MINISTÈRE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT, DES TRANSPORTS ET DE LA MER

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

E.I.T.P.E. 1991

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$; $\mathbf{O}_n$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n$ et $\mathbf{I}_n$ sa matrice unité.

Pour $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{M}_n$, $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, on définit sa trace $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ symétriques.

On considère d'autre part l'espace $\mathbb{R}^n$ identifié selon l'usage à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique défini par: $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = {}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ où, selon l'usage on note de la même façon l'élément $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et la matrice unicolonne: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et on notera $\|\mathbf{X}\| = (\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle)^{1/2}$.

Enfin, pour $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n$, on note $Q_{\mathbf{A}}$ et $B_{\mathbf{A}}$ les applications définies par: $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = {}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$, $B_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = {}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}$, pour $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Première partie

1. Rappeler brièvement pourquoi $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et en préciser la dimension.

2. Montrer que la relation définie sur $\mathcal{S}_n$ par:
$\mathbf{M} \leq \mathbf{N}$ si et seulement si pour tout $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ on a: ${}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X} \leq {}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}$
est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.
3. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n$. Montrer que l'ensemble $\{{}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \ / \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{X}\| = 1\}$ est borné, et déterminer son maximum et son minimum en fonction des valeurs propres de $\mathbf{A}$.
4. Pour $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n$, on note $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \sup \{|{}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}| \ / \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{X}\| = 1\}$.
   (i) Pour $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{S}_n$, soit $\mathrm{Sp}(\mathbf{A})$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$, et $\rho(\mathbf{A})$ le maximum des valeurs absolues des éléments de $\mathrm{Sp}(\mathbf{A})$. Montrer que $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A})$.
   (ii) Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{S}_n$.
   (iii) Montrer que pour $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{S}_n$ on a pour tous $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$:
$$|B_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| \leq \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cdot \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|$$
   (iv) En déduire que: $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \max \{ |B_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| \ / \ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \ \|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}\| = 1 \}$.
   (v) Montrer que pour $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{S}_n$ et tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathbf{A}^k$ est dans $\mathcal{S}_n$ et qu'on a: $\mathcal{N}(\mathbf{A}^k) = [\mathcal{N}(\mathbf{A})]^k$.
   (vi) Montrer que pour $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{S}_n$ et r dans $\mathbb{R}_+$, on a:
$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \leq r \iff -r \cdot \mathbf{I}_n \leq \mathbf{A} \leq r \cdot \mathbf{I}_n$$
   ($\leq$ désigne la relation d'ordre définie en **2.**)

5. Pour $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n$, on pose $\mathcal{N}'(\mathbf{M}) = \mathrm{Sup} \{ \|\mathbf{M} \cdot \mathbf{X}\| \ / \ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \ \|\mathbf{X}\| = 1 \}$.
   (i) Justifier brièvement que $\mathcal{N}'$, ainsi définie, est une norme sur $\mathcal{M}_n$ telle que pour toutes $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ dans $\mathcal{M}_n$ on a: $\mathcal{N}'(\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}) \leq \mathcal{N}'(\mathbf{M}) \cdot \mathcal{N}'(\mathbf{N})$.
   (ii) Pour $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n$, prouver que $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$ est dans $\mathcal{S}_n$ et $\mathbf{O}_n \leq \mathbf{A}$. Montrer que $\mathbf{M}$ et $\mathbf{A}$ ont le même rang, et comparer $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ et $\mathcal{N}'(\mathbf{M})$.

6. Soit $(\mathbf{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n$, croissante: c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a: $\mathbf{A}_k \leq \mathbf{A}_{k+1}$. Montrer qu'une telle suite converge dans $\mathcal{M}_n$ (muni d'une norme à préciser), si et seulement si, il existe $\mathbf{M}$ dans $\mathcal{S}_n$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $\mathbf{A}_k \leq \mathbf{M}$, la limite de cette suite étant alors dans $\mathcal{S}_n$.

7. Soient $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{S}_n$, $r = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, et x dans $\mathbb{R}$.
   (i) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} x^k \cdot \mathbf{A}^k$ converge dans $\mathcal{S}_n$ (normé également par une norme à préciser), si et seulement si $|r \cdot x| < 1$.

Tournez la page S.V.P.

(ii) Dans le cas où cette série converge, on note $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}(x)$ sa somme; prouver alors que $(\mathbf{I}_n - x \cdot \mathbf{A})$ est inversible et préciser son inverse en fonction de $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}(x)$.
Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ sera noté $P_{\mathbf{A}}$.

