SESSION 2019

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Problème n° 1

Partie A : rotations et translations du plan

I. Question de cours $t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow z' - z = z_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$. Donc,

$$z' = z + z_{\overrightarrow{u}}.$$

Ensuite, pour $M \neq \Omega$,

$$\begin{aligned}
r_{\Omega,\theta}(M) = M'' &\Leftrightarrow \Omega M'' = \Omega M \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \frac{\Omega M''}{\Omega M} = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{z'' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z'' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \frac{z'' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z'' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $M = \Omega$ car dans ce cas, $M'' = \Omega$. Donc, dans tous les cas,

$$z'' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

II.1 Supposons $a = 1$. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe b. Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + b \Leftrightarrow z' - z = z_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow M' = t_{\overrightarrow{u}}(M).$$

Donc, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

II.2.a. Soit M un point du plan d'affixe z. Puisque $a \neq 1$,

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = az + b \Leftrightarrow z = \frac{b}{1 - a}.$$

Ainsi, f a un point invariant et un seul à savoir le point Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$.

II.2.b. Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b \Leftrightarrow z' - \omega = (az + b) - (a\omega + b) \Leftrightarrow z' - \omega = a(z - \omega).$$

Donc, M' est le point d'affixe $\omega + a(z - \omega)$.

II.2.c. Notons θ un argument de a de sorte que $a = e^{i\theta}$. Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.

- Si $M = \Omega$, alors $z = \omega$ puis $z' = \omega$ et donc $M' = \Omega$ ou encore $f(\Omega) = r_{\Omega,\theta}(\Omega)$.
- Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ puis

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow M' = r_{\Omega,\theta}(M).$$

Finalement, pour tout point M du plan, $f(M) = r_{\Omega,\theta}(M)$. Ainsi, f est la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle de mesure θ où θ est un argument de a.

III.1.

$$z_{f(M)} = a_1(a_2z + b_2) + b_1 = a_1a_2z + a_1b_2 + b_1.$$

III.2. $|a_1a_2| = |a_1||a_2| = 1 \times 1 = 1$. Donc, l'expression complexe de f est du type $z' = az + b$ où $a = a_1a_2$ est un nombre complexe de module 1. D'après les questions précédentes, f est une translation ou une rotation.

IV. L'expression complexe de r_1 est $z' = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1)$ ou encore $z' = 1 + i(z-1)$ ou enfin $z' = iz + 1 - i$. L'expression complexe de r_2 est $z' = 0 + e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-0)$ ou encore $z' = -iz$.
Ainsi, les expressions complexes de r_1 et r_2 sont respectivement $z' = iz + 1 - i$ et $z' = -iz$.

L'expression complexe de $r_1 \circ r_2$ est $z' = i(-iz) + 1 - i$ ou encore $z' = z + 1 - i$. L'expression complexe de $r_2 \circ r_1$ est $z' = -i(iz + 1 - i)$ ou encore $z' = z - 1 - i$.
$r_1 \circ r_2$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(1,-1)$ et $r_2 \circ r_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u'}(-1,-1)$.

V. Notons Is($\mathscr{P}$) l'ensemble des isométries affines du plan $\mathscr{P}$. On sait que $(\text{Is}(\mathscr{P}), \circ)$ est un groupe. Vérifions que G est un sous-groupe de ce groupe.

• Les rotations et les translations sont des isométries affines et donc $G \subset \text{Is}(\mathscr{P})$.

• $\text{Id}_{\mathscr{P}} = t_{\overrightarrow{0}}$ et donc $\text{Id}_{\mathscr{P}} \in G$.

• Si f et g sont des éléments de G, les questions précédentes montrent que $f \circ g$ est un élément de G.

• Enfin, une rotation est une permutation du plan de réciproque une rotation qui est un élément de G et une translation est une permutation du plan de réciproque une translation qui est un élément de G. Donc, G est stable pour le passage à l'inverse.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\text{Is}(\mathscr{P}), \circ)$ et donc $(G, \circ)$ est un groupe.

Partie B : une construction géométrique

VI.1. $\Omega \in \mathscr{D}_1$ et donc $s_{\mathscr{D}_1}(\Omega) = \Omega$. De même, $s_{\mathscr{D}_2}(\Omega) = \Omega$. Finalement,

$$f(\Omega) = s_{\mathscr{D}_2}(s_{\mathscr{D}_1}(\Omega)) = s_{\mathscr{D}_2}(\Omega) = \Omega.$$

Ω est donc un point fixe de f

VI.2. Soit M un point du plan distinct de Ω. M' est donc également distinct de Ω.
Soit A le point de $\mathscr{D}_1$ tel que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{\Omega A}$. Puisqu'une réflexion est une isométrie affine négative,

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \left(\overrightarrow{s_{\mathscr{D}_1}(\Omega)s_{\mathscr{D}_1}(A)}, \overrightarrow{s_{\mathscr{D}_1}(\Omega)s_{\mathscr{D}_1}(M)}\right) = -\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_1}\right).$$

Donc, pour tout point M distinct de Ω, $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_1}\right) = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$. On admet que pour tout point M distinct de Ω, $\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2}\right) = \left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''}\right)$

VI.3. D'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) &= \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_1}\right) + \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) + \left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) + \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) + \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = 2\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right).
\end{aligned}$$

VI.4. Soit M un point du plan. Une réflexion est une isométrie et donc

$$\Omega M'' = s_{\mathscr{D}_2}(\Omega)s_{\mathscr{D}_2}(M') = \Omega M' = s_{\mathscr{D}_1}(\Omega)s_{\mathscr{D}_1}(M) = \Omega M.$$

VI.5. Ainsi, d'une part, $f(\Omega) = \Omega$ et d'autre part, pour $M \neq \Omega$, $f(M)$ est le point M'' tel que $\Omega M'' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) = 2\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$. Donc, f est la rotation de centre Ω et d'angle $2\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$.

