SESSION 1991

T P E

FILIERE M

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES.

Première partie

1)) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA\end{array}$. φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le sous-espace des invariants est $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ car une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n} \cup (E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.

2) • Réflexivité. $\forall M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \leqslant {}^tXMX$ et donc $\forall M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $M \leqslant M$. Ceci montre que $\leqslant$ est reflexive.

• Transitivité. Soit $(M,N,P) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^3$. Si $M \leqslant N$ et $N \leqslant P$ alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \leqslant {}^tXNX$ et ${}^tXNX \leqslant {}^tXPX$. Mais alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \leqslant {}^tXPX$ et donc $M \leqslant P$.
Ainsi, $\forall (M,N,P) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^3$, $(M \leqslant N \text{ et } N \leqslant P \Rightarrow M \leqslant P)$. Ceci montre que $\leqslant$ est transitive.

• Antisymétrie. Soit $(M,N) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$. Si $M \leqslant N$ et $N \leqslant M$ alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(R)$, ${}^tXMX \leqslant {}^tXNX$ et ${}^tXNX \leqslant {}^tXMX$ ce qui fournit $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = 0$ où $A = M - N$.
La forme quadratique Q_A est nulle. Donc sa partie polaire B_A est nulle puis sa matrice dans la base canonique A est nulle. On en déduit que $M = N$.
Ainsi, $\forall (M,N) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2$, $(M \leqslant N \text{ et } N \leqslant M \Rightarrow M = N)$. Ceci montre que $\leqslant$ est antisymétrique.

$$\boxed{\leqslant \text{ est une relation d'ordre sur } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

3)Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème spectral, les valeurs propres de A sont réelles et A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.
Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) contituée de vecteurs propres de A puis $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des valeurs propres associées, la numérotation ayant été faite de telle sorte que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$$\begin{aligned}{}^tXAX = \langle X, AX\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{ (car la base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée).}\end{aligned}$$

Mais alors

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n \|X\|^2$$

et de même ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1 \|X\|^2$. En résumé

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda_1 \|X\|^2 \leqslant {}^tXAX \leqslant \lambda_n \|X\|^2.$$

Ainsi, pour tout vecteur colonne X tel que $\|X\| = 1$, on a $\lambda_1 \leqslant {}^tXAX \leqslant \lambda_n$ ce qui montre déjà que l ?ensemble considéré est borné et que λ_1 et λ_n sont respectivement un minorant et un majorant de cet ensemble.
De plus, si $X = e_1$, alors $\|X\| = 1$ et ${}^tXAX = \lambda_1$ et si $X = e_n$, alors $\|X\| = 1$ et ${}^tXAX = \lambda_n$. Ceci montre que λ_1 et λ_n sont respectivement le minimum et le maximum de l'ensemble considéré.

$$\boxed{\text{Min}\{{}^t XAX,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \|X\| = 1\} = \lambda_1 \text{ et Max}\{{}^t XAX,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \|X\| = 1\} = \lambda_n,}$$

où λ_1 et λ_n sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A.

4) i) D'après la question 3), |tXAX| ; X ?Mn,1(R) et ||X|| = 1 admet un maximum à savoir

$$\text{Max}\{|{}^t XAX|,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \|X\| = 1\} = \text{Max}\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\} = \text{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\} = \rho(A).$$

Donc

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ N(A) = \rho(A).}$$

ii) • N est une application de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$.
• Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Si $N(A) = 0$ alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et donc $A = 0$ puisque A est diagonalisable.
• Soient $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}$. On sait que $\text{Sp}(kA) = k\text{Sp}(A)$. Par suite $N(kA) = \rho(kA) = |k|\rho(A) = |k|N(A)$.
• Soit $(A, B) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2$. Pour tout vecteur colonne X tel que $\|X\| = 1$, on a

$$|{}^t X(A + B)X| = |{}^t XAX + {}^t XBX| \leqslant |{}^t XAX| + |{}^t XBX| \leqslant N(A) + N(B).$$

Le nombre $N(A) + N(B)$ est donc un majorant de $\{|{}^t X(A + B)X|/\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$. Puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, on en déduit que $N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$.

