dfrac{k+1}{n+1}$ est un élément de la suite F_{n+1} tel que $x < \dfrac{k+1}{n+1} < y$ ce qui contredit le fait que x et y sont consécutifs. Donc, $k' = k+1$.

On a montré qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $y = \dfrac{k+1}{n+1}$. .

XIII.2. On ne peut avoir $x = 0$ car alors $x = \dfrac{0}{1}$ est un élément de la suite F_n ce qui est faux. Donc, $k > 0$. Ensuite $n+1 > n$ et donc $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ puis $x = \dfrac{k}{n+1} < \dfrac{k}{n}$ car $k > 0$. De même, $y \neq 1$ et donc $k+1 < n+1$ ou encore $k < n$ puis $y - \dfrac{k}{n} = \dfrac{k+1}{n+1} - \dfrac{k}{n} = \dfrac{(n+1)k - (k+1)n}{n(n+1)} = \dfrac{n-k}{n(n+1)} > 0$.

On a montré que $x < \dfrac{k}{n} < y$.

XIII.3. $\dfrac{k}{n}$ est un élément de la suite F_n d'après la question VIII. et donc un élément de la suite F_{n+1} d'après la question IX.. Les inégalités $x < \dfrac{k}{n} < y$ entrainent en particulier le fait que x et y sont deux éléments non consécutifs de la suite F_{n+1} ce qui est une contradiction. Donc, il n'existe pas deux éléments consécutifs de la suite F_{n+1} qui n'appartiennent pas à la suite F_n. Dit autrement, si x et y sont deux éléments consécutifs de la suite F_{n+1}, l'un des deux au moins est un élément de la suite F_n.

XIV.1. $F_1 = \left(\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{1}\right)$. Donc, si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_1, $x = \dfrac{0}{1}$ et $y = \dfrac{1}{1}$. En posant, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 1$, on a $bc - ad = 1$. Ensuite, $x \oplus y = \dfrac{0+1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. $\dfrac{1}{2}$ est effectivement la première fraction (au sens chronologique du terme) qui apparaît entre x et y dans F_2 et donc dans F_m, pour $m > 1$. Ceci montre la propriété (P_1).

XIV.2.a. Par hypothèse de récurrence, $ad - bc = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction (au sens chronologique du terme) qui apparaît dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n et en particulier d'ordre strictement supérieur à $n+1$.

XIV.2.b. Puisque $x < z$, d'après la question IV.2., $x < x \oplus z < z$. Puisque x et z sont des éléments de F_n, $b + s \leqslant 2n$. Si la fraction $\dfrac{a+r}{b+s}$ n'est pas irréductible, on peut simplifier le numérateur et le dénominateur par un facteur au moins égal à 2. La fraction obtenue a un dénominateur inférieur ou égal à n et est donc un élément de F_n. Ceci contredit le fait que z est le terme qui suit x dans F_n et le fait que $x < x \oplus z < z$. Donc, la fraction $\dfrac{a+r}{b+s}$ est irréductible.

Ainsi, $\dfrac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible strictement comprise entre x et z.

XIV.2.c. Puisque y est le successeur de x dans F_{n+1}, $x < y \leqslant z$. Puisque z est dans F_n et que $y \notin F_n$, on a plus précisément $x < y < z$. Par hypothèse de récurrence, $x \oplus z$ est en particulier un terme de F_{n+1} strictement compris entre x et z (car premier terme à apparaître entre x et z dans toute suite de Farey d'ordre $m > n$) et d'autre part y est un terme de F_{n+1} strictement compris entre x et z.
Maintenant, strictement compris entre x et z, il n'y a pas de terme de la suite F_n et y et $x \oplus z$ sont deux éléments de F_{n+1} qui ne sont pas dans F_n. Si ces deux éléments sont distincts, on peut alors trouver entre x et z deux éléments consécutifs de F_{n+1} qui ne sont pas dans F_n. Ceci contredit le résultat de la question XIII.3. et donc $x \oplus z = y$.