VII.1. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite passant par Ω_1 et de vecteur directeur le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_1}$ tel que $\left(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}, \overrightarrow{u_1}\right) \equiv \dfrac{\theta_1}{2}$ $[2\pi]$. D'après la question précédente, $r_1 = s_{\mathscr{D}_1} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)}$.

Soit $\mathscr{D}_2$ la droite passant par Ω_2 et de vecteur directeur le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_2}$ tel que $\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\right) \equiv \dfrac{\theta_2}{2}$ $[2\pi]$. D'après la question précédente, $r_2 = s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathscr{D}_2}$.

VII.2. Une réflexion est une involution. Donc,

$$r_1 \circ r_2 = s_{\mathscr{D}_1} \circ s^2_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathscr{D}_2} = s_{\mathscr{D}_1} \circ s_{\mathscr{D}_2}.$$

VII.3. D'après la question VI.5., $r_1 \circ r_2$ est une rotation de centre Ω et d'angle $2\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}\right)$. De plus,

$$2\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}\right) = 2\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\right) + 2\left(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}, \overrightarrow{u_1}\right) \equiv \theta_1 + \theta_2\ [2\pi].$$

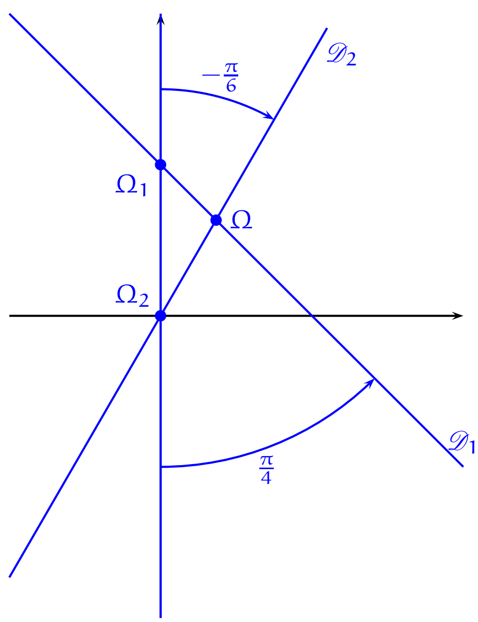
$r_1 \circ r_2$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

VII.4. $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$.

On construit la droite $\mathscr{D}_1$ passant par $\Omega_1(0,1)$ et dirigée par un vecteur non nul $\overrightarrow{u_1}$ tel que $\left(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}, \overrightarrow{u_1}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

On construit la droite $\mathscr{D}_2$ passant par $\Omega_2(0,0)$ et dirigée par un vecteur non nul $\overrightarrow{u_2}$ tel que $\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

Le centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ est le point d'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ (pour ne pas alourdir, nous n'avons pas construit à la règle et au compas des angles de 30 et 45 degrés).



VII.5. Si $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$, alors $r_1 \circ r_2 = s^2_{\mathscr{D}_1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

Supposons $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ strictement parallèles. Soient A et B des points de $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_1$ respectivement tels que $(AB)\perp\mathscr{D}_1$ et $(AB)\perp\mathscr{D}_2$ puis $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Soient M un point du plan puis $M' = s_{\mathscr{D}_2}(M)$ et $M'' = s_{\mathscr{D}_1}(M')$. On note I le milieu de $[M, M']$ et J le milieu de $[M'M'']$. Alors $(IJ)\perp\mathscr{D}_1$ et $(IJ)\perp\mathscr{D}_2$ puis $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{u}$. Par suite,

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JM''} = \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{M'J} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}.$$

Ainsi, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{Mf(M)} = 2\overrightarrow{u}$. f est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$.

Partie C : structure des quaternions

VIII.1. On pose $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

Une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est $(E_{1,1}, iE_{1,1}, E_{1,2}, iE_{1,2}, E_{2,1}, iE_{2,1}, E_{2,2}, iE_{2,2})$.

VIII.2. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,2}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\,(E_{1,1} - E_{2,2})$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,2} + E_{2,1}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\,(E_{1,2} + E_{2,1})$. Mais alors

$$E_{1,1} = \frac{1}{2}\,(E - iI),\ E_{2,2} = \frac{1}{2}\,(E + iI),\ E_{2,1} = \frac{1}{2}\,(J + iK) \text{ et } E_{1,2} = \frac{1}{2}\,(-J + iK).$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
M(a,b) &= aE_{1,1} - bE_{1,2} + \overline{b}E_{2,1} + \overline{a}E_{2,2} \\
&= \frac{1}{2}\left(a\,(E - iI) - b\,(-J + iK) + \overline{b}\,(J + iK) + \overline{a}\,(E + iI)\right) \\
&= \frac{a + \overline{a}}{2}E - i\frac{a - \overline{a}}{2}I + \frac{b + \overline{b}}{2}J - i\frac{b - \overline{b}}{2}K \\
&= \frac{a + \overline{a}}{2}E + \frac{a - \overline{a}}{2i}I + \frac{b + \overline{b}}{2}J + \frac{b - \overline{b}}{2i}K \\
&= (\mathrm{Re}(a))E + (\mathrm{Im}(a))I + (\mathrm{Re}(b))J + (\mathrm{Im}(b))K.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $M(a, b) \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(E, I, J, K)$ ou encore $\mathbb{H} \subset \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(E, I, J, K)$.

Inversement, soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Soient $a = x + iy$ et $b = z + it$. Le calcul précédent montre que $xE + yI + zJ + tK = M(a, b)$. Donc, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ ou encore $\mathbb{H} \subset \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(E, I, J, K)$.

