SESSION 2018

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Partie A : suites adjacentes

I.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_n \geqslant b_{n+1}$ puis $-b_n \leqslant -b_{n+1}$. En additionnant membre à membre, on obtient $a_n - b_n \leqslant a_{n+1} - b_{n+1}$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n - b_n \leqslant a_{n+1} - b_{n+1}$. La suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

La suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend en croissant vers sa limite, à savoir 0, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - b_n \leqslant 0$ ou encore $a_n \leqslant b_n$.

I.2. Puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b_0. On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a_0. On en déduit que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Puisque les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on peut écrire

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Ainsi, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite que l'on note ℓ. Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par sa limite ℓ et puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par sa limite ℓ. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

I.3. Supposons de plus que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n < a_{n+1} \leqslant \ell$ et donc $a_n < \ell$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > \ell$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < \ell < b_n.$$

II.1.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Donc, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (a_{n+1} - a_n) + \left(\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1)\times(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

  Donc, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\times n!} = 0$.

On a montré que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

II.2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e - a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t\ dt$.

- $\dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)e^t\ dt = \left[(2-t)e^t\right]_0^1 = e - 2 = e - a_1$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $e - a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} e^t\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt,$$

puis, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt &= \frac{1}{n!} \times \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt\right) = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \\ &= e - a_n\end{aligned}$$

et donc

$$e - a_{n+1} = e - a_n - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt.$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e - a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

II.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto (1-t)^n e^t$ est continue, positive et non nulle sur $[0,1]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt > 0$ puis que $e - a_n > 0$.

Pour $t \in [0,1]$, posons $f(t) = (1-t)e^t$. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et pour $t \in [0,1]$,

$$f'(t) = -e^t + (1-t)e^t = -te^t.$$

La fonction f' est strictement négative sur $]0,1]$ et la fonction f est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $[0,1]$. On en déduit que pour $t \in]0,1]$,

$$(1-t)e^t = f(t) < f(0) = 1.$$

On en déduit encore que pour tout $t \in]0,1[$, $(1-t)^n e^t = (1-t)^{n-1} \times (1-t)e^t < (1-t)^{n-1}$. La fonction $t \mapsto (1-t)^n e^t - (1-t)^{n-1}$ est continue, négative et non nulle sur $[0,1]$ et donc $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt < \int_0^1 (1-t)^{n-1} \, dt$ puis

$$e - a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt < \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} \, dt = \frac{1}{n!}\left[-\frac{(1-t)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n \times n!}.$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < e - a_n < \frac{1}{n \times n!}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n \times n!} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e.$$

II.4. D'après la question II.3, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < e - a_n < \dfrac{1}{n \times n!}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < e - a_n < 10^{-5} \Leftarrow \frac{1}{n \times n!} < 10^{-5} \Leftarrow n \times n! > 10^5 \Leftarrow n = 8.$$

a_8 est une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

II.5.a. Posons $e = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Alors, $e \times q! = p \times (q-1)!$ est un entier naturel.

II.5.b. Soit $x = q!\left(e - \displaystyle\sum_{p=0}^{q} \frac{1}{p!}\right) = q!\,(x - a_q)$. On note déjà que $x > 0$ d'après la question II.3. Ensuite,

$$x = eq! - \sum_{p=0}^{q} \frac{q!}{p!} = eq! - 1 - \sum_{p=0}^{q-1} q(q-1)\ \dots (p+1).$$

x est donc un entier relatif positif ou encore x est un entier naturel.

II.5.c. On a déjà dit que $x > 0$. Ensuite, d'après la question II.3,

$$x = q!\,(e - a_q) < q! \times \frac{1}{q \times q!} = \frac{1}{q} \leqslant 1,$$

et donc $x < 1$. Finalement, $0 < x < 1$.

II.5.d. Il n'existe pas d'entier x tel que $0 < x < 1$ et il était donc absurde de supposer que e est rationnel. On a montré que e est irrationnel.

III.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-x)^p = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

et donc

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{p=0}^{n-1} (-x)^p + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

Si de plus $x \in]-1,1[$, $\dfrac{x^n}{1+x}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puis $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p x^p$ tend vers $\dfrac{1}{1+x}$ quand n tend vers $+\infty$. On a montré que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

En particulier, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Le rayon R_a de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins égal à 1 car la série entière converge sur $]-1,1[$ et au plus égal à 1 car la série entière diverge pour $x = 1$. Donc,

$$R_a = 1.$$

III.2. Pour $x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $F(x) = \ln(1+x)$. F est la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0. Puisque f est développable en série entière sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$, on sait que F est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que sont développement s'obtient par intégration terme à terme. Plus précisément, pour $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

III.3. Soit $x \in [0,1]$. La suite $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n+1} \times x^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante en tant que produit de deux suites positives et décroissantes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) = (-1)^{2n+2}\dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} + (-1)^{2n+3}\dfrac{x^{2n+4}}{2n+4} = \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} - \dfrac{x^{2n+4}}{2n+4} \geqslant 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2}(x) - S_{2n}(x) = (-1)^{2n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+2} + (-1)^{2n+2}\dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} = -\dfrac{x^{2n+2}}{2n+2} + \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant 0$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_{2n}(x) - S_{2n+1}(x)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = 0$.