Finalement,

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

iii) Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^n$. Avec les notations de la question 3)

$$B_A(X, Y) = {}^t XAY = \langle X, AY\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

Par suite,

$$|B_A(X, Y)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i||x_i||y_i| \leqslant \rho(A) \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leqslant \rho(A)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

et donc $|B_A(X, Y)| \leqslant N(A)\|X\|\|Y\|$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ |B_A(X, Y)| \leqslant N(A)\|X\|\|Y\|.}$$

iv) D ?après iii), si $\|X\| = \|Y\| = 1$, $|B_A(X, Y)|$?$N(A)$ avec égalité effectivement obtenue en prenant X et Y tous deux égaux à un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Donc

$$\boxed{N(A) = \text{Max}\{|B_A(X, Y)|/\ (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|X\| = \|Y\| = 1\}.}$$

v) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On sait que si $\text{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $\text{Sp}(A^k) = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$. Par suite,

$$\begin{aligned} N(A^k) &= \text{Max}\{|\lambda_1|^k, ..., |\lambda_n|^k\} = (\text{Max}\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|\})^k \text{ par croissance de } x \mapsto x^k \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ &= (N(A))^k. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ N(A^k) = (N(A))^k.}$$

vi) Soient $r \in \mathbb{R}^+$ et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} N(A) \leqslant r &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ [\|X\| = 1 \Rightarrow |{}^t XAX| \leqslant r] \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ [\|X\| = 1 \Rightarrow -r \leqslant {}^t XAX \leqslant r] \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ -r \leqslant \frac{{}^t X}{\|X\|} A \frac{{}^t X}{\|X\|} \leqslant r \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ -r\|X\|^2 \leqslant {}^t XAX \leqslant r\|X\|^2 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^t X(-rI_n)X \leqslant {}^t XAX \leqslant {}^t X(rI_n)X \Leftrightarrow -rI_n \leqslant A \leqslant rI_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}^+, \forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), N(A) \leqslant r \Leftrightarrow -rI_n \leqslant A \leqslant rI_n.}$$

5) i) • Soit $M \in \mathcal{M}_n$. Vérifions l'existence de $\text{Sup}\{\|MX\|/\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$.

1ère solution. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|MX\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2.$$

Ainsi, $\{\|MX\|/\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et donc $\{\|MX\|/\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$ admet une borne supèrieure dans $\mathbb{R}$.

2ème solution. L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\\ X & \mapsto & \|MX\|\end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ car composée de l'application $X \mapsto MX$ qui est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie et de l'application $Y \mapsto \|Y\|$ qui est connue pour être continue sur $\mathbb{R}^n$.
Cette application est donc bornée sur le compact $K = \{X \in \mathbb{R}^n/\ \|X\| = 1\}$. Ceci redémontre l'existence de $\text{Sup}\{\|MX\|/\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$.

• N' est donc une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.
• Si $N'(A) = 0$, pour tout vecteur unitaire X, on a $AX = 0$. En particulier, A s'annule sur une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et on en déduit que A est nulle.
• $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n$, $N'(\lambda A) = |\lambda|N'(A)$.
• Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$,

$$\|(A + B)X\| = \|AX + BX\| \leqslant \|AX\| + \|BX\| \leqslant N'(A) + N'(B)$$

et donc $N'(A + B) \leqslant N'(A) + N'(B)$.