Montrer que $\operatorname{tr}(\mathbf{S}_{\mathbf{A}}(x)) = \sum_{k \geq 0} \operatorname{tr}(\mathbf{A}^k) x^k = \frac{1}{x} \frac{P'_{\mathbf{A}}\left(\frac{1}{x}\right)}{P_{\mathbf{A}}\left(\frac{1}{x}\right)}$, si x est différent de 0. Quelle est la valeur de $\operatorname{tr}(\mathbf{S}_{\mathbf{A}}(0))$?

(iii) Application: soient a et b dans $\mathbb{R}$, expliciter $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}(x)$ pour $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n$, où pour tous i et j dans $\{1, \ldots, n\}$: $a_{i,i} = a$ et pour $i \neq j$ $a_{i,j} = b$.
Les calculs seront effectués en posant $\alpha = a - b$ et $\beta = a + (n-1) \cdot b$. On exprimera $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}(x)$ en fonction de x, α, β, $\mathbf{I}_n$, $\mathbf{A}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on s'interesse à des propriétés particulières des matrices des sous-ensembles de $\mathcal{S}_n$, notées $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$, définis par:

$$\mathcal{S}_n^+ = \{\mathbf{M} \in \mathcal{S}_n \ / \ \mathbf{O}_n \leq \mathbf{M}\} \text{ (toujours avec } \leq \text{ définie dans 2.)}$$
$$\mathcal{S}_n^{++} = \{\mathbf{M} \in \mathcal{S}_n^+ \ / \ (\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n), (\mathbf{X} \neq \mathbf{O} \Rightarrow {}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X} > 0)\}$$

8. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n$, et $\operatorname{Sp}(\mathbf{A})$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$.
(i) Montrer que: $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}_+$.
(ii) Montrer que: $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}_+^*$.

9. Soit $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{M}_n$.
(i) Montrer que $\mathbf{A}$ est dans $\mathcal{S}_n^+$ si et seulement si il existe $\mathbf{M}$ dans $\mathcal{M}_n$ telle que $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$.
(ii) Montrer que $\mathbf{A}$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si il existe $\mathbf{M}$ dans $\mathcal{M}_n$, avec $\det(\mathbf{M}) \neq 0$, telle que $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$.

10. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ dans $\mathcal{S}_n^+$.
(i) Montrer que $\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}') \geq 0$, et, lorsque $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont dans $\mathcal{S}_n^{++}$, alors $\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}') > 0$.
(Pour les questions *(ii)* et *(iii)* qui suivent, on distinguera les cas $\det(\mathbf{A}) = 0$ et $\det(\mathbf{A}) > 0$, et, dans ce dernier cas, on pourra avoir recours à une base orthonormale pour le produit scalaire défini par $\mathbf{A}$.)
(ii) On suppose que $\mathbf{A} \leq \mathbf{A}'$, montrer que $\det(\mathbf{A}) \leq \det(\mathbf{A}')$.
(iii) Montrer qu'en général $\det(\mathbf{A} + \mathbf{A}') \geq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}')$. Préciser dans quel cas on a égalité.

11. On considère $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ et $\mathbf{U} = (u_{i,j})$ tous les deux dans $\mathcal{S}_n^+$. On définit $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_n$ de la manière suivante: pour tous i, j le coefficient d'indice (i,j) de $\mathbf{C}$ vaut: $c_{i,j} = a_{i,j} \cdot u_{i,j}$.

Montrer que $\mathbf{C} \in \mathcal{S}_n^+$, et que dans le cas où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{U}$ sont dans $\mathcal{S}_n^{++}$ alors $\mathbf{C}$ est aussi dans $\mathcal{S}_n^{++}$. (On pourra encore utiliser une base convenable.)

12. Soit $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{S}_n^+$ et k dans $\mathbb{N}^*$; montrer qu'il existe une unique matrice $\mathbf{B}$ dans $\mathcal{S}_n^+$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^k$.

13. Soit $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{S}_n^+$ telle que $\mathbf{A} \leq \mathbf{I}_n$. On définit la suite $(\mathbf{M}_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{O}_n \qquad \text{et pour } k \in \mathbb{N}, \mathbf{M}_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{M}_k^2).$$

Montrer que $(\mathbf{M}_k)$ converge vers une certaine matrice $\mathbf{L}$ de $\mathcal{S}_n^+$ telle que $\mathbf{L} \leq \mathbf{I}_n$ et vérifiant: $(\mathbf{I}_n - \mathbf{L})^2 = \mathbf{A}$.
(On pourra encore choisir une base convenable.)

14. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans $\mathcal{S}_n^+$, et soit $\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
(i) Montrer que $\mathbf{M}$ a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$.
(ii) Montrer que si de plus $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n^{++}$ alors $\mathbf{M}$ est diagonalisable.

FIN