Donc, la suite $(S_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(S_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_{2n}(x) - S_{2n+1}(x)) = 0$. Les deux suites $(S_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

III.4. Soit $x \in [0,1[$. On sait que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(1+x)$. Donc, les deux suites extraites $(S_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ln(1+x)$.

La suite $(S_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers sa limite $\ln(1+x)$ en croissant et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1}(x) \leqslant \ln(1+x)$. De même, la suite $(S_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers sa limite $\ln(1+x)$ en décroissant et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n}(x) \geqslant \ln(1+x)$. En résumé,

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1}(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant S_{2n}(x).$$

III.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les trois fonctions $x \mapsto S_{2n+1}(x)$, $x \mapsto S_{2n}(x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont définies et continues sur $[0,1]$. Quand x tend vers 1 à n fixé dans l'encadrement de la question précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1}(1) \leqslant \ln(2) \leqslant S_{2n}(1).$$

III.6. Les deux suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes d'après la question II.3. Donc, ces suites convergent vers une même limite ℓ. Quand n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question précédente, on obtient $\ell \leqslant \ln(2) \leqslant \ell$ puis $\ell = \ln(2)$.

Ainsi, les deux suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, à savoir $\ln(2)$. On sait alors que la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $\ln(2)$. On a montré que :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Partie B : écriture d'un entier en base 2

IV.1. Si $N \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, conviennent, alors

$$2^{n-1} = d_{n-1}2^{n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k = N \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 1 \times 2^k = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1.$$

Donc, nécessairement $2^{n-1} \leqslant N \leqslant 2^n - 1$.

IV.2. Si $n = 1$, alors $N = d_0 = 1$ ce qui contredit $N \geqslant 2$. Donc, $n \geqslant 2$ puis nécessairement, $N = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d_k 2^{k-1} + d_0$ ou de plus le nombre $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d_k 2^{k-1}$ est un entier. Ainsi, $N = 2Q + d_0$ où Q est un entier et $0 \leqslant d_0 \leqslant 1 < 2$. Donc, d_0 est nécessairement le reste de la division euclidienne de N par 2.

IV.3. D'après la question IV.1, on a nécessairement $2^{n-1} \leqslant N < 2^n$ puis $n - 1 \leqslant \log_2(N) < n$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \log_2(x)$ sur $]0,+\infty[$) puis $n \leqslant \log_2(N) + 1 < n + 1$ et donc nécessairement $n = E(\log_2(N)) + 1$. Ceci montre l'unicité de n.

Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, d_k est uniquement défini.

- D'après la question IV.2, d_0 est nécessairement le reste de la division euclidienne de N par 2. Ceci montre l'unicité de d_0.
- Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. Supposons avoir montré l'unicité de d_0, ..., d_k.

  Si $N = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} d_p 2^p$ alors

$$N - \sum_{p=0}^{k} d_p 2^p = \sum_{p=k+1}^{n-1} d_p 2^p = 2^{k+1}\left(\sum_{p=k+1}^{n-1} d_p 2^{k+1-p}\right).$$

  Si on pose $N' = \dfrac{N - \displaystyle\sum_{p=0}^{k} d_p 2^p}{2^{k+1}}$, N' est nécessairement un entier. Plus précisément

$$N' = \sum_{p=k+1}^{n-1} d_p 2^{k+1-p} = d_{k+1} + d_{k+1} \times 2 + \ldots + d_{n-1} 2^{n-k-2}.$$

Le cas $k = 0$ appliqué à N' montre que d_{k+1} est nécessairement le reste de la division euclidienne de N' par 2, ce qui montre l'unicité de d_{k+1}.

On a montré par récurrence que si n puis $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ existent, alors n puis $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ sont uniquement définis.

V.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = 2y_{k+1} + d_k$ avec $y_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $d_k \in \{0, 1\}$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N = \sum_{p=0}^{k-1} d_p 2^p + 2^k y_k$.

- $N = y_0 = d_0 + 2y_1 = \sum_{p=0}^{1-1} d_p 2^p + 2^1 y_1$. L'égalité est donc vraie quand $k = 1$.
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $N = \sum_{p=0}^{k-1} d_p 2^p + 2^k y_k$. Alors,
$$N = \sum_{p=0}^{k-1} d_p 2^p + 2^k (2y_{k+1} + d_k) = \sum_{p=0}^{k-1} d_p 2^p + d_k 2^k + 2^{k+1} y_{k+1} = \sum_{p=0}^{k} d_p 2^p + 2^{k+1} y_{k+1}.$$

On a montré par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N = \sum_{p=0}^{k-1} d_p 2^p + 2^k y_k$.

