CONCOURS COMMUN 2010

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

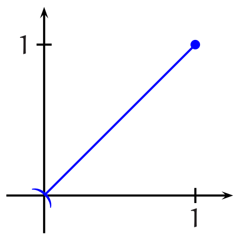
Epreuve de Mathématiques
(spécifique MPSI)

PROBLEME 1

Etude de courbes paramétrées

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^+$, on notera $\gamma_{a,b}$ le support de $\Gamma_{a,b}$.

1) Soit $a \geqslant 1$. $\gamma_{a,a} = \left\{\left(\dfrac{1}{1+t}, \dfrac{1}{1+t}\right),\ t \in \mathbb{R}^+\right\}$. $\gamma_{a,a}$ est contenu dans la droite D d'équation $y = x$. Plus précisément, la fonction $f_1\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{1+t^a}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. f_1 réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty}, f(0)] =]0,1]$. Ainsi, quand t décrit $[0,+\infty[$, $\dfrac{1}{1+t^a}$ décrit $]0,1]$ et donc $\gamma a, a = \{(x,x),\ 0 < x \leqslant 1\}$.



2) Soit $(a,b) \in ([1,+\infty[)^2$. On note s la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$.

$$\gamma_{a,b} = \{(f_a(t), f_b(t)),\ t \in [0,+\infty[\} = \{s(f_b(t), f_a(t)),\ t \in [0,+\infty[\} = s\left(\{(f_b(t), f_a(t)),\ t \in [0,+\infty[\}\right) = s(\gamma_{b,a}).$$

Les supports de $\Gamma_{a,b}$ et $\Gamma_{b,a}$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3) Soit $a \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto 1+t^a$ est positive et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et donc la fonction f_a est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

4) Soient a et b deux réels tels que $1 \leqslant a < b$. Pour $t > 0$,

$$f_a(t) + f_a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1+t^a} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{t^a}} = \frac{1}{1+t^a} + \frac{t^a}{1+t^a} = 1.$$

$$\boxed{\forall t > 0,\ f_a(t) + f_a\left(\frac{1}{t}\right) = 1.}$$

5) Par suite, pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{2}\left(F(t) + F\left(\dfrac{1}{t}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ ou encore $\forall t > 0$, le point $F\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est le symétrique du point $F(t)$ par rapport au point $F(t)$. Enfin, quand t décrit $]0,1[$, $\dfrac{1}{t}$ décrit $]1,+\infty[$ et donc la portion de $\gamma_{a,b}$ correspondant à $t > 1$ est la symétrique de la portion de $\gamma_{a,b}$ correspondant à $0 < t < 1$. En particulier

$$\boxed{\gamma_{a,b} \setminus \{(1,1)\} \text{ est symétrique par rapport au point } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).}$$

On peut noter que $(1,1) = F(0)$ est le symétrique de $(0,0) = F(+\infty)$.

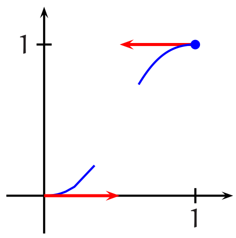
6) Tableau de variations conjointes.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	
x	1	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	

7) $F(0) = (1,1)$. Ensuite, pour $t \geqslant 0$, $F'(t) = \left(-\dfrac{at^{a-1}}{(1+t^a)^2}, -\dfrac{bt^{b-1}}{(1+t^b)^2}\right)$.

• Si $a = 1$, $F'(0) = (-1, 0)$ et la tangente au point $F(0) = (1,1)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i}$. Par symétrie par rapport au point $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, la tangente au point $F(+\infty) = (0,0)$ est aussi dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i}$.

• Supposons maintenant $1 < a < b$. Alors $F'(0) = (0,0)$ et donc le point $F(0)$ est un point singulier. Une étude supplémentaire est nécessaire. Pour $t > 0$, la droite $(F(0)F(t))$ est dirigée par le vecteur $\dfrac{1}{t^a}(F(0) - F(t)) = \dfrac{1}{t^a}\left(\dfrac{t^a}{1+t^a}, \dfrac{t^b}{1+t^b}\right) = \left(\dfrac{1}{1+t^a}, \dfrac{t^{b-a}}{1+t^b}\right)$. Quand t tend vers 0, ce vecteur tend vers le vecteur $(1,0) = \overrightarrow{i}$. Encore une fois, la tangente au point $F(0) = (1,1)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i}$ et par symétrie par rapport au point $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, la tangente au point $F(+\infty) = (0,0)$ est aussi dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i}$.