XIV.2.d. $0 < \dfrac{a+r}{b+s} = \dfrac{c}{d}$ et les deux fractions sont irréductibles. Par unicité de la forme irréductible d'un rationnel strictement positif, $a + r = c$ et $b + s = d$.

XIV.2.e. $bc - ad = b(a+r) - a(b+s) = br - as$. Puisque x et z sont deux termes consécutifs de la suite F_n, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $br - as = 1$ et donc que $bc - ad = 1$. De même, $rd - sc = r(b+s) - s(a+r) = rb - as = 1$.

XIV.2.f. Par définition $\dfrac{a}{b} = x < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d} = y$. Donc, $u = qc - pd > 0$ et $v = pb - aq > 0$. Ainsi, u et v sont des entiers naturels non nuls.
On doit alors résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} -dp + cq = u \\ bp - aq = v \end{array}\right.$. Le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} -d & c \\ b & -a \end{vmatrix} = ad - bc = -1$. D'après les formules de Cramer

$$\left\{\begin{array}{l} -dp + cq = u \\ bp - aq = v \end{array}\right. \Leftrightarrow p = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} u & c \\ v & -a \end{vmatrix} \text{ et } q = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} -d & u \\ b & v \end{vmatrix} \Leftrightarrow p = au + cv \text{ et } q = bu + dv.$$

XIV.2.g. $x < y$ et donc $x < x \oplus y < y$ d'après la question IV.2..

Ensuite, $x \oplus y = \dfrac{a+c}{b+d}$. Or, puisque $\dfrac{p}{q}$ est irréductible et apparaît dans la suite F_m, on a (en tenant compte de $u \geqslant 1$ et $v \geqslant 1$)

$$m \geqslant q = bu + dv \geqslant 1 \times b + 1 \times d$$

et donc $b + d \leqslant m$.

La question VIII. montre alors que $x \oplus y$ apparaît dans la suite F_m. Puisque $\dfrac{p}{q}$ est la première fraction qui apparaît dans la suite F_m entre x et y et que d'autre part, il n'y a pas de terme de la suite F_{n+1} entre x et y, on en déduit que $x \oplus y$ apparaît pour la première fois dans une suite $F_{m'}$ avec $n + 1 < m' \leqslant m$.

XIV.2.h. Si $m' < m$, $x \oplus y$ est une fraction qui s'intercale strictement entre x et y et ceci strictement avant $\dfrac{p}{q}$ (dans l'ordre chronologique). Ceci contredit la définition de m. Donc, $m' = m$. Ensuite, entre x et y strictement, il ne peut y avoir que des termes de la suite F_m. La question XIII.3. montre qu'il ne peut y avoir strictement plus d'un terme de F_m. Donc, $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.
Finalement, $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à $n + 1$.

XIV.3. La proposition (P_{n+1}) est donc démontrée dans le cas où x est un terme de F_n, y est un terme de F_{n+1} non dans F_n et $x < y$. Il reste à étudier le cas où x n'est pas un terme de F_n, y est un terme de F_n et $x < y$. Dans ce cas, d'après la question X., $x' = 1 - y$ est un terme de F_n, $y' = 1 - x$ n'est pas un terme de F_n et $x' < y'$. On peut appliquer ce qui précède à x' et y' ce qui refournit le résultat pour x et y et achève de démontrer la proposition (P_{n+1}).

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition (P_n) est vraie.

XV.1. $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont deux FFI qui sont des termes consécutifs de F_n. D'après la question précédente, $bc - ad = 1$. Mais alors,

$$b \times (a + c) - a \times (b + d) = bc - ad = 1.$$

Ainsi, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u(a + c) + v(b + d) = 1$. D'après le théorème de Bézout, les entiers naturels non nuls $a + c$ et $b + d$ sont premiers entre eux ou encore la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

XV.2. Toujours d'après la question précédente, $bc - ad = 1 = de - cf$. Par suite,

$$y - (x \oplus z) = \frac{c}{d} - \frac{a+e}{b+f} = \frac{c(b+f) - d(a+e)}{d(b+f)} = \frac{(bc - ad) - (de - fc)}{d(b+f)} = 0,$$

et donc $y = x \oplus z$.