V.2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $y_k = 2y_{k+1} + d_k \geqslant 2y_{k+1}$ et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_{k+1} \leqslant \dfrac{y_k}{2}$. Par récurrence, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k \leqslant \dfrac{y_0}{2^k} = \dfrac{N}{2^k}$. En particulier, pour $k > \log_2(N)$, on a $0 \leqslant y_k < 1$. Puisque y_k est un entier, on en déduit que pour $k > \log_2(N)$, on a $y_k = 0$. La suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc nulle à partir d'un certain rang.

Soit alors $n = \text{Min}\{k \in \mathbb{N} / \ y_k = 0\}$. $y_0 \neq 0$ et donc $n \geqslant 1$. Puisque $2 \leqslant N = d_0 + 2y_1 \leqslant 1 + 2y_1$, on a $y_1 \geqslant \dfrac{1}{2}$ et en particulier $y_1 \neq 0$. Donc, $n \geqslant 2$.

Par définition de n, $N = \sum_{p=0}^{n-1} d_p 2^p + 2^n y_n = \sum_{p=0}^{n-1} d_p 2^p$. Il reste à vérifier que $d_{n-1} \neq 0$. Or, $d_{n-1} = 2y_n + d_{n-1} = y_{n-1} \neq 0$ par définition de n.

Finalement, $N = \sum_{p=0}^{n-1} d_p 2^p$ où $n \geqslant 2$, les nombres d_0, ..., d_{n-1} sont éléments de $\{0, 1\}$ et d_{n-1} n'est pas nul. Ceci montre que $N = \overline{d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_0}$.

On note que quand $N = 1$, alors $n = 1$, $d_0 = 1$, puis $N = \overline{d_0}$.

V.3. Programme Python.

```python
def developpement_dyadique(N) :
    r=N%2 # Calcul du reste
    q=N//2 # Calcul du quotient
    L=str(r) # Initialisation de la suite
    while q >0 :
        r=q%2
        L=str(r)+L
        q=q//2
    return L
```

V.4. Directement, $391 = 256 + 128 + 4 + 2 + 1 = 2^8 + 2^7 + 2^2 + 2 + 1$ et donc l'écriture de 391 en base 2 est $\overline{110000111}$.

Si on veut absolument utiliser la démarche algorithmique précédente, on obtient le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_k	391	195	97	48	24	12	6	3	1	0
d_{k-1}		1	1	1	0	0	0	0	1	1

On lit alors l'écriture binaire de $N = 391$ sur la dernière ligne du tableau en sens inverse : $N = \overline{110000111}$.

VI.1. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$ contient n termes et nécessite donc $n-1$ additions pour être calculée.

Un terme $d_k \times 2^k$ nécessite $1 + k - 1 = k$ multiplications pour être calculé. Le nombre total de ces multiplications est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Finalement, le nombre total d'opérations effectuées est $n - 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.

VI.2. Calculer $d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}$ nécessite 2 opérations. Calculer $(d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}) \times 2 + d_{n-3}$ nécessite 2×2 opérations. Calculer $(((d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}) \times 2 + d_{n-3}) \times 2 + \ldots) \times 2 + d_0$ nécessite $2(n-1)$ opérations.

VI.3. Programme Python.

```python
def Horner(L):
    n = len(L)
    N=L[0]
    for i in range(1,n):
        N=2*N+L[i]
    return(N)
```

VI.4. $N = 2^{14} + 2^{12} + 2^9 + 2^5 + 1 = 16\,384 + 4\,096 + 512 + 32 + 1 = 21\,025$.

Partie C : nombres dyadiques

VII. $\mathbb{Z} = \left\{\dfrac{a}{2^0},\ a \in \mathbb{Z}\right\} \subset \left\{\dfrac{a}{2^p},\ a \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\} = D_2$. D'autre part, $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ et $\dfrac{1}{2} \in D_2$. Finalement, $\mathbb{Z} \underset{\neq}{\subset} D_2$.

$D_2 = \left\{\dfrac{a}{2^p},\ a \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\} \subset \left\{\dfrac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*\right\} = \mathbb{Q}$. Vérifions que $\dfrac{1}{3} \notin D_2$. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{2^p}$. On en déduit que $2^p = 3a$. Mais 2^p n'est pas divisible par le nombre premier 3 et donc ceci est faux. Ainsi, $\dfrac{1}{3}$ est un élément de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas dans D_2. Finalement, $D_2 \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q}$.

VIII.1. Si $n = 0$, alors $x = a_0$ est un entier ce qui n'est pas. Donc, nécessairement $n \geqslant 1$. Ensuite

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

On en déduit que nécessairement $a_0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k} < a_0 + 1$. Ainsi, nécessairement, $a_0 \leqslant x < a_0 + 1$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$. Ceci montre que $a_0 = E(x)$ et donc que a_0 est uniquement défini en cas d'existence.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons avoir montré l'unicité de a_0, a_1, ..., a_k. Alors, $2^{k+1}x - \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i 2^{k+1-i} = \sum_{i=k+1}^{n} a_i 2^{k+1-i}$ et par le même raisonnement que pour a_0, a_{k+1} est nécessairement la partie entière de $2^{k+1}x - \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i 2^{k+1-i}$ ce qui montre l'unicité de a_{k+1}.