8) On pose $t = 1 + h$ ou encore $h = t - 1$ de sorte que t tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0. Quand t tend vers 1,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^a} &= \frac{1}{1+(1+h)^a} = \frac{1}{1+\left(1+ah+\dfrac{a(a-1)}{2}h^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{6}h^3+o(h^3)\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\dfrac{a}{2}h+\dfrac{a(a-1)}{4}h^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{12}h^3+o(h^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{a}{2}h+\frac{a(a-1)}{4}h^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{12}h^3\right)+\left(\frac{a}{2}h+\frac{a(a-1)}{4}h^2\right)^2-\left(\frac{a}{2}h\right)^3+o(h^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{a}{4}h+\frac{1}{2}\left(-\frac{a(a-1)}{4}+\frac{a^2}{4}\right)h^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{a(a-1)(a-2)}{12}+\frac{a^2(a-1)}{4}-\frac{a^3}{8}\right)h^3+o(h^3) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{a}{4}h+\frac{a}{8}h^2+\frac{-2(a-1)(a-2)+6a(a-1)-3a^2}{48}ah^3+o(h^3) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{a}{4}h+\frac{a}{8}h^2+\frac{a^2-4}{48}ah^3+o(h^3) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{a}{4}(t-1)+\frac{a}{8}(t-1)^2+\frac{a(a^2-4)}{48}(t-1)^3+o((t-1)^3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+t^a} \underset{t\to 1}{=} \frac{1}{2}-\frac{a}{4}(t-1)+\frac{a}{8}(t-1)^2+\frac{a(a^2-4)}{48}(t-1)^3+o((t-1)^3).}$$

9) Pour $t \in [0, +\infty[\setminus\{1\}$, la droite $(F(1)F(t))$ est dirigée par le vecteur $\dfrac{1}{t-1}(F(t) - F(1)) = \left(-\dfrac{a}{4} + o(1), -\dfrac{b}{4} + o(1)\right)$.

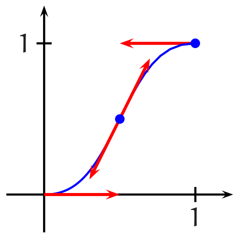
Quand t tend vers 1, ce vecteur tend vers le vecteur $\left(-\dfrac{a}{4}, -\dfrac{b}{4}\right) \neq (0,0)$ et donc la tangente au point $F(1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ est dirigée par le vecteur $\left(-\dfrac{a}{4}, -\dfrac{b}{4}\right)$ ou aussi par le vecteur (a, b). Une équation de cette tangente est $y = \dfrac{b}{a}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$.

La position relative de $\gamma_{a,b}$ par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $y(t) - \dfrac{b}{a}\left(x(t) - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}$. Or, quand t tend vers 1,

$$\begin{aligned}
y(t) - \frac{b}{a}\left(x(t) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{1+t^b} - \frac{1}{2}\right) - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{1+t^a} - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{b}{4}(t-1) + \frac{b}{8}(t-1)^2 + \frac{b(b^2-4)}{48}(t-1)^3 \\
&\quad - \frac{b}{a}\left(-\frac{a}{4}(t-1) + \frac{a}{8}(t-1)^2 + \frac{a(a^2-4)}{48}(t-1)^3\right) + o((t-1)^3) \\
&= \frac{b(b^2-4) - b(a^2-4)}{48}(t-1)^3 + o((t-1)^3) = \frac{b(b-a)(b+a)}{48}(t-1)^3 + o((t-1)^3)
\end{aligned}$$

Cette expression est localement du signe de $\dfrac{b(b^2-4) - b(a^2-4)}{48}(t-1)^3 + o((t-1)^3)$ et donc positive quand t est au voisinage de 1 à droite et négative quand t est au voisinage de 1 à gauche. En particulier, la courbe traverse sa tangente et le point $F(1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion.

10) Support de $\Gamma_{1,2}$.



Fonction définie par une intégrale

11) $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+1}\,dt = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(2)$ et $\varphi(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\varphi(0) = \frac{1}{2},\ \varphi(1) = \ln(2) \text{ et } \varphi(2) = \frac{\pi}{4}.}$$

12) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $x \leqslant y$.

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^y} - \frac{1}{1+t^x}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)}\,dt.$$

Maintenant, pour t dans $]0, 1]$, la fonction $u \mapsto t^u$ est décroissante sur $[0, 1]$ et donc $t^x - t^y \geqslant 0$ ce qui reste vrai quand $t = 0$. Ainsi, $\forall t \in [0, 1]$, $\dfrac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant 0$.

On a montré que $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2$, $(x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y))$ et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+.}$$

13) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $x \leqslant y$.

Pour tout réel $t \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{(1+t^x)(1+t^y)} \leqslant \dfrac{1}{(1+0)(1+0)} = 1$ et donc d'après la question précédente et par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi(y) - \