On a montré que $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(E, I, J, K)$. En particulier, $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et (E, I, J, K) est une famille génératrice de ce sous-espace. Vérifions que cette famille est $\mathbb{R}$-libre.
Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Soit $a = x + iy$ et $b = z + it$.

$$xE + yI + zJ + tK = 0 \Rightarrow M(a, b) = 0 \Rightarrow a = \overline{a} = -b = \overline{b} = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 0.$$

Donc, (E, I, J, K) est $\mathbb{R}$-libre et finalement, (E, I, J, K) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

VIII.3. Soit $(a, a', b, b') \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned}
M(a,b) \times M(a', b') &= \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ \overline{b'} & \overline{a'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - b\overline{b'} & -ab' - b\overline{a'} \\ \overline{a}\overline{b'} + \overline{b}a' & \overline{a}\overline{a'} - \overline{b}b' \end{pmatrix} \\
&= M\left(aa' - b\overline{b'}, ab' + b\overline{a'}\right).
\end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{H}$ est stable pour le produit matriciel.

IX.1. En appliquant le formule précédente, on obtient la table de multiplication :

$\times$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-E$	I
K	K	$-I$	J	$-E$

IX.2. On note que $IJ = K$ et $JI = -K$. En particulier $JI \neq IJ$ (car $K \neq 0$). Ceci montre que la multiplication des quaternions n'est pas commutative.

X. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\det(M(a, b)) = a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2$. $|a|^2$ et $|b|^2$ sont deux réels positifs, l'un de ces deux réels au moins étant strictement positif. Donc, $|a|^2 + |b|^2 > 0$. En particulier, $\det(M(a, b)) \neq 0$. Mais alors, $M(a, b) \in GL_2(\mathbb{C})$. Ensuite,

$$(M(a,b))^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2}\begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = M\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2 + |b|^2}, -\frac{b}{|a|^2 + |b|^2}\right).$$

Donc, l'inverse d'un quaternion non nul est un quaternion.

XI. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble $\{q \in \mathbb{H}/\ \forall r \in \mathbb{H},\ qr = rq\}$. Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ puis $q = xE + yI + zJ + tK$.
Si $q \in \mathscr{E}$, alors nécessairement $qI = Iq$ ce qui fournit $xI - yE - zK + tJ = xI - yE + zK - tJ$. Puisque la famille (E, I, J, K) est $\mathbb{R}$-libre d'après la question VIII.2., on en déduit que $-z = z$ et $t = -t$ puis $2z = 2t = 0$ et finalement, $z = t = 0$. Il reste $q = xE + yI$.
L'égalité $qJ = Jq$ fournit $xJ + yK = xJ - yK$ et en particulier $y = -y$ puis $y = 0$. Il reste $q = xE$.

Réciproquement, puisque $E = I_2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{H}$, $xEr = rxE = xr$ et donc $xE \in \mathscr{E}$.

On a montré que $\{q \in \mathbb{H}/\ \forall r \in \mathbb{H},\ qr = rq\} = \{xE,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Partie D : conjugué, parties réelle et imaginaire d'un quaternion

XII.1. Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ puis $q = xE+yI+zJ+tK$. D'après la question VIII., $q = M(a, b)$ où $a = x+iy$ et $b = z+it$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
q^* &= xE - yI - zJ - tK = \mathrm{Re}(a)E - \mathrm{Im}(a)I - \mathrm{Re}(b)J - \mathrm{Im}(b)K = M\left(\overline{a}, -b\right) \\
&= \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ -b & \overline{a} \end{pmatrix}} = {}^t\overline{\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}} \\
&= {}^t\overline{(M(a, b))}.
\end{aligned}$$

XII.2. Soient $(a, b, a', b') \in \mathbb{C}^2$ puis $q = M(a, b)$ et $r = M(a', b')$.

$$(qr)^* = {}^t\overline{(M(a, b)M(a', b'))} = {}^t\left(\overline{M(a, b)}\ \overline{(M(a', b'))}\right) = {}^t\overline{(M(a', b'))}\ {}^t\overline{(M(a, b))} = r^*q^*$$

XIII.1. Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ puis $q = xE + yI + zJ + tK$. D'après la question IX.,

$$\begin{aligned}
N(q) &= (xE + yI + zJ + tK)(xE - yI - zJ - tK) \\
&= \left(x^2 - y(-y) - z(-z) - t(-t)\right) E + (-xy + yx + z(-t) - t(-z))I \\
&+ (x(-z) + zx - y(-t) + t(-y))J + (-xt + xt + y(-z) - z(-y))K \\
&= \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right) E.
\end{aligned}$$

XIII.2. Soient $(x, y, z, t, x', y', z', t') \in \mathbb{R}^8$ puis $q = xE + yI + zJ + tK$ et $r = x'E + y'I + z'J + t'K$.

$$\begin{aligned}
N(qr) &= (qr)(qr)^* = qrr^*q^* \text{ (d'après la question XII.2.)} \\
&= q\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2\right) Eq^* = \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2\right) Eqq^* \text{ (d'après la question XI.)} \\
&= \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2\right) E\left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right) E = \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right) E\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2\right) E \\
&= N(q)N(r).
\end{aligned}$$

Partie E : norme sur $\mathbb{H}$

XIV. En notant $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire associé à la norme euclidienne $\|\ \|$, on a pour tous $q = xE + yJ + zJ + tK$ et $q' = x'E + y'J + z'J + t'K$ éléments de $\mathbb{H}$,

$$\langle q, q'\rangle = xx' + yy' + zz' + tt'.$$

XV.1. Soit $q \in \mathbb{H}$. $N(q) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right) E = \|q\|^2E$.

XV.2. Soit $(q, r) \in \mathbb{H}^2$. D'après la question XIII.2. (et puisque $E = I_2$),

$$\|qr\|^2E = N(qr) = N(q)N(r) = \|q\|^2E\|r\|^2E = \|q\|^2\|r\|^2E.$$

Puisque E n'est pas la matrice nulle, on en déduit que $\|qr\|^2 = \|q\|^2\|r\|^2 = (\|q\|\|r\|)^2$ et finalement $\|qr\| = \|q\|\|r\|$ puisque ces nombres sont des réels positifs.