On a montré par récurrence l'unicité de a_0, a_1, ..., a_n, en cas d'existence.

Il reste à montrer l'unicité de n. Supposons que pour un certain entier m, $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k 2^{-k}$ avec $a_m \neq 0$ (et $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \ldots, a_m) \in \{0,1\}^n$). Supposons par exemple $n \leqslant m$. Si par l'absurde $n < m$, en tenant compte de l'unicité des a_k

pour $k \in [\![0, n]\!]$), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k 2^{-k} = x = \sum_{k=0}^{m} a_k 2^{-k} = x + \sum_{k=n+1}^{m} a_k 2^{-k}$ et donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} a_k 2^{-k} = 0$. Mais cette dernière égalité est impossible car $a_m = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} a_k 2^{-k} > 0$. Donc, $m = n$ et on a montré l'unicité de n.

VIII.2. Puisque $x \in D_2^+ \setminus \mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{a}{2^p}$. On ne peut avoir $p = 0$ car alors $x \in \mathbb{N}$ ce qui est exclu. Donc, $p \in \mathbb{N}^*$. On effectue la division euclidienne de a par 2^p : $a = a_0 2^p + a'$ où a_0 est un entier naturel et a' est un entier naturel tel que $0 \leqslant a' < 2^p$. On ne peut avoir $a' = 0$ car alors $x = \dfrac{a}{2^p} = a_0 \in \mathbb{N}$ ce qui est faux. Donc, $1 \leqslant a' < 2^p$.

D'après la partie B, il existe $(d_0, \ldots, d_{p-1}) \in \{0, 1\}^p$, les d_k étant non tous nuls, tels que $a' = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^k$, puis

$$x = \frac{a}{2^p} = a_0 + \frac{a'}{2^p} = a_0 + \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p} = a_0 + \frac{d_{p-1}}{2} + \ldots + \frac{d_1}{2^{p-1}} + \frac{d_0}{2^p}.$$

VIII.3. Dans l'égalité précédente, pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $a_k = d_{p-k}$. Les nombres a_1, ..., a_n, ne sont pas tous nuls et de plus

$$x = a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{2^{p-1}} + \frac{a_p}{2^p}.$$

Enfin, en posant $n = \text{Max}\{k \in [\![1, p]\!] / \ a_k \neq 0\}$, on obtient une égalité du type

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k},$$

où $n \geqslant 1$, $a_0 \in \mathbb{N}$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ et $a_n \neq 0$.

En résumé, on a montré que pour tout $x \in D_2^+ \setminus \mathbb{N}$, il existe un et un seul $n \in \mathbb{N}^*$, un et un seul $a_0 \in \mathbb{N}$, un et un seul $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ tels que $a_n \neq 0$ et $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}$.

IX. $\dfrac{35}{4} = \dfrac{32 + 2 + 1}{4} = 8 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2}$.

Partie D : développement dyadique illimité

X.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{a_k}{2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$. Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, la série géométrique de terme général $\dfrac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge. Ceci montre que la série de terme général $a_k 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge.

X.2. Soit $N \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^N} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{N-1}}$.

X.3. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite dyadique. D'après la question précédente,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} = 1.$$

Ainsi, $s(a) \in [0, 1]$.

X.4. Supposons que pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}^*$, $a_{k_0} = 0$, alors

$$s(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k_0}} = 1 - \frac{1}{2^{k_0}} < 1.$$

En particulier, si a est une suite dyadique propre, $s(a) < 1$ et donc $s(a) \in [0, 1[$.

X.5. Soient a une suite dyadique impropre puis $s(a)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{2^k}$. Par hypothèse, il existe $m\geqslant 1$ tel que pour tout $k\geqslant m$, $a_k=1$. Si $m=1$, $s(a)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=1$ et donc $x\in D_2^+$. Dorénavant, $m\geqslant 2$. Dans ce cas,

$$s(a)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{2^k}+\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{2^k}+\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Après réduction au même dénominateur, $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{2^k}$ s'écrit sous la forme $\frac{a'}{2^{m-1}}$ où a' est un entier naturel. Mais alors, $s(a)=\frac{a'+1}{2^{m-1}}=\frac{a''}{2^p}$ où $a''=a'+1$ est un entier naturel et $p=m-1$ est un entier naturel.

Dans tous les cas, $s(a)$ est un nombre dyadique.

