SESSION 1997

T P E

FILIERE MP

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES. 2 ème épreuve

Question préliminaire

Quand n tend vers $+\infty$,

$$a_n = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2}).$$

Par suite, la série de terme général $a_n = b_{n+1} - b_n$ est absolument convergente et donc convergente. On en déduit que la suite (b_n) converge et donc que la suite $(n^\alpha u_n) = (e^{b_n})$ converge vers un réel strictement positif K. On a montré que

$$\boxed{\exists K > 0/\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}.}$$

Première partie

1) a) Soit x réel fixé non dans $\mathbb{Z}^-$. La suite $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, décroisante et positive à partir d'un certain rang (pour $n > -x$) et tend vers 0. Donc la série proposée converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Ainsi, la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge simplement sur E.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans E (et donc soit inclus dans $]0,+\infty[$, soit dans un intervalle de la forme $]-(p+1),-p[$ où p est un entier naturel).

Pour n entier naturel donné strictement supérieur à $-a$ et x réel élément $[a,b]$, posons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}$. x étant fixé, la suite numérique $\left(\dfrac{1}{k+x}\right)_{k\geq n+1}$ est décroissante (car $n+1 > -a$) et d'après une majoration classique du reste d'ordre n d'une série alternée, on a

$$\forall n > -a,\ \forall x \in [a,b],\ |R_n(x)| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}\right| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1+a}.$$

On en déduit encore que

$$\forall n > -a,\ \sup\{|R_n(x)|,\ x \in [a,b]\} \leq \frac{1}{n+1+a}.$$

Comme $\dfrac{1}{n+1+a}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de la suite $(\sup\{|R_n(x)|,\ x\in[a,b]\})_{n>-a}$. Ainsi, la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment inclus dans E ou encore la série de teme général f_n converge uniformément vers sa somme sur tout segment inclus dans E.

Comme chaque fonction f_n est continue sur tout segment inclus dans E, g est continue sur tout segment inclus dans E en tant que limite uniforme sur un tel segment d'une suite de fonctions continues sur ce segment et finalement

$$\boxed{g \text{ est continue sur } E.}$$

b) Soit $x \in E$. Tout d'abord la suite $\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)_{n\geq 1}$ est définie.
Soit maintenant $[a, b]$ un segment inclus dans E. Pour $n > -a$ et $x \in [a, b]$,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right| = \frac{|x|}{n|n+x|} = \frac{|x|}{n(n+x)} \leq \frac{\mathrm{Max}(|a|, |b|)}{n(n+a)}.$$

Comme la série de terme général $\dfrac{\mathrm{Max}(|a|, |b|)}{n(n+a)}$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ est normalement convergente sur tout segment inclus dans E et par suite uniformément et simplement convergente sur tout segment inclus dans E.

Puisque chaque fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ est continue sur E, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ est continue sur tout segment de E et donc sur E en tant que limite uniforme sur tout segment inclus dans E d'une suite de fonctions continues sur E. Enfin, comme la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est continue sur E,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } E.}$$

2) Soit $x \in E$. Tout d'abord $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x+1}{2}$ sont dans E (car si $\dfrac{x}{2} = k \in \mathbb{Z}^-$ ou $\dfrac{x+1}{2} = k \in \mathbb{Z}^-$ alors $x = 2k \in \mathbb{Z}^-$ ou $x = 2k-1 \in \mathbb{Z}^-$). De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1+x}\right) + \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+x} - \frac{1}{2n+1+x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+x} - \frac{1}{2n+1+x}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{2n}}{2n+x} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = g(x),
\end{aligned}$$

(puisque la série de somme g converge , on peut associer deux à deux les termes de cette série).

$$\boxed{\forall x \in E,\ g(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right).}$$

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
f(x+1) - f(x) &= -\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right) + \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right)\\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right)\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{N+x+1}\right)\\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ f(x+1) = \frac{1}{x} + f(x).}$$

Soit $x \in E$ fixé.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) + o(1) \\
&= \ln n - \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+x} + o(1) = \ln n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x} + o(1) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x}\right).
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x}\right).}$$

3) Soient $[a, b]$ un segment inclus dans E et r un naturel non nul.