On a montré que pour tout $(q, r) \in \mathbb{H}^2$, $\|qr\| = \|q\|\|r\|$.

XV.3. Soit q un quaternion non nul. Alors

$$\|q\|\left\|q^{-1}\right\| = \left\|qq^{-1}\right\| = \|E\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2} = 1$$

et donc, $\|q\| \neq 0$ puis $\left\|q^{-1}\right\| = \dfrac{1}{\|q\|}$.

XVI.1. Pour tout $\overrightarrow{q} = (y, z, t) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left\|\psi\left(\overrightarrow{q}\right)\right\| = \|q\| = \sqrt{y^2+z^2+t^2} = \left\|\overrightarrow{q}\right\|.$$

XVI.2. Soient $(y_1, z_1, t_1, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^6$ puis $q_1 = y_1 I + z_1 J + t_1 K$ et $q_2 = y_2 I + z_2 J + t_2 K$.

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= (y_1 I + z_1 J + t_1 K)(y_2 I + z_2 J + t_2 K)\\
&= -(y_1 y_2 + z_1 z_2 + t_1 t_2) E + (z_1 t_2 - z_2 t_1) I - (y_1 t_2 - y_2 t_1) J + (y_1 z_2 - y_2 z_1) K\\
&= -\left\langle \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}\right\rangle E + \psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right) \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K)$, on en déduit que $\mathrm{Re}\,(q_1 q_2) = -\left\langle \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}\right\rangle E$ et $\mathrm{Im}\,(q_1 q_2) = \psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right)$.

XVI.3. Soit $q \in \mathbb{H}_{\text{pur}}$. D'après la question précédente,

$$\mathrm{Re}\left(q^2\right) = -\left\langle \overrightarrow{q}, \overrightarrow{q}\right\rangle E = -\|q\|^2 E = -N(q),$$

et

$$\mathrm{Im}\left(q^2\right) = \psi\left(\overrightarrow{q} \wedge \overrightarrow{q}\right) = \psi\left(\overrightarrow{0}\right) = 0.$$

On en déduit que $q^2 = \mathrm{Re}\left(q^2\right) + \mathrm{Im}\left(q^2\right) = -N(q)$.

XVI.4. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $q \in \mathbb{H}_{\text{pur}}$.

$$(aE + bq)(cE + dq) = acE^2 + adEq + bcqE + bdq^2 = \left(ac - bd\|q\|^2\right) E + (ad + bc)q.$$

XVI.5. Soit $(q_1, q_2) \in (\mathbb{H}_{\text{pur}})^2$.

$$\mathrm{Re}\,(q_1 q_2 + q_2 q_1) = \mathrm{Re}\,(q_1 q_2) + \mathrm{Re}\,(q_2 q_1) = -\left\langle \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}\right\rangle E - \left\langle \overrightarrow{q_2}, \overrightarrow{q_1}\right\rangle E = -2\left\langle \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}\right\rangle E,$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(q_1 q_2 + q_2 q_1) = \mathrm{Im}\,(q_1 q_2) + \mathrm{Im}\,(q_2 q_1) &= \psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right) + \psi\left(\overrightarrow{q_2} \wedge \overrightarrow{q_1}\right) = \psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right) + \psi\left(-\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right)\\
&= \psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right) - \psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $q_1 q_2 + q_2 q_1 = -2\left\langle \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}\right\rangle E$. En particulier, $\left\langle \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow q_1 q_2 + q_2 q_1 = 0$.

Partie F : quaternions unitaires et rotations vectoriellles

XVII. On note que pour tout $q \in \mathbb{H}$, $N(q) = E \Leftrightarrow \|q\| = 1$.

- $E \in U$ et en particulier $U \neq \varnothing$.
- Si $q \in U$, $\|q\| = 1$ et en particulier $q \neq 0$. D'après la question X., si $q \in U$, alors $q \in GL_2(\mathbb{C})$. Donc, $U \subset GL_2(\mathbb{C})$.
- Soit $(q, r) \in U^2$. D'après la question XV., $\left\|qr^{-1}\right\| = \|q\|\left\|r^{-1}\right\| = 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$ et donc $qr^{-1} \in U$.

On a montré que U est un sous-groupe du groupe $(GL_2(\mathbb{C}), \times)$.

XVIII.1. Soit $p \in U$. Posons $p = xE + yI + zJ + tK$ où $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Par hypothèse, $x^2 + \left(y^2 + z^2 + t^2\right) = 1$. Donc, il existe un réel θ tel que $x = \cos(\theta)$ et $\sqrt{y^2 + z^2 + t^2} = \sin(\theta)$.
Si $\sin(\theta) = 0$, alors $y = z = t = 0$ puis $p = xE$ avec $x = \pm 1$. Dans ce cas, $u = I$ est un quaternion pur de norme 1 tel que $p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$.
Sinon, $\sin(\theta) \neq 0$. Soit alors $u = \dfrac{1}{\sin(\theta)}(yI + zJ + tK)$. u est un quaternion pur tel que $p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$. De plus,

$$\|u\| = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2+t^2}} \times \sqrt{y^2+z^2+t^2} = 1$$

et donc $u \in U$.

Dans tous les cas, on a montré qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $u \in U \cap \mathbb{H}_{\text{pur}}$ tels que $p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$.

XVIII.2. D'après la question XVI.4.,

$$(\cos(\theta)E + \sin(\theta)u)(\cos(\theta)E - \sin(\theta)u) = \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\|u\|^2\right)E + (-\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta))u = E$$

(où $E = I_2$) et donc $p^{-1} = \cos(\theta)E - \sin(\theta)u = p^*$.