$$\boxed{\text{N? est une norme sur } \mathcal{M}_n.}$$

Montrons enfin que pour toutes matrices M et N on a $N'(MN) \leqslant N'(M)N'(N)$. Pour cela, on constate que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| \leqslant N'(A)\|X\|$. En effet, c'est clair pour $X = 0$ et pour $X \neq 0$, par définition de N',

$$\|AX\| = \left\|A\frac{X}{\|X\|}\right\|\|X\| \leqslant N'(A)\|X\|.$$

Soit alors $(M, N) \in (\mathcal{M}_n$. Pour tout vecteur colonne X tel que $\|X\| = 1$,

$$\|ABX\| \leqslant N'(A)\|BX\| \leqslant N'(A)N'(B)\|X\| = N'(A)N'(B),$$

et puisque $N'(AB)$ est le plus petit des majorants de $\{\|ABX\|/\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$, on a montré que $N'(AB) \leqslant N'(A)N'(B)$.

$$\boxed{\forall(M, N) \in (\mathcal{M}_n)^2,\ N'(MN) \leqslant N'(M)N'(N).}$$

ii) Soient $M \in \mathcal{M}_n$ puis $A = {}^tMM$.
• ${}^tA = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM = A$. Donc A est dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
• Soit X un élément de $\mathbb{R}^n$. ${}^tXAX = {}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geqslant 0$. Donc $A \geqslant 0_n$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n,\ {}^tMM \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tMM \geqslant 0_n.}$$

Montrons que $\text{Ker}A = \text{Ker}M$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$.

$X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tM(MX) = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}A$,
$X \in \text{Ker}A \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M$.

Donc $\text{Ker}A = \text{Ker}M$. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\text{rg}(A) = \text{rg}(M)$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n,\ \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(M).}$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$.

$$|{}^tXAX| = |{}^tX{}^tMMX| = \|MX\|^2,$$

et par croissance et continuité de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $N(A) = (N'(M))^2$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n,\ N({}^tMM) = (N'(M))^2.}$$

6) Supposons que la suite (A_k) d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A. Puisque $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$ (muni d'une norme quelconque). A est donc un élément de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Pour ceux qui n'ont pas encore les résultats de topologie, si on pose $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$a_{i,j} = \lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} a_{j,i}^{(k)} = a_{j,i}.$$

Ceci redémontre que la matrice A est symétrique.

Supposons que la suite (A_k) d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$ soit croissante et converge vers $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrons que A majore la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Puisque la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour k fixé on a

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXA_kX \leqslant {}^tXA_{k+l}X$$

et quand l tend vers $+\infty$, on obtient $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXA_kX \leqslant {}^tXAX$ (le passage à la limite quand l tend vers $+\infty$ peut se justifier, pour ceux qui ont déjà les résultats de topologie, en constatant que l'application $X \mapsto {}^tXMX$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ en tant que forme quadratique et pour ceux qui n'ont pas encore les résultats de topologie en explicitant ${}^tXA_{k+l}X$).

Réciproquement, supposons que la suite de matrices symétriques $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit croissante et majorée par une matrice $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Pour X vecteur colonne fixé, la suite réelle $({}^tXA_kX)_{k\in\mathbb{N}} = (Q_{A_k}(X))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. On en déduit que cette suite converge dans $\mathbb{R}$.
Mais alors pour X et Y vecteurs colonnes fixés, la suite réelle $(B_{A_k}(X,Y))_{k\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{4}(Q_{A_k}(X+Y))_{k\in\mathbb{N}} - \dfrac{1}{4}(Q_{A_k}(X-Y))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Si maintenant on note e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, pour tout couple (i,j) d'indices, la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = ({}^te_iA_ke_j)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et finalement la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice A, nécessairement symétrique d'après la remarque initiale.