X.6. $s(a)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{2^k}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^p=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

XI.1. Soit $x\in D_2^+\cap]0,1[$. D'après la partie C, il existe $n\geqslant 1$, $a_0\in\mathbb{N}$, $(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n$ tels que $x=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ et $a_n\neq 0$. a_0 est la partie entière de x et donc $a_0=0$ puis

$$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}.$$

En posant de plus pour $k>n$, $a_k=0$, on obtient une suite dyadique propre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{2^k}.$$

Ce résultat reste vrai pour $x=0$ en prenant pour a la suite dyadique définie par : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $a_k=0$.

XI.2. Soit $x\in D_2^+\cap]0,1[$. On reprend l'écriture $x=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ avec $a_n\neq 0$ et donc $a_n=1$. Si $n\geqslant 2$, on peut écrire :

$$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{2^k}+\frac{1}{2^n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}.$$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $b_k=\begin{cases}a_k \text{ si } k\leqslant n-1\\ 0 \text{ si } k=n\\ 1 \text{ si } k\geqslant n+1\end{cases}$. On obtient une suite dyadique impropre b telle que $x=s(b)$.

Si $n=1$, on écrit directement $x=\frac{1}{2}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$ et on obtient de nouveau le résultat.

XII.1. Soit $x\in[0,1[$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\alpha_k(x)$ est un entier relatif.
Ensuite, $E\left(2^{k-1}x\right)\leqslant 2^{k-1}x<E\left(2^{k-1}x\right)+1$ puis $2E\left(2^{k-1}x\right)\leqslant 2^kx<2E\left(2^{k-1}x\right)+2$.
$2E\left(2^{k-1}x\right)$ est un entier inférieur ou égal à 2^kx. Puisque $E\left(2^kx\right)$ est le plus grand de ces entiers, on en déduit que $2E\left(2^{k-1}x\right)\leqslant E\left(2^kx\right)$. D'autre part, $E\left(2^kx\right)\leqslant 2^kx<2E\left(2^{k-1}x\right)+2$.
En résumé, $2E\left(2^{k-1}x\right)\leqslant E\left(2^kx\right)<2E\left(2^{k-1}x\right)+2$ puis $0\leqslant E\left(2^kx\right)-2E\left(2^{k-1}x\right)<2$. Ainsi, $\alpha_k(x)$ est un entier relatif tel que $0\leqslant\alpha_k(x)<2$ et donc $\alpha_k(x)\in\{0,1\}$.

On a montré que la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

XII.2. Soit $x\in[0,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(x)$ et $v_n(x)$ sont dans D_2 car de la forme $\frac{a}{2^n}$ où a est un entier naturel.

Vérifions que les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

- Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}(x)-u_n(x)=\frac{\alpha_{n+1}(x)}{2^{n+1}}\geqslant 0$. Donc, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1}(x)-v_n(x)=\frac{\alpha_{n+1}(x)}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}=\frac{\alpha_{n+1}(x)-1}{2^{n+1}}\leqslant 0$. Donc, la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n(x)-u_n(x))=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

On a montré que les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n(x)\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\leqslant 1$. Donc, $u_n(x)\in[0,1]$. Enfin, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant v_n(x)=u_n(x)+\dfrac{1}{2^n}\leqslant 1-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^n}=1$. Donc, $v_n(x)\in[0,1]$.

XII.3. Soient $x\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{E}\left(2^kx\right)}{2^k}-\frac{\mathrm{E}\left(2^{k-1}x\right)}{2^{k-1}}\right)\\&=\frac{\mathrm{E}\left(2^nx\right)}{2^n}-\frac{\mathrm{E}\left(2^0x\right)}{2^0}\text{ (somme télescopique)}\\&=\frac{\mathrm{E}\left(2^nx\right)}{2^n}-\mathrm{E}(x)=\frac{\mathrm{E}\left(2^nx\right)}{2^n}\text{ (car }x\in[0,1[),\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{E}\left(2^nx\right)=2^nu_n(x)$.

Puisque, $2^nx-1<\mathrm{E}\left(2^nx\right)=2^nu_n(x)\leqslant 2^nx$, on en déduit que $u_n(x)\leqslant x$ et que $u_n(x)>x-\dfrac{1}{2^n}$ ou encore $v_n(x)=u_n(x)+\dfrac{1}{2^n}>x$. On a montré que

$$\forall x\in[0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(x)\leqslant x<v_n(x).$$

XII.4. Les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc convergentes et ont la même limite. Soit ℓ la limite commune de ces deux suites.

D'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(x)\leqslant x<v_n(x)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell\leqslant x\leqslant\ell$ et donc $\ell=x$. Ainsi, les deux suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers x.

XII.5. On sait déjà que la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique (d'après la question XII.1.) et que $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k(x)}{2^k}$ (d'après la question précédente). Il reste à vérifier que la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre.

Si par l'absurde, la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique impropre, il existe un entier $m\geqslant 1$ tel que, pour tout $k\geqslant m$, $\alpha_k(x)=1$. On en déduit que $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k(x)}{2^k}+\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\alpha_k(x)}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k(x)}{2^k}+\frac{1}{2^m}=v_m(x)$. Mais ceci contredit l'inégalité stricte $v_m(x)>x$ établie à la question XII.3.. Donc, la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre.