XIX.1. Soit $p \in U$. Soient $(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$r_p(\lambda q_1 + \mu q_2) = p(\lambda q_1 + \mu q_2)p^{-1} = \lambda p q_1 p^{-1} + \mu p q_2 p^{-1} = \lambda r_p(q_1) + \mu r_p(q_2).$$

Donc, r_p est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

XIX.2. D'après la question XV., pour tout $q \in \mathbb{H}$,

$$\|r_p(q)\| = \left\|pqp^{-1}\right\| = \|p\| \times \|q\| \times \left\|p^{-1}\right\| = 1 \times \|q\| \times 1 = \|q\|.$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{H}$, $\|r_p(q)\| = \|q\|$.

XIX.3. Soit $(p_1, p_2) \in U^2$. Pour tout $q \in \mathbb{H}$,

$$r_{p_1} \circ r_{p_2}(q) = r_{p_1}(r_{p_2}(q)) = p_1 r_{p_2}(q) p_1^{-1} = p_1 p_2 q p_2^{-1} p_1^{-1} = (p_1 p_2)\, q\, (p_1 p_2)^{-1} = r_{p_1 p_2}(q).$$

Donc $r_{p_1} \circ r_{p_2} = r_{p_1 p_2}$.

Soit $p \in U$. $r_p \circ r_{p^{-1}} = r_{pp^{-1}} = r_E$ où de plus, pour tout $q \in \mathbb{H}$, $r_E(q) = EqE^{-1} = q$. Donc, $r_p \circ r_{p^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$. Ainsi, r_p est inversible à droite pour $\circ$ et donc inversible en tant qu'endormorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie. Dit autrement, r_p est une bijection et de plus, $(r_p)^{-1} = r_{p^{-1}}$.

XIX.4. Soit $p \in U$.

$$\begin{aligned}
r_p = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}} &\Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{H},\ pqp^{-1} = q \Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{H},\ pq = qp \\
&\Leftrightarrow p \in \{xE,\ x \in \mathbb{R}\} \cap U \text{ (d'après la question XI.)} \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ p = xE \text{ et } \sqrt{x^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow p = E \text{ ou } p = -E.
\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $p \in U$, $r_p = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow p = E$ ou $p = -E$.

XIX.5. Soit $(p_1, p_2) \in U^2$.

$$\begin{aligned}
r_{p_1} = r_{p_2} &\Leftrightarrow r_{p_1} \circ (r_{p_2})^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}} \\
&\Leftrightarrow r_{p_1 p_2^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}} \text{ (d'après la question XIX.3.)} \\
&\Leftrightarrow p_1 p_2^{-1} = E \text{ ou } p_1 p_2^{-1} = -E \text{ (d'après la question précédente)} \\
&\Leftrightarrow p_1 = p_2 \text{ ou } p_1 = -p_2.
\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $(p_1, p_2) \in U^2$, $r_{p_1} = r_{p_2} \Leftrightarrow p_1 = p_2$ ou $p_1 = -p_2$.

XX. $\sin(\theta) = 0$ fournit $p = \pm E$ et donc par contraposition, si $p \in U \setminus \{-E, E\}$, alors $\sin(\theta) \neq 0$ ou encore $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

XX.1. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et unitaires, on sait que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

XX.2. D'après la question XVI.2., $\mathrm{Re}(uv) = -\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right\rangle E = 0$ et $\mathrm{Im}(uv) = \psi\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) = \psi\left(\overrightarrow{w}\right) = w$. Par suite,

$$uv = \mathrm{Re}(uv) + \mathrm{Im}(uv) = w.$$

De même, $\mathrm{Re}(vu) = 0$ et $\mathrm{Im}(vu) = \psi\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \psi\left(-\overrightarrow{w}\right) = -w$ et donc $vu = -w$.

La base $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est également une base orthonormée directe (elle est obtenue par deux transpositions successives à partir de la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$). En adaptant les résultats précédents, on obtient $wu = -uw = v$ ou encore $uw = -wu = -v$.

D'après la question XVI.3., $u^2 = -\mathsf{N}(u) = -\|u\|^2\mathsf{E} = -\mathsf{E}$ puis, après multiplication des deux membres par u, $u^3 = -u$.

XX.3. D'après la question XVIII.2., $p^{-1} = \cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u$ puis

$$\begin{aligned}
r_p(u) &= pup^{-1} = (\cos(\theta)\mathsf{E} + \sin(\theta)u)\, u\, (\cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u) = \left(\cos(\theta)u + \sin(\theta)u^2\right)(\cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u) \\
&= (-\sin(\theta)\mathsf{E} + \cos(\theta)u)(\cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u) = -\sin(\theta)\cos(\theta)\mathsf{E} + \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)u + \sin(\theta)\cos(\theta)\mathsf{E} \\
&= u.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
r_p(v) &= (\cos(\theta)\mathsf{E} + \sin(\theta)u)\, v\, (\cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u) = (\cos(\theta)v + \sin(\theta)w)(\cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u) \\
&= \cos^2(\theta)v - \sin(\theta)\cos(\theta)vu + \sin(\theta)\cos(\theta)v + \sin^2(\theta)vu = \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)v + 2\sin(\theta)\cos(\theta)w \\
&= \cos(2\theta)v + \sin(2\theta)w,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r_p(w) &= (\cos(\theta)\mathsf{E} + \sin(\theta)u)\, w\, (\cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u) = (\cos(\theta)w - \sin(\theta)v)(\cos(\theta)\mathsf{E} - \sin(\theta)u) \\
&= \cos^2(\theta)w - \sin(\theta)\cos(\theta)wu - \sin(\theta)\cos(\theta)w - \sin^2(\theta)wu = -2\sin(\theta)\cos(\theta)v + \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)w \\
&= \cos(2\theta)v + \sin(2\theta)w.
\end{aligned}$$

XX.4. Soit R la rotation vectorielle d'axe $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right)$ orienté par $\overrightarrow{u}$ et d'angle 2θ. La matrice de R dans la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ ou encore $\mathsf{R}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$, $\mathsf{R}\left(\overrightarrow{v}\right) = \cos(2\theta)\overrightarrow{v} + \sin(2\theta)\overrightarrow{w}$ et $\mathsf{R}\left(\overrightarrow{w}\right) = -\sin(2\theta)\overrightarrow{v} + \cos(2\theta)\overrightarrow{w}$.