• Tout d'abord, chaque fonction $f_n\ :\ x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ est de classe C^∞ sur $[a, b]$.

• Ensuite, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[a, b]$ vers la fonction $x \mapsto f(x) + \gamma + \frac{1}{x}$.

• Vérifions alors que chacune des séries de fonctions de terme général $f_n^{(r)}$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.
Pour $x \in [a, b]$ et $n > -a$,

$$|f_n^{(r)}(x)| = \left|-\frac{(-1)^r r!}{(n+x)^{r+1}}\right| = \frac{r!}{(n+x)^{r+1}} \leq \frac{r!}{(n+a)^{r+1}}.$$

et donc

$$\sup\{|f_n^{(r)}(x)|,\ x \in [a, b]\} \leq \frac{r!}{(n+a)^{r+1}}.$$

Puisque $r + 1 \geq 2$, la série numérique de terme général $\frac{r!}{(n+a)^{r+1}}$ est convergente. Par suite, la série de fonctions de terme général $f_n^{(r)}$ est normalement et donc uniformément convergente sur $[a, b]$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction $x \mapsto f(x) + \gamma + \frac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $[a, b]$ et il en est de même de f. f étant de classe C^∞ sur tout segment contenu dans E, f est de classe C^∞ sur E et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } E \text{ et } \forall x \in E,\ \forall r \in \mathbb{N}^*,\ f^{(r)}(x) = (-1)^{r+1} r! \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{r+1}}.}$$

Maintenant, chaque série de fonctions de terme général $x \mapsto \frac{(-1)^{r+1} r!}{(n+x)^{r+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[1, +\infty[$ car les majorations précédentes ne font intervenir que la borne infèrieure a de $[a, b]$. De plus, pour chaque entier naturel r et chaque entier naturel n, la fonction $x \mapsto \frac{(-1)^{r+1} r!}{(n+x)^{r+1}}$ a une limite réelle $\ell_{n,r} = 0$ quand x tend vers $+\infty$.
Le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que chaque fonction $f^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}^*$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(r)}(x) = (-1)^{r+1} r! \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \ell_{n,r} = 0.$$

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to+\infty} f^{(r)}(x) = 0.}$$

4) Soit $x\in]0,+\infty[$.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{x+k}-\ln\left(1+\frac{1}{k+x}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}-\sum_{k=0}^{n}(\ln(k+1+x)-\ln(k+x))=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}-\ln(n+1+x)+\ln x$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}(\ln n-f(x))-\ln(n+1+x)+\ln x+o(1)\ (\text{d'après 2)})$$
$$=h(x)-\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)+o(1)=h(x)+o(1).$$

Ainsi, pour tout réel strictement positif x, la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n+x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n+x}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, converge vers $h(x)$.

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\ln\left(1+\frac{1}{n+x}\right)\right).}$$

Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n(x)=\dfrac{1}{n+x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n+x}\right)$.

$$v_n(x)=\frac{1}{n+x}-(\ln(n+x+1)-\ln(n+x))=\frac{1}{n+x}-\int_{x+n}^{x+n+1}\frac{1}{t}\,dt=\int_{n+x}^{n+x+1}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{t}\right)\,dt$$
$$=\left[(t-(n+x+1))\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{t}\right)\right]_{n+x}^{n+x+1}-\int_{n+x}^{n+x+1}\frac{t-(n+x+1)}{t^2}\,dt=\int_{n+x}^{n+x+1}\frac{(n+x+1)-t}{t^2}\,dt.$$

Donc, pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq v_n(x)\leq\int_{n+x}^{n+x+1}\frac{1}{t^2}\,dt\leq\frac{1}{(n+x)^2}\leq\frac{1}{n^2},$$

et donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sup\{|v_n(x),\ x\in]0,+\infty[\}\leq\frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions de terme général v_n, $n\in\mathbb{N}^*$ converge normalement et donc uniformément sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème d'interversion des limites,

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x+1})\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+n}-\ln(1+\frac{1}{x+n})\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}0=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}h(x)=0.}$$

5) a) Il s'agit, d'après la question 3), de vérifier que pour $x\in]1,+\infty[$,

$$h(x)=\ln x-f(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}f^{(k-1)}(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}(-1)^k(k-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^k}=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(n+x)^k}\right).$$

Pour cela, vérifions tout d'abord la sommabilité de la suite double $w_{n,k}=\dfrac{(-1)^k}{k(n+x)^k}$, $k\geq 2$, $n\geq 0$ (pour $x>1$ fixé).