7) i) • Soit x un réel tel que $|xr| < 1$.
Pour tout entier naturel k, d'après la question 4)a), $N(x^kA^k) = |x|^kN(A^k) = (|x|N(A))^k = |xr|^k$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.
La série de terme général x^kA^k converge absolument et donc converge puisque $\mathcal{M}_n$ est complet en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

• Réciproquement , si la série de terme général x^kA^k, $k \in \mathbb{N}$, converge alors, pour tout vecteur colonne X, la série de terme général x^kA^kX converge. En prenant en particulier pour X est un vecteur propre de A associé à une certaine valeur propre (réelle) λ, on obtient la convergence de la série géoémétrique de terme général $x^k\lambda^k$, $k \in \mathbb{N}$. Donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $|\lambda x| < 1$ et en particulier $|xr| < 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{la série de terme général } x^kA^k,\ k \in \mathbb{N},\ \text{converge si et seulement si } |xr| < 1.}$$

ii) Si $r = 0$, alors $A = 0$ puis, pour tout réel x, $SA(x) = I_n$.
Supposons dorénavant $r > 0$. La série de terme général x^kA^k converge si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$.
Pour un tel réel x, $\mathrm{Sp}(S_A(x)) = (1-\lambda_ix)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (en posant $\mathrm{Sp}A = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Maintenant, pour tout λ élément du spectre de A, $1-\lambda x \geqslant 1-|\lambda x| \geqslant 1-|rx| > 0$. Donc $\mathrm{Sp}(S_A(x)) \subset]0,+\infty[$ et en particulier $S_A(x) \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[,\ S_A(x) \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

L'application $M \mapsto M(I_n - xA)$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n$ et est donc continu sur cet espace (pour n'importe quelle norme). Par continuité de cette application, pour $x \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$,

$$\begin{aligned} S_A(x)(I_n - xA) &= \left(\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} x^kA^k\right)(I_n - xA) = \lim_{p\to+\infty}\left(\left(\sum_{k=0}^{p} x^kA^k\right)(I_n - xA)\right) \\ &= \lim_{p\to+\infty}(I_n - x^{p+1}A^{p+1}) = I_n, \end{aligned}$$

($x^{p+1}A^{p+1}$ tend vers la matrice nulle quand p tend vers $+\infty$ car $x^{p+1}A^{p+1}$ est le terme général d'une série convergente). Ainsi la matrice $I_n - xA$ est inversible à gauche et donc inversible et de plus

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[,\ (I_n - xA)^{-1} = S_A(x).}$$

Par continuité et linéarité de la trace, on a pour $x \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[\setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(S_A(x)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \lambda_i^k\right) \text{ (somme de } n \text{ séries convergentes)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i x} = \frac{1}{x}\sum_{i}^{n} \frac{1}{\frac{1}{x}-\lambda_i} = \frac{P_A'\left(\frac{1}{x}\right)}{xP_A\left(\frac{1}{x}\right)}.
\end{aligned}$$

(puisque $P_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, il est connu que $\dfrac{P_A'}{P_A} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{X-\lambda_i}$).

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[\setminus \{0\},\ \mathrm{Tr}(S_A(x)) = \frac{P_A'\left(\frac{1}{x}\right)}{xP_A\left(\frac{1}{x}\right)}.}$$

D'autre part, $\mathrm{Tr}(S_A(0)) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$.

iii) Soit $J_n = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors $J_n^2 = nJ_n$ et comme $A = (a-b)I_n + bJ_n$, on a

$$(A-(a-b)I_n))^2 = b^2J_n^2 = nbbJ_n = nb(A-(a-b)I_n),$$

et donc

$$A^2 - (2a+(n-2)b)A + (a-b)(a+(n-1)b)I_n = 0.$$

ou encore en posant $\alpha = a-b$ et $\beta = a+(n-1)b$,

$$\boxed{A^2 - (\alpha+\beta)A + \alpha\beta I_n = 0.}$$

Le polynôme $P = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = (X-\alpha)(X-\beta)$ est annulateur de A et on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\alpha, \beta\}$. On note alors que $\mathrm{rg}(A-\alpha I_n) = \mathrm{rg}(bJ_n)$. Maintenant, la matrice A est symétrique réelle et donc est diagonalisable. On en déduit que

1er cas. Si $b = 0$, alors $A = aI_n$ puis $\mathrm{Sp}(A) = (a, \dots, a)$ et $N(A) = |a|$ puis pour $|x| < \dfrac{1}{|a|}$ (ou $+\infty$ si $a = 0$), $S_A(x) = \dfrac{1}{1-xa}I_n$.