XII.6. On vient de montrer que pour tout réel $x\in[0,1[$, il existe une suite dyadique propre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{2^k}$.

Montrons l'unicité d'une telle suite. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite dyadique propre telle que $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{2^k}$. Montrons que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $a_k=\alpha_k(x)$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$2^kx=\sum_{i=1}^{+\infty}a_i2^{i-k}=\sum_{i=1}^{k}a_i2^{i-k}+\sum_{i=k+1}^{+\infty}a_i2^{i-k}.$$

Ensuite, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre, par le même raisonnement qu'à la question X.4. (pour établir l'inégalité stricte),

$$0\leqslant\sum_{i=k+1}^{+\infty}a_i2^{i-k}<\sum_{i=k+1}^{+\infty}2^{i-k}=1.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i2^{i-k}\leqslant x<\sum_{i=1}^{k}a_i2^{i-k}+1$. Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i2^{i-k}$ est un entier, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i2^{i-k}=\mathrm{E}\left(2^kx\right)$.

Si $k=1$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i 2^{i-k} = \sum_{i=1}^{1} a_i 2^{i-1} = a_1$ et d'autre part, $2E\left(2^{k-1}x\right) = 2E(x) = 0$ car $x \in [0,1[$.

Donc, $a_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i 2^{i-1} = E\left(2^1 x\right) = E\left(2^1 x\right) - 2E\left(2^{1-1}x\right) = \alpha_1(x)$.

Sinon $k \geqslant 2$ et donc $k-1 \geqslant 1$. En appliquant le travail précédent à l'entier $k-1$, on a aussi $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} a_i 2^{i-k-} = E\left(2^{k-1}x\right)$ et donc

$$\alpha_k(x) = E\left(2^k x\right) - 2E\left(2^{k-1}x\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i 2^{i-k} - 2\sum_{i=1}^{k-1} a_i 2^{i-k-1} = \sum_{i=1}^{k} a_i 2^{i-k} - \sum_{i=1}^{k-1} a_i 2^{i-k} = a_k 2^{k-k} = a_k.$$

Ainsi, la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est nécessairement la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$. Ceci montre l'unicité de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

On a montré que tout réel $x \in [0,1[$ admet un développement dyadique propre et un seul.

XII.7. Programme Python.

```python
def dev_dyadique(x,n) :
    L=''
    for i in range (1,n+1) :
        d=int(floor(2*x))
        L=L+str(d)
        x=2*x-d
    return L
```

XIII. D'après ce qui précède, tout réel de $[0,1]$ est limite d'une suite convergente de nombres dyadiques de $[0,1]$. Donc $D_2 \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$. Soit x un réel quelconque. $x - E(x)$ est un réel de $[0,1[$ et donc il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres dyadiques, convergente, de limite $x - E(x)$. Mais alors, $(E(x) + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres dyadiques, convergente, de limite x. Ceci montre que D_2 est dense dans $\mathbb{R}$.

XIV. D'après la question VII., $D_2 \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q}$ et donc $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}\setminus D_2$ puis $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{R}\setminus D_2}$ et finalement, $\overline{\mathbb{R}\setminus D_2} = \mathbb{R}$. Ceci montre que $\mathbb{R}\setminus D_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.

XV.1. $1 - x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-a_k}{2^k}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 - a_k \in \{0,1\}$. Donc, « le » développement dyadique de $1-x$ est $\overline{0, a'_1 a'_2 a'_3 \dots}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a'_k = 1 - a_k$.

XV.2. Puisque $2x \in [0,1[$ (ou encore $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$), $a_1 = E(2x) - 2E(x) = 0 - 0 = 0$ puis $x = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$. Mais alors,

$$2x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{k-1}} = \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{a_{k'+1}}{2^{k'}} = \overline{0, a_2 a_3 a_4 \dots}$$

Ainsi, si $x = \overline{0, 0a_2 a_3 a_4 \dots}$, alors $2x = \overline{0, a_2 a_3 a_4 \dots}$.