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in]1,+\infty[$ fixés.

$$\sum_{k=2}^{+\infty}|w_{n,k}|=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(n+x)^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(n+x)^k}-\frac{1}{n+x}$$
$$=-\ln\left(1-\frac{1}{n+x}\right)-\frac{1}{n+x}\ (\text{car }-1<\frac{1}{n+x}<1).$$

Ensuite,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} |w_{n,k}| = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+x}\right) - \frac{1}{n+x} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général $\sum_{k=2}^{+\infty} |w_{n,k}||w_{n,k}|$, $n \in \mathbb{N}$ converge et donc pour tout réel $x > 1$ la suite double $(w_{n,k})_{k\geq 2, n\geq 0}$ est sommable.

D'après le théorème de Fubini,

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(n+x)^k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(n+x)^k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(n+x)^k}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+x}\right)\right) = h(x).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x > 1,\ \ln x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!}.}$$

b) Soient $n \geq 2$ et $x \in]1, +\infty[$,

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^n}\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^n}.$$

Maintenant, pour $x > 1$ fixé, la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^n}\right)_{n\geq 2}$ décroît (puisque $x > 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+x} \in]0, 1[$ et chaque suite $n \mapsto \frac{1}{(k+x)^n}$ est décroissante) et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la série de terme général $\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!}$, $n \geq 2$ converge).

D'après une majoration classique du reste d'ordre n d'une série alternée, pour $n \geq 2$ et $x > 1$, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!}\right| \leq \left|\frac{f^{(n)}(x)}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^{n+1}}$$
$$\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6n}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup\left\{\left|\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!}\right|,\ x \in]1, +\infty[\right\} \leq \frac{\pi^2}{6n},$$

et donc $\sup\left\{\left|\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!}\right|,\ x \in]1, +\infty[\right\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } \frac{f^{(n-1)}}{n!} \text{ converge uniformément sur }]1, +\infty[.}$$

6) a) Soit $x > 0$. D'après 2)

$$\begin{aligned}
h(x) - h(2x) &= \ln x - f(x) - \ln(2x) + f(2x) \\
&= -\ln 2 + \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(2n-1) - \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k+2x}\right) - \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x}\right) \\
&= -\ln 2 + \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x} - \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k+2x}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2x} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1+2x}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+2x} - \frac{1}{2k+1+2x}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{1}{k+2x}\right) \\
&= g(2x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall x > 0,\ h(x) - h(2x) = g(2x).}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(h(2^k x) - h(2^{k+1}x)) + h(2^n x) = \sum_{k=0}^{n-1} g(2^{k+1}x) + h(2^n x)\sum_{k=1}^{n} g(2^k x) + h(2^n x).$$

Or , d'après la fin de 4), $\lim_{n\to+\infty}(h(2^n x)) = 0$ (car $x > 0$). Donc la série de terme général $g(2^k x)$ converge et de plus

$$\boxed{\forall x > 0,\ h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(2^n x).}$$

Soient $\alpha > 0$, $x \in [\alpha, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|g(2^n x)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+2^n x}\right|$. n et x étant fixés, la suite $\left(\frac{1}{k+2^n x}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la somme de la série alternée précédente est majorée en valeur absolue par la valeur absolue de son premier terme. Donc

$$|g(2^n x)| \leq \frac{1}{2^n x} \leq \frac{1}{2^n \alpha}.$$

Ainsi

$$\sup\{|g(2^n x)|,\ x \in [\alpha, +\infty[\} \leq \frac{1}{2^n \alpha}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{2^n \alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge, la série de fonctions de terme général $x \mapsto g(2^n x)$, $n \geq 1$, converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$ vers h et ceci pour tout réel strictement positif α.

Deuxième partie

1) a) Soit $x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$.
La fonction $u\ :\ t \mapsto \frac{1-t^x}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$ et donc localement intégrable sur $]0,1[$.