2ème cas. Si $b \neq 0$, α est valeur propre d'ordre $n-1$ et donc β est valeur propre d'ordre 1. $N(A) = \mathrm{Max}\{|\alpha|, |\beta|\} = \mathrm{Max}\{|a-b|, |a+(n-1)b|\}$.

Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ si $r > 0$ et $]-\infty, +\infty[$ si $r = 0$. Pour calculer $S_A(x)$, il faut déterminer $(I_n - xA)^{-1}$.

Soient y et z deux réels.

$$\begin{aligned}
(I_n - xA)(yI_n + zA) &= yI_n + (z-xy)A - xzA^2 = yI_n + (z-xy)A - xz((\alpha+\beta)A - \alpha\beta I_n) \\
&= (y - \alpha\beta xz)I_n + (-xy + z(1-x(\alpha+\beta))A.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(I_n - xA)(yI_n + zA) \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} y - \alpha\beta xz = 1 \\ -xy + z(1-x(\alpha+\beta)) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha\beta x \\ 0 & 1-x(\alpha+\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha\beta x \\ -x & 1-x(\alpha+\beta) \end{vmatrix}} \text{ et } z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha\beta x \\ -x & 1-x(\alpha+\beta) \end{vmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-x(\alpha+\beta)}{1-x(\alpha+\beta)+\alpha\beta x^2} \text{ et } z = \frac{x}{1-x(\alpha+\beta)+\alpha\beta x^2}$$

$$\boxed{S_A(x) = (I_n - xA)^{-1} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}(xA + (1 - x(\alpha+\beta))I_n).}$$

Deuxième partie

8) i) et (ii) • Si A est symétrique positive (resp. définie positive), d'après le théorème spectral, ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une valeur propre de A et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$^tX(AX) = \lambda\, ^tXX = \lambda\|X\|^2,$$

et donc $\lambda\|X\|^2 \geqslant 0$ (resp. > 0). Puisque $\|X\|^2 > 0$, on en déduit que $\lambda \geqslant 0$ (resp. > 0). Donc si A est symétrique positive (resp. définie positive), $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$ (resp. $]0, +\infty[$).

• Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \subset [0, +\infty[^n$ (resp. $]0, +\infty[^n$). On sait que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle à valeurs propres positives (resp. strictement positives). Soient $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $D_n^{++}(\mathbb{R})$) telles que $A = PD\,^tP$. Pour Y vecteur colonne donné non nul,

$$^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0 \text{ (resp. } > 0)$$

et donc pour X vecteur colonne non nul donné

$$^tXAX = \,^tXPD\,^tPX = \,^t(^tPX)D(^tPX) \geqslant 0 \text{ (resp. } > 0)$$

car ^tP est inversible et donc $X \neq 0 \Rightarrow \,^tPX \neq 0$.
Donc si $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$ (resp. $]0, +\infty[$), A est positive (resp. définie positive)

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ (A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[\text{ et } (A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[.}$$

9) (i) et (ii). D'après I.5) (ii), pour M élément de $\mathcal{M}_n$ donné, la matrice $A = \,^tMM$ est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus si M est inversible, la matrice A l'est aussi et donc ses valeurs propres sont positives et non nulles ou encore $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$. Dans ce cas, $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Réciproquement , soit A une matrice symétrique positive. D'après 8), il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = PD\,^tP$. Soit $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors

$$A = PD\,^tP = PD'^2\,^tP = \,^t(D'\,^tP)D'\,^tP.$$

La matrice $M = D'\,^tP$ est une matrice carrée telle que $A = \,^tMM$. Si de plus A est définie positive, 0 n'est pas valeur propre de et donc A puis M sont inversibles.
En résumé

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n,\ (A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_n/\ A = \,^tMM \text{ et } (A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists M \in GL_n(\mathbb{R})/\ A = \,^tMM.}$$