Plus généralement, soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^\ell x \in [0,1[$. $2^\ell x \in [0,1[\Leftrightarrow x \in \left[0, \dfrac{1}{2^\ell}\right[$. Dans ce cas, pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$, $2^k x \in \left[0, \dfrac{2^k}{2^\ell}\right[\subset [0,1[$ et donc $E\left(2^k x\right) = 0$. On en déduit que pour tout $k \in [\![1,\ell]\!]$, $a_k = 0$ et donc que

$$x = \overline{0, 0\dots 0 a_{\ell+1} a_{\ell+2} \dots} = \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}.$$

Mais alors,

$$2^\ell x = \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{k-\ell}} = \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{a_{k'+\ell}}{2^{k'}} = \overline{0, a_{\ell+1} a_{\ell+2} a_{\ell+3} \dots}$$

Si maintenant ℓ est un entier strictement négatif, on pose $\ell' = -\ell$ et $x' = 2^\ell x$ de sorte que $x = 2^{-\ell} x' = 2^{\ell'} x$. En appliquant ce qui précède à x' et ℓ', on obtient

$$2^\ell x = \overline{0,\underbrace{0\dots0}_{-\ell}a_1a_2a_0\dots}$$

XV.3. On a vu que $\dfrac{1}{3} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{2k}} = \overline{0,010101\dots}$. Que l'on applique la question XV.1. ou la question XV.2., on obtient $\dfrac{2}{3} = \overline{0,101010\dots}$.

Partie E : suite extraite de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

XVI.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}c_{n+1} + c_{n-1} &= \cos((n+1)\pi\theta) + \cos((n-1)\pi\theta) = 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi\theta + (n-1)\pi\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\pi\theta - (n-1)\pi\theta}{2}\right)\\ &= 2\cos(n\pi\theta)\cos(\pi\theta) = 2c_n\cos(\pi\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}c_{n+1} - c_{n-1} &= \cos((n+1)\pi\theta) - \cos((n-1)\pi\theta) = -2\sin\left(\frac{(n+1)\pi\theta + (n-1)\pi\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\pi\theta - (n-1)\pi\theta}{2}\right)\\ &= -2\sin(n\pi\theta)\sin(\pi\theta) = -2s_n\sin(\pi\theta).\end{aligned}$$

Enfin,

$$c_n^2 + s_n^2 = \cos^2(n\pi\theta) + \sin^2(n\pi\theta) = 1.$$

XVI.2. Si $\theta \in 2\mathbb{Z}$, on peut poser $\theta = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \cos(2nk\pi) = 1$ et donc la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.

Réciproquement, supposons que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons c sa limite. La première relation fournit quand n tend vers $+\infty$, $c + c = 2c\cos(\pi\theta)$ puis $2(1-\cos(\pi\theta))c = 0$ et donc $c = 0$ ou $\cos(\pi\theta) = 1$. $\cos(\pi\theta) = 1$ fournit $\theta \in 2\mathbb{Z}$. Sinon, $c = 0$ et donc, d'après la 3ème relation, la suite $\left(s_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1 - c^2 = 1$. On élève au carré les deux membres de la deuxième égalité et on fait tendre n vers $+\infty$. On obtient $(0-0)^2 = -2\times 1\times\sin(\pi\theta)$ puis $\sin(\pi\theta) = 0$ et encore une fois, $\theta \in 2\mathbb{Z}$. Ainsi, si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\theta \in 2\mathbb{Z}$.

Finalement, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\theta \in 2\mathbb{Z}$.

XVII.1. Par hypothèse, il existe $a \in \mathbb{N}^*$ (car $\theta > 0$) et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\theta = \dfrac{a}{2^p}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = c_{2^n} = \cos\left(2^n\pi\frac{a}{2^p}\right) = \cos\left(2^{n-p}a\pi\right).$$

Pour $n \geqslant p+1$, $2^{n-p}a$ est un entier naturel pair et donc $u_n = 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente, de limite 1.

XVII.2. Il existe $a \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\theta = \dfrac{a}{2^p} + \dfrac{1}{3}$. Pour $n \geqslant p+1$,

$$u_n = \cos\left(2^n\left(\frac{a}{2^p} + \frac{1}{3}\right)\pi\right) = \cos\left(\frac{2^n\pi}{3}\right).$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2^{2k-1} \equiv 2\ [6]$ et $2^{2k} \equiv 4\ [6]$.

- C'est vrai quand $k = 1$.
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $2^{2k-1} \equiv 2\ [6]$ et $2^{2k} \equiv 4\ [6]$. Alors, modulo 6, $2^{2k+1} = 2\times 2^{2k}$ est congru à 8 et donc à 2 puis $2^{2k+2} = 2\times 2^{2k+1}$ est congru à 4.

On a montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2^{2k-1} \equiv 2\ [6]$ et $2^{2k} \equiv 4\ [6]$.

Puisque $n \geqslant p+1 \geqslant 1$, ou bien il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $2^n = 2+6K$ et dans ce cas, $u_n = \cos\left(\dfrac{2^n\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2K\pi\right) = -\dfrac{1}{2}$, ou bien il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $2^n = 4+6K$ et dans ce cas, $u_n = \cos\left(\dfrac{2^n\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2K\pi\right) = -\dfrac{1}{2}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang et donc convergente, de limite $-\dfrac{1}{2}$.

XVII.3. Il existe $a \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\theta = \dfrac{a}{2^p} + \dfrac{2}{3}$. Pour $n \geqslant p+1$, $u_n = \cos\left(\dfrac{2^{n+1}\pi}{3}\right)$. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, convergente de limite $-\dfrac{1}{2}$.