• Quand t tend vers 0, $u(t) \sim \begin{cases} -t^x \text{ si } x \in]-1,0[\\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$. Si $x > 0$, u est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur un voisinage de 0 à droite et si $-1 < x < 0$, la fonction $t \mapsto -t^x$ est de signe constant sur un voisinage de 0 à droite et intégrable sur un voisinage de 0 à droite de sorte que u est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• Quand t tend vers 1,

$$u(t) = \frac{e^{x\ln t} - 1}{t-1} \sim \frac{x\ln t}{t-1} \sim x,$$

Ainsi, u se prolonge par continuité en 1 à gauche et est donc intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0[\cup]0+\infty[, \text{ la fonction } t \mapsto \frac{1-t^x}{1-t} \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$$

b) Soient $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{1-t^x}{1-t} = (1-t^x)\sum_{k=0}^{n} t^k + (1-t^x)\frac{t^{n+1}}{1-t} = \sum_{k=0}^{n}(t^k - t^{k+x}) + \frac{1-t^x}{1-t}t^{n+1}.$$

Au vu de l'intégrabilité des fonctions considérées, on obtient alors

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (t^k - t^{k+x})\,dt + \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}t^n\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1}\right) + \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}t^n\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) + \int_0^1 \frac{t-t^{x+1}}{1-t}t^{n-1}\,dt. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $x+1>0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t-t^{x+1}}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 0 et en 1.

Cette fonction est en paticulier bornée sur $]0,1[$. Soit alors M un majorant de la fonction $t \mapsto \left|\dfrac{t-t^{x+1}}{1-t}\right|$ sur $]0,1[$.

Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$\left|\int_0^1 \frac{t-t^{x+1}}{1-t}t^{n-1}\,dt\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{t-t^{x+1}}{1-t}t^{n-1}\right|\,dt \leq \int_0^1 Mt^{n-1}\,dt = \frac{M}{n}.$$

Comme $\dfrac{M}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-t^{x+1}}{1-t}t^{n-1}\,dt$. On en déduit que

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = f(x) + \gamma + \frac{1}{x}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\},\ J(x) = f(x) + \gamma + \frac{1}{x}.}$$

2) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}x^k}{n^{k+1}}\right| &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{|x|}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \times \frac{|x|}{n} \times \frac{1}{1-\frac{|x|}{n}} \text{ (car } \frac{|x|}{n} < 1) \\ &= \frac{|x|}{n(n-|x|)}. \end{aligned}$$

De plus, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{|x|}{n(n-|x|)} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}x^k}{n^{k+1}}\right|$, $n \geq 1$, est convergente.

On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite double } \left(\frac{(-1)^{k+1}x^k}{n^{k+1}}\right)_{n\geq 1,\ k\geq 1} \text{ est sommable.}}$$

b) D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}x^k\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{n^{k+1}}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{x}{n}\right)^k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\times -\frac{x}{n}\times\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\\ &= J(x) \text{ (d'après 1)b)).}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ J(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k.}$$

3) a) Soit $x\in]-1,1[$. Pour $t\in]0,1[$,

$$\frac{1-t^x}{1-t} = \frac{1}{1-t}(1-e^{x\ln t}) = \frac{1}{1-t}\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n\ln^n t}{n!}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^n t}{1-t}\frac{x^n}{n!}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $j_n\ :\ t\mapsto -\dfrac{\ln^n t}{1-t}\dfrac{x^n}{n!}$ est continue sur $]0,1[$, négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ quand tend vers 0 par valeurs supérieures et prolongeable par continuité en 1 à gauche. Donc la fonction j_n est intégrable sur $]0,1[$ et chaque intégrale I_n, $n\in\mathbb{N}^*$, existe.