10) i) Avec les notations des questions 8) et 9),

$$\mathrm{Tr}(AA') = \mathrm{Tr}(^tMM\,^tM'M') = \mathrm{Tr}(M\,^tM'M'\,^tM)$$

La matrice $M\,^tM'M'\,^tM$ est symétrique car $^t(M\,^tM'M'\,^tM) = \,^t(^tM)\,^tM'\,^t(^tM')\,^tM = M\,^tM'M'\,^tM$.
De plus, d'après la question 9), la matrice $M\,^tM'M'\,^tM = \,^t(M'\,^tM)(M'\,^tM)$ est positive. Ses valeurs propres sont des réels positifs d'après la question 8). Sa trace étant la somme de ses valeurs propres, on a montré que $\mathrm{Tr}(AA')$ est un réel positif.

Si de plus A et A' sont dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, les matrices M et M' sont inversibles et il en est de même de la matrice $M'\,^tM$. D'après la question 9), les valeurs propres de de la matrice $M\,^tM'M'\,^tM$ sont des réels strictement positifs et donc $\mathrm{Tr}(AA') > 0$.

ii) Si $\det(A) = 0$, puisque la matrice A' est à valeurs propres réelles positives et que $\det(A')$ est le produit de ces valeurs propres, on a bien $\det(A) \leqslant \det(A')$.

Sinon $\det(A) > 0$ et il existe M élément de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \,^tMM$.

$$\det(A) \leqslant \det(A') \Leftrightarrow \det(A'A^{-1}) \geqslant 1 \Leftrightarrow \det(A'M^{-1}\,^tM^{-1}) \geqslant 1 \Leftrightarrow \det(^tM^{-1}A'M^{-1}) \geqslant 1.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
A \leqslant A' &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^t(MX)MX = {}^tX{}^tMMX \leqslant {}^tXA'X = {}^t(MX){}^tM^{-1}A'M^{-1}(MX)\\
&\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^tYY \leqslant {}^tY{}^tM^{-1}A'M^{-1}Y \text{ (car } M \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et donc } X \mapsto MX \text{ est une permutation de } \mathbb{R}^n)\\
&\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^tY({}^tM^{-1}A'M^{-1} - I_n)Y \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow {}^tM^{-1}A'M^{-1} - I_n \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{Sp}({}^tM^{-1}A'M^{-1} - I_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ (car } {}^tM^{-1}A'M^{-1} - I_n \text{ est symétrique)}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Sp}({}^tM^{-1}A'M^{-1}) \subset [1, +\infty[.
\end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice ${}^tM^{-1}A'M^{-1}$ est donc le produit de réels tous supérieurs à 1 et on en déduit que $\det({}^tM^{-1}A'M^{-1}) \geqslant 1$ puis que $\det(A) \leqslant \det(A')$.

iii) Si $\det(A) = 0$, puisque $A + A' \geqslant A'$ (car $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX(A + A')X = {}^tXAX + {}^tXA'X \geqslant {}^tXA'X$), alors d'après ii) $\det(A + A') \geqslant \det(A') = \det(A) + \det(A')$.

Si $\det(A) > 0$, on pose de nouveau $A = {}^tMM$ où M est une matrice inversible.

$$\begin{aligned}
\det(A + A') &= \det({}^tMM + A') = \det({}^tM(I_n + {}^tM^{-1}A'M^{-1})M)\\
&= \det({}^tM)\det(M)\det(I_n + {}^tM^{-1}A'M^{-1}) = \det(A)\det(I_n + {}^tM^{-1}A'M^{-1}).
\end{aligned}$$