D'après la question précédente, $r_p(u) = \psi\left(\mathsf{R}\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$, $r_p(v) = \psi\left(\mathsf{R}\left(\overrightarrow{v}\right)\right)$ et $r_p(w) = \psi\left(\mathsf{R}\left(\overrightarrow{w}\right)\right)$.

Maintenant, ψ étant un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{H}_{\mathrm{pur}}$, $(u, v, w) = \left(\psi\left(\overrightarrow{u}\right), \psi\left(\overrightarrow{v}\right), \psi\left(\overrightarrow{w}\right)\right)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}_{\mathrm{pur}}$.
Les deux applications linéaires r_p et $\psi \circ \mathsf{R}$ coïncident sur une base de $\mathbb{H}_{\mathrm{pur}}$ et donc $r_p = \psi \circ \mathsf{R}$.

La rotation R est telle que, pour tout $q \in \mathbb{H}_{\mathrm{pur}}$, $r_p(q) = \psi\left(\mathsf{R}\left(\overrightarrow{q}\right)\right)$.

XXI. Soient $d = \psi\left(\overrightarrow{d}\right)$ et $\theta = \dfrac{\phi}{2}$. Soit $p = \cos(\theta)\mathsf{E} + \sin(\theta)d$. La question précédente montre que pour tout $q \in \mathbb{H}_{\mathrm{pur}}$, $r_p(q) = \psi\left(\mathsf{R}\left(\overrightarrow{q}\right)\right)$.

XXII. Soient $d_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathsf{I} - \mathsf{J} - \mathsf{K})$ et $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$. Soit $p_1 = \cos(\theta_1)\mathsf{E} + \sin(\theta_1)d_1$. Alors

$$p_1 = \frac{1}{2}\mathsf{E} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathsf{I} - \mathsf{J} - \mathsf{K}) = \frac{1}{2}(\mathsf{E} + \mathsf{I} - \mathsf{J} - \mathsf{K}).$$

D'après la question précédente, $r_{p_1} = \psi \circ \mathsf{R}_1$.

De même, soient $d_2 = \mathsf{K}$ et $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Soit $p_2 = \cos(\theta_2)\mathsf{E} + \sin(\theta_2)d_2$. Alors

$$p_2 = 0.\mathsf{E} + 1.\mathsf{K} = \mathsf{K}.$$

D'après la question précédente, $r_{p_2} = \psi \circ \mathsf{R}_2$. Ensuite,

$$p_1p_2 = \frac{1}{2}(\mathsf{E} + \mathsf{I} - \mathsf{J} - \mathsf{K})\mathsf{K} = \frac{1}{2}(\mathsf{K} - \mathsf{J} - \mathsf{I} + \mathsf{E}) = \frac{1}{2}\mathsf{E} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathsf{I} - \mathsf{J} + \mathsf{K}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathsf{E} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathsf{I} - \mathsf{J} + \mathsf{K}),$$

et

$$p_2p_1 = \frac{1}{2}K(E+I-J-K) = \frac{1}{2}(K+J+I+E) = \frac{1}{2}E + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}(I+J+K) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)E + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(I+J+K).$$

Puisque $r_{p_1}r_{p_2} = r_{p_1p_2}$, d'après les questions précédentes, $R_1 \circ R_2$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe Vect$((1,-1,1))$ orienté par $(1,-1,1)$ (ou aussi la rotation d'angle $\frac{5\pi}{3}$ et d'axe Vect$((1,-1,1))$ orienté par $(-1,1,-1)$).
De même, $R_2 \circ R_1$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe Vect$((1,1,1))$ orienté par $(1,1,1)$.

Problème n° 2

Partie A : quelques études de séries

I.1. Soient n un entier naturel et x un réel différent de 1.

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}\left(x^k - x^{k+1}\right) = 1 - x^{n+1} \text{ (somme télescopique)}$$

et donc, puisque $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

I.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ puis pour $x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - \left(1-x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

I.3. Soit $x \in]-1,1[$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx^{n+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)x^n = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
On a montré que pour tout x de $]-1,1[$, la série de terme général nx^{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et de plus

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

II.1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant k$, posons $a_n = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Pour $n \geqslant k$, $a_n \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n+1-k}$$

puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. D'après la règle de d'Alembert, $R_a = \frac{1}{1} = 1$.

II.2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Puisque $R_a = 1$, S_k est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} S'_k(x) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty}(n-k)\binom{n}{k}x^{n-k-1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}x^{n-k-1} = (k+1)\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}x^{n-(k+1)} \\ &= (k+1)\sum_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^{n-(k+1)} = (k+1)S_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, $S_k'(x) = (k+1)S_{k+1}(x)$.

II.3. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1,1[$, $S_k(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

- L'égalité est vraie quand $k = 1$ d'après la question I.3..
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons que pour tout $x \in]-1,1[$, $S_k(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$. En dérivant membre à membre ces égalités, on obtient pour $x \in]-1,1[$,

$$(k+1)S_{k+1}(x) = S_k'(x) = \frac{-(k+1)(-1)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{k+1}{(1-x)^{k+2}}$$

et donc, après simplification par $k+1$, pour tout $x \in]-1,1[$, $S_{k+1}(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{k+2}}$.