Vérifiions maintenant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,1[}|j_n|<+\infty$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

La fonction $t\mapsto\dfrac{|\ln t|}{1-t}$ est continue sur $[\dfrac{1}{2},1[$, se prolonge par continuité en 1 et est donc bornée sur $[\dfrac{1}{2},1[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $[\dfrac{1}{2},1[$. On alors

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{|\ln t|^n}{1-t}\,dt &= \int_0^{1/2}\frac{|\ln t|^n}{1-t}\,dt+\int_{1/2}^1\frac{|\ln t|^n}{1-t}\,dt \leq 2\int_0^{1/2}|\ln t|^n\,dt+M\int_{1/2}^1|\ln t|^{n-1}\,dt\\ &\leq 2\int_0^1(-\ln t)^n\,dt+M\int_0^1(-\ln t)^{n-1}\,dt.\end{aligned}$$

Maintenant, en posant $u=-\ln t$, on obtient

$$\int_0^1(-\ln t)^n\,dt = \int_{+\infty}^0 u^n\times -e^{-u}\,du = \int_0^{+\infty}u^ne^{-u}\,du = \Gamma(n+1) = n!.$$

Par suite,

$$\int_0^1|j_n|\leq(2n!+M(n-1)!)\frac{|x|^n}{n!}\leq(M+2)|x|^n.$$

Puisque $|x|<1$, la série de terme général $(M+2)|x|^n$ converge et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,1[}|j_n|<+\infty$.

En résumé,

- chaque fonction j_n est continue et intégrable sur $]0,1[$,

• la série de fonction de terme général j_n converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $t \mapsto \dfrac{1-t^x}{1-t}$ qui est continue sur $]0,1[$,

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,1[} |j_n| < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$J(x) = \int_0^1 \left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n t}{1-t} \frac{x^n}{n!} \right) \, dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\ln^n t}{1-t} \, dt \right) \frac{x^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ J(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n.}$$

b) D'après la question 2)b) et par unicité des coefficients d'une série entière, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ -\frac{I_n}{n!} = (-1)^{n+1} \zeta(n+1),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n = (-1)^n n! \zeta(n+1).}$$

4) a) En posant $t = 1-u$, on obtient pour $x > -1$

$$J(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} \, dt = \int_1^0 \frac{1-(1-u)^x}{1-(1-u)} \, - du = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u} \, du.$$

$$\boxed{\forall x > -1, \ J(x) = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u} \, du.}$$

b) Pour $u \in]0,1[$ et $x > -1$, on a

$$\frac{1-(1-u)^x}{u} = \frac{1}{u} \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n} (-u)^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{x}{n} u^{n-1}.$$

Etudions alors la nature de la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 \left|(-1)^{n-1} \binom{x}{n} u^{n-1}\right| \, du = \frac{1}{n} \left| \binom{x}{n} \right|$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$, posons $u_n = \dfrac{1}{n} \left| \dbinom{x}{n} \right|$ (l'égalité est immédiate pour $x = 0$).

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{|x(x-1)\dots(x-(n-1))(x-n)|}{|x(x-1)\dots(x-(n-1))|} = \frac{n(n-x)}{(n+1)^2} \text{ pour } n \text{ suffisament grand.}$$

Mais alors, quand n tend vers $+\infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{x}{n}\right) (1 + \frac{1}{n})^{-2} = \left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) = 1 - \frac{x+2}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

D'après la question préliminaire, il existe une constante réelle strictement positive K (dépendant de x) telle que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{K}{n^{x+2}}.$$

Puisque $x+2 > 1$, la série de terme général u_n converge. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$\boxed{\forall x > -1, \ J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{x}{n}.}$$

c) Soit $x \in]-1,1[$. $\sigma(n,n) = 1$ et plus généralement, pour $1 \leq k \leq n$, $\sigma(n,k) = (-1)^{n-k}|\sigma(n,k)|$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} \sigma(n,k) x^k \right| = \frac{1}{n \times n!} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{n-k} \sigma(n,k) |x|^k = \frac{(-1)^n}{n \times n!} \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma(n,k)(-|x|)^k = \frac{(-1)^n}{n} \binom{-|x|}{n}.$$

Puis, comme $-|x| > -1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} \sigma(n,k) x^k \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \binom{-|x|}{n} = -J(-|x|) < +\infty,$$

et la suite double de l'énoncé est sommable pour $x \in]-1;1[$.
d) Le théorème de Fubini fournit alors pour x dans $]-1,1[$

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{x}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma(n,k) x^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} \sigma(n,k) \right) x^k \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière et d'après 3) b)

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (-1)^{k+1} \zeta(k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} \sigma(n,k).}$$