En notant λ_1,..., λ_n les valeurs propres de la matrice symétrique positive ${}^tM^{-1}A'M^{-1}$ (car $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX({}^tM^{-1}A'M^{-1})X = {}^t(M^{-1}X)A'(M^{-1}X) \geqslant 0$), on a

$$\begin{aligned}
\det({}^tM^{-1}A'M^{-1}) &= (1 + \lambda_1)\dots(1 + \lambda_n)\\
&\geqslant 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det({}^tM^{-1}A'M^{-1}) = 1 + \det(M^{-1}{}^tM^{-1}A') = 1 + \det(A^{-1}A')
\end{aligned}$$

et donc, puisque $\det(A) > 0$, $\det(A + A') = \det(A)\det(I_n + {}^tM^{-1}A'M^{-1}) \geqslant \det(A)(1 + \det(A^{-1}A')) = \det(A) + \det(A')$.

$$\boxed{\forall (A, A') \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}))^2,\ \det(A + A') \geqslant \det(A) + \det(A').}$$

Cas d'égalité. Si $\det(A) > 0$ (ou si $\det(A') > 0$), on a l'égalité si et seulement si $\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) = 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ ou encore si et seulement si tous les λ_i sont nuls (puisque les λ_i sont positifs). Les λ_i sont tous nuls si et seulement si la matrice ${}^tM^{-1}A'M^{-1}$ est nulle (car la matrice ${}^tM^{-1}A'M^{-1}$ est symétrique réelle et donc diagonalisable) ou encore si et seulement si A' est nulle.
Si $\det(A) = 0$ et $\det(A') = 0$, on a l'égalité si et seulement si $\det(A + A') = 0$.

En résumé on a l'égalité si et seulement si l'une des deux matrices A ou A' est nulle ou aucune des trois matrices A, A' et $A + A'$ n'est inversible.

11) La matrice C est symétrique car les matrices A et U le sont. On écrit alors A sous la forme $A = PD{}^tP$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
{}^tXCX &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j}x_ix_ja_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j}x_ix_j\left(\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}\lambda_kp_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j}(p_{i,k}x_i)(p_{j,k}x_j)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k{}^tY_kUY_k
\end{aligned}$$

où $Yk = (p_{i,k}x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Maintenant, puisque les matrices A et U sont positives, tous les λ_k et les ${}^tY_kUY_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, sont positifs et donc ${}^tXCX$. En résumé, pour tout vecteur colonne X, on a ${}^tXCX \geqslant 0$ et donc la matrice C est symétrique positive.

Si de plus les matrices A et U sont définies positives, alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k > 0$ et, dans un premier temps, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, ${}^tY_kUY_k \geqslant 0$. Donc

$$\begin{aligned}
{}^tXCX = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\lambda_k{}^tY_kUY_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ {}^tY_kUY_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ Y_k = 0 \text{ (car la matrice } U \text{ est définie)}\\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ p_{i,k}x_i = 0 \quad (*).
\end{aligned}$$

Mais la matrice P est inversible et donc pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on peut choisir $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $p_{i,k} \neq 0$. Les conditions $(*)$ sont donc équivalentes à $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ ou encore à $X = 0$. On a montré que la matrice C est définie positive.

12) Existence. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. A est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On écrit encore une fois A sous la forme $A = PD{}^tP$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i) \in D_n^+(\mathbb{R})$.
Soit $\Delta = \text{diag}\left(\lambda_i^{1/k}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $B = P\Delta{}^tP$. Alors $\Delta^k = D$ et donc $B^k = A$. D'autre part, B est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs et donc $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Unicité. Soit M une matrice symétrique positive telle que $M^k = A$.
Soit λ une valeur propre (nécessairement réelle positive) de M. On sait que $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(A - \lambda^k I_n)$. De plus, l'application $x \mapsto x^k$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même et donc $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \lambda^k \neq \lambda'^k$.