On a montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1,1[$, $S_k(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

II.4. Puisque $\dfrac{(n+1)^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, le rayon de la série entière proposée est égal à 1. En particulier, pour tout $x \in]-1,1[$, la série de terme général n^2x^{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n^2 = n(n-1) + n = 2\dfrac{n(n-1)}{2} + n = 2\dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{1}$ (y compris quand $n = 1$ auquel cas $\dbinom{n}{2} = 0$). Mais alors, pour $x \in]-1,1[$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{2}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{1}x^{n-1} \text{ (les deux séries convergent)}\\
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty}\binom{n}{2}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{1}x^{n-1} = 2x\sum_{n=2}^{+\infty}\binom{n}{2}x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{1}x^{n-1}\\
&= 2xS_2(x) + S_1(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x+1-x}{(1-x)^3} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$.

III.1. L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}.$$

Puisque $1-p \in]0,1[$, la série précédente converge d'après la question I.3. ou encore X admet une espérance. De plus,

$$E(X) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

On a montré que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

III.2. De même, X^2 admet une espérance d'après la question II.4. (et la formule de transfert) et de plus

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X=k) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1}\\
&= p\frac{(1-p)+1}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

On a montré que X^2 admet une espérance et que $E\left(X^2\right) = \dfrac{2-p}{p^2}$.

III.3. Puisque X^2 admet une espérance, on sait que X admet une variance puis, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

On a montré que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Partie B : étude d'une séance de tir à l'arc

IV. A priori, $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ (l'événement $(X_1 = \infty)$ étant l'événement « le tireur ne touche jamais la cible »).

V. L'événement $(X_1 = 1)$ est l'événement E_1 et pour $k \geqslant 2$, l'événement $(X_1 = k)$ est l'événement $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_{k-1}} \cap E_k$.

VI. Donc, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p_1$. Ensuite, pour $k \geqslant 2$, les événements $E_1, \ldots, E_k$ sont indépendants et on sait qu'il en est de même des événements $\overline{E_1}, \ldots, \overline{E_{k-1}}$ et E_k. Par suite, pour $k \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\left(\overline{E_i}\right)\right) \times \mathbb{P}(E_k) = p_1 (1-p_1)^{k-1}$$

ce qui reste vrai quand $k = 1$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = p_1 (1-p_1)^{k-1}$.
Enfin, puisque $((X_1 = k))_{k \in \mathbb{N}^*} \cup (X_1 = \infty)$ est un sytème complet d'événements,

$$\mathbb{P}(X_1 = \infty) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 (1-p_1)^{k-1} = 1 - \frac{p_1}{1-(1-p_1)} = 1 - 1 = 0.$$

On convient dorénavant la loi de X_1 est définie par : $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = p_1 (1-p_1)^{k-1}$. X_1 suit la loi géométrique de paramètre p_1.

VII.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} p_1 (1-p_1)^{n-1} = \frac{p_1 (1-p_1)^k}{1-(1-p_1)} = (1-p_1)^k.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_1 > k) = (1-p_1)^k$ (ce qui reste vrai quand $k = 0$).

VII.2. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $\mathbb{P}(X_1 > m) \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X_1 > m)}(X_1 > n+m) &= \frac{\mathbb{P}((X_1 > n+m) \cap (X_1 > m))}{\mathbb{P}(X_1 > m)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 > n+m)}{\mathbb{P}(X_1 > m)} = \frac{(1-p_1)^{n+m}}{(1-p_1)^m} \\ &= (1-p_1)^n = \mathbb{P}(X_1 > n).\end{aligned}$$

VIII. $1 - p_1$ et $1 - p_2$ sont dans $]0, 1[$ et il en est de même de $(1-p_1)(1-p_2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = k) \ \text{(car les variables } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 (1-p_1)^{k-1} p_2 (1-p_2)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 p_2 ((1-p_1)(1-p_2))^{k-1} \\ &= \frac{p_1 p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}\end{aligned}$$

ou aussi $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \dfrac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$.

IX.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 > X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_1 > k) \cap (X_2 = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 > k) \times \mathbb{P}(X_2 = k) \text{ (car les variables } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p_1)^k p_2 (1-p_2)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p_1) p_2 ((1-p_1)(1-p_2))^{k-1} \\ &= \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{q_1 p_2}{1-q_1 q_2}\end{aligned}$$

X. Par symétrie des rôles, $\mathbb{P}(X_2 > X_1) = \dfrac{(1-p_2)p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \dfrac{q_2 p_1}{1-q_1 q_2}$.

XI.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'événement $(X_1 = n)$ est réalisé. L'archer A_2 effectue alors n expériences identiques et indépendantes (tirer une flèche sur la cible). Chaque expérience a deux issues : « toucher la cible » avec une probabilité $p_2 = p$ et « ne pas toucher la cible » avec une probabilité $1 - p_2 = 1 - p = q$. Puisque G est le nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2, la loi conditionnelle de G sachant $(X_1 = n)$ est une loi binomiale de paramètres n et p. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(X_1=n)}(G = k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}.$$

XI.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $((X_1 = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$. Donc, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}((G = k) \cap (X_1 = n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) \times \mathbb{P}_{(X_1=n)}(G = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n-k-1} \\ &= q^{k-1} p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n-2k}.\end{aligned}$$

XI.3. D'après la question II.3. et puisque $q^2 \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G = k) &= q^{k-1} p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (q^2)\, n - k = q^{k-1} p^{k+1} \times \frac{1}{(1-q^2)^{k+1}} \\ &= q^{k-1} p^{k+1} \times \frac{1}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}} = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} \\ &= \left(\frac{q}{q+1}\right)^{k-1} \times \frac{1}{1+q)^2}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(G = k) = \left(\dfrac{q}{q+1}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{1+q)^2}$.

XI.4. L'espérance de G est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(G = k) = \frac{1}{(1+q)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$. Or $0 < \dfrac{q}{q+1} < 1$ et donc, d'après la question I.3., G admet une espérance et

$$E(G) = \frac{1}{(1+q)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1+q)^2} \times \frac{1}{\left(1 - \dfrac{q}{q+1}\right)^2} = \frac{(q+1)^2}{q+1)^2} = 1.$$

Donc, quelque soit la valeur de $p \in]0,1[$, l'archer A_2 touchera en moyenne exactement une fois la cible.