XVII.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = \cos\left(2^{n+1}\pi\theta\right) = \cos\left(2 \times 2^n\pi\theta\right) = 2\cos^2\left(2^n\pi\theta\right) - 1 = 2u_n^2 - 1$.

XVII.5. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ, par continuité de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et donc en ℓ,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(2u_n^2 - 1\right) = 2\ell^2 - 1$$

et donc ℓ est solution de l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$. Donc, $\ell \in \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

XVII.6. $\theta - E(\theta)$ est un réel de $[0,1[$ et donc $\theta - E(\theta)$ admet un développement dyadique propre et un seul. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}2^n\theta &= 2^nE(\theta) + 2^n\left(\theta - E(\theta)\right) = 2^nE(\theta) + 2^n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{2^k}\\ &= 2^nE(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1}a_k2^{n-k} + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{a_k}{2^{k-n}}.\end{aligned}$$

On pose $k_n = 2^{n-1}E(\theta) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k2^{n-k-1}$. k_n est un entier naturel et

$$2^n\theta = 2k_n + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{a_k}{2^{k-n}}.$$

On pose alors $\varepsilon_n = \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{a_k}{2^{k-n}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{1}{2^{k-n}} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Si $n = 1$, on prend $k_1 = E(\theta)$. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tels que

$$2^n\theta = 2k_n + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n.$$

XVII.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Supposons $a_n = a_{n+1}$. Alors, $u_n = \cos\left(2^n\pi\theta\right) = \cos\left(\dfrac{3a_n\pi}{2} + \varepsilon_n\pi + 2k_n\pi\right) = \cos\left(\dfrac{3a_n\pi}{2} + \varepsilon_n\pi\right)$.

Si de plus, $a_n = a_{n+1} = 0$, $u_n = \cos(\varepsilon\pi) \geqslant 0$ car $\varepsilon_n\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et si $a_n = a_{n+1} = 1$, $u_n = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \varepsilon\pi\right) = \sin(\varepsilon\pi) \geqslant 0$ car $\varepsilon\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• Si $a_n = 0$ et $a_{n+1} = 1$, alors $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_n\pi\right) = -\sin(\varepsilon_n\pi) \leqslant 0$ et si $a_n = 1$ et $a_{n+1} = 0$, $u_n = \cos(\pi + \varepsilon_n\pi) = -\cos(\varepsilon_n\pi) \leqslant 0$.

On a montré que si $a_n = a_{n+1}$, alors $u_n \geqslant 0$ et si $a_n \neq a_{n+1}$, alors $u_n \leqslant 0$. Par contraposition, si $u_n < 0$ alors $a_n \neq a_{n+1}$ et si $u_n > 0$, alors $a_n = a_{n+1}$.

XVII.8. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 d'après la question XVII.4..
Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$ et donc $a_n = a_{n+1}$.

Mais alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = a_{n_0}$. On ne peut avoir $a_{n_0} = 1$ car la suite a est une suite dyadique propre. Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = 0$. Ceci montre que $\theta - E(\theta)$ est un nombre dyadique puis que θ est un nombre dyadique.

XVII.9. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$ d'après la question XVII.4.. Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < 0$ et donc $a_n \neq a_{n+1}$.

Mais alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_0+2k} = a_{n_0}$ et $a_{n_0+2k+1} = 1 - a_{n_0}$ ou encore, ou bien pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_0+2k} = 0$ et $a_{n_0+2k+1} = 1$, ou bien pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_0+2k} = 1$ et $a_{n_0+2k+1} = 0$.

Puisque $\dfrac{1}{3} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2k}} = \overline{0,010101\ldots}$ et $\dfrac{2}{3} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2k-1}} = \overline{101010\ldots}$, suivant la parité de n_0, l'un des deux réels $\theta - E(\theta) - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - E(\theta) - \dfrac{2}{3}$ est une somme du type $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} \dfrac{a'_k}{2^k}$ où, pour tout $k \in [\![1, n_0]\!]$, $a'_k \in \{-1, 0, 1\}$. Mais alors, l'un des deux réels $\theta - E(\theta) - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - E(\theta) - \dfrac{2}{3}$ est un nombre dyadique, car quotient d'un entier relatif par 2^{n_0}, puis l'un des deux réels $\theta - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - \dfrac{2}{3}$ est un nombre dyadique

XVIII. D'après la question XVII.4., si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers 1 ou $-\dfrac{1}{2}$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, d'après la question XVII.8., θ est un nombre dyadique. Réciproquement, si θ est un nombre dyadique, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 d'après la question XVII.1..
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$, d'après la question XVII.9., $\theta - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - \dfrac{2}{3}$ est un nombre dyadique. Réciproquement, si $\theta - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - \dfrac{2}{3}$ est un nombre dyadique, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$ d'après les question XVII.2. et XVII.3..

En résumé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si θ ou $\theta - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - \dfrac{2}{3}$ est un nombre dyadique.