Mais M est diagonalisable et donc $\mathbb{R}^n = \underset{\lambda \in \text{Sp}(M)}{\oplus} \text{Ker}(M - \lambda I_n)$. On en déduit que $\forall \lambda \in \text{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) = E_{\lambda^k}(A)$. Par suite, une base de vecteurs propres de A est encore une base de vecteurs propres de M ou encore la matrice ${}^tPMP$ est une matrice diagonale positive. Puisque ${}^tPMP$ est de puissance k-ème égale à D, on en déduit que ${}^tPMP = \Delta$ et finalement que $M = B$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists! B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})/\ A = B^k.}$$

13) Par récurrence, toutes les matrices M_k sont symétriques.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $0_n \leqslant M_k \leqslant I_n$.
• Puisque $M_0 = 0_n$, $0_n \leqslant M_0 \leqslant I_n$.
• (Rappel : $\forall (A, B) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2$, $A \leqslant B \Leftrightarrow B - A \geqslant 0_n$.) Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $0_n \leqslant M_k \leqslant I_n$. La matrice M_k^2 est positive (par exemple $M_k^2 = {}^tM_kM_k$) et donc

$$M_{k+1} = \frac{1}{2}(I_n - A + M_k^2) \geqslant \frac{1}{2}(I_n - A) \geqslant 0_n.$$

Ensuite, $I_n - M_{k+1} = \dfrac{1}{2}(I_n + A - M_k^2)$. Mais

$$\begin{aligned} 0_n \leqslant M_k \leqslant I_n &\Rightarrow -I_n \leqslant M_k \leqslant I_n \Rightarrow N(M_k) \leqslant 1 \text{ (d'après la question I.4)vi))} \\ &\Rightarrow N(M_k^2) \leqslant 1 \text{ (d'après la question I.4)v))} \\ &\Rightarrow -I_n \leqslant M_k^2 \leqslant I_n. \end{aligned}$$

Donc $I_n - M_{k+1} = \dfrac{1}{2}(I_n + A - M_k^2) \geqslant (I_n + A - I_n) \geqslant 0_n$.

On a montré par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0_n \leqslant M_k \leqslant I_n.$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k \leqslant M_{k+1}$.
• $M_1 = \dfrac{1}{2}(I_n - A) \geqslant 0_n = M_0$.
• Soit $k \in \mathbb{N}$. $M_{k+2} - M_{k+1} = \dfrac{1}{2}(M_{k+1}^2 - M_k^2)$.
Maintenant il est clair par récurrence que si ${}^tPAP = D$ où D est diagonale et P est orthogonale, ${}^tPM_kP$ est une matrice diagonale D_k (positive). Donc

$$\begin{aligned} M_k \leqslant M_{k+1} &\Rightarrow {}^tPM_kP \leqslant {}^tPM_{k+1}P \text{ (car } {}^tX{}^tPM_kPX = {}^t(PX)M_k(PX) \geqslant 0) \\ &\Rightarrow Dk \leqslant D_{k+1} \Rightarrow D_k^2 \leqslant D_{k+1}^2 \text{ (en analysant les valeurs propres par exemple)} \\ &\Rightarrow M_k^2 \leqslant M_{k+1}^2 \Rightarrow M_{k+1} \leqslant M_{k+2}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k \leqslant M_{k+1}$.

Ainsi, la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de matrices positives et majorée par I_n. D'après la question I.6), la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L symétrique positive et majorée par I_n.

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $L = \dfrac{1}{2}(I_n - A + L^2)$ et donc $(I_n - L)^2 = A$ ou enfin $L = I_n - \sqrt{A}$ d'après la question 12) et puisque la matrice $I_n - L$ est positive.

14) i) Soit $M \in \mathcal{M}_n$ telle que $A = {}^tMM$. La matrice $AB = {}^tM(MB)$ a même polynôme caractéristique que la matrice symétrique MB^tM et a donc toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$ (et même dans $\mathbb{R}^+$).

ii) Si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\sqrt{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on peut écrire

$$M = \sqrt{A}\sqrt{A}B = \sqrt{A}(\sqrt{A}B\sqrt{A})\sqrt{A}^{-1}.$$

La matrice M est donc semblable à la matrice $\sqrt{A}B\sqrt{A}$ qui est symétrique réelle et donc diagonalisable. On en déduit que la matrice M est diagonalisable.