Partie C : étude d'une variable sans mémoire

XII. $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p = q$. En particulier, $q = \mathbb{P}(Y \geqslant 1) > 0$ ou encore, plus explicitement, $0 < q \leqslant 1$.

XIII. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Puisque $\mathbb{P}(Y \geqslant m) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n + m) = \mathbb{P}(Y = m) \times \mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant n + m) = P(Y \geqslant m)\mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

XIV.1. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(Y \geqslant n + 1) = \mathbb{P}(Y \geqslant n)\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = qu_n.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme $u_0 = \mathbb{P}(Y \geqslant 0) = 1$ et de raison q.

XIV.2. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) = q^n$.

XIV.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) \geqslant n + 1 \Rightarrow Y(\omega \geqslant n$ et donc $\{Y \geqslant n + 1\} \subset \{Y \geqslant n\}$. Par suite,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(\{Y \geqslant n\} \setminus \{Y \geqslant n + 1\}) = \mathbb{P}(Y \geqslant n) - \mathbb{P}(Y \geqslant n + 1).$$

XIV.4. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = q^n - q^{n+1} = (1 - q)q^n = pq^n.$$

XIV.5. On sait déjà que $0 < q \leqslant 1$. De plus, la série de terme général $\mathbb{P}(Y = n) = pq^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme 1. Ceci impose $q < 1$ et donc $0 < q < 1$ (et aussi $0 < p < 1$).

XV. Soit $Z = Y + 1$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Y = n - 1) = pq^{n-1}.$$

Donc, la variable $Y + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

XVI. On a montré que si Y est sans mémoire, alors la variable $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Réciproquement, supposons que la variable $Z = Y + 1$ suive une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $m \in \mathbb{N}$, d'après la question VII.,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant m) = \mathbb{P}(Z \geqslant m - 1) = \mathbb{P}(Z > m) > 0,$$

puis

$$\mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant m + n) = \mathbb{P}_{(Z > m)}(Z > m + n) = \mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(Y \geqslant m),$$

et donc Y est sans mémoire.

On a montré que Y est sans mémoire si et seulement si $Y + 1$ est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Partie D : taux de panne d'une variable discrète

XVII.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\{Z \geqslant n\} = \{Z = n\} \cup \{Z \geqslant n + 1\}$ avec $\{Z = n\} \cap \{Z \geqslant n + 1\} = \varnothing$,

$$\begin{aligned}1 - \lambda_n &= 1 - \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{Z \geqslant n\})}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(Z = n)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n) - \mathbb{P}(Z = n)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)} = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n + 1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}.\end{aligned}$$

XVII.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\{Z \geqslant n+1\} \subset \{Z \geqslant n\}$, par croissance d'une probabilité, $0 < \mathbb{P}(Z \geqslant n+1) \leqslant \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ puis, après division par le réel strictement positif $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$, on obtient

$$0 < 1 - \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)} \leqslant 1$$

puis $0 \leqslant \lambda n < 1$.

XVII.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geqslant n) &= \mathbb{P}(Z \geqslant 0) \times \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant k+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant k)} \text{ (produit télescopique)} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k) \text{ (car } \mathbb{P}(Z \geqslant 0 = 1).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$.

XVIII.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1 - \mathbb{P}(Z < n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z = k)$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z = k) = 1 - \mathbb{P}(Z \geqslant n).$$

XVIII.2. La série de terme général $\mathbb{P}(Z = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge et a pour somme 1. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z = k)$, la suite $(\mathbb{P}(Z \geqslant n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 0.$$

XVIII.3. D'après la question XVII.2., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 - \lambda_k > 0$. D'après la question XVII.3., pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \lambda_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)\right) = \ln(\mathbb{P}(Z \geqslant n)).$$

D'après la question précédente, $\lim_{n \to +\infty} \ln(\mathbb{P}(Z \geqslant n)) = -\infty$. Donc, la série de terme général $\ln(1 - \lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, diverge vers $-\infty$.

XVIII.4. Si la série de terme général λ_n, $n \in \mathbb{N}$, converge, en particulier $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$ puis $-\ln(1 - \lambda_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda_n > 0$. Mais alors, la série de terme général $-\ln(1 - \lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge ce qui est faux. Donc, la série de terme général λ_n, $n \in \mathbb{N}$, diverge.

XIX.1. D'après la question XIX.1., $0 \leqslant c < 1$.

XIX.2. D'après la question XVII.3., pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k) = (1 - c)^n$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$ en tenant compte de $\mathbb{P}(Z \geqslant 0) = 1$ et $1 - c > 0$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z \geqslant n) = (1 - c)^n.$$

XIX.3. Si $c = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1$. Ceci contredit le résultat de la question XVIII.2. ($\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n) = 0$. Donc, $0 < c < 1$.

XIX.4. Ainsi, si Z est une variable aléatoire ayant un taux de panne constant, il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = (1 - c)^n$. On en déduit encore que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z \geqslant n) - \mathbb{P}(Z \geqslant n+1) = (1 - c)^n - (1 - c)^{n+1} = c(1 - c)^n.$$

Mais alors, si $Y = Z + 1$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Z = n - 1) = c(1 - c)^{n-1}.$$

Donc, la variable $Z + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $c \in]0, 1[$.

Réciproquement, supposons que la variable $Y = Z + 1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \mathbb{P}(Y > n) > 0$ puis

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{\mathbb{P}(Z = n)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)} = \frac{\mathbb{P}(Y = n + 1)}{\mathbb{P}(Y > n)} \\ &= \frac{p(1 - p)^n}{(1 - p)^n} \text{ (d'après la question V.)} \\ &= p\end{aligned}$$

La variable Z a donc un taux de panne constant.

En résumé, Z a un taux de panne constant si et seulement si $Z + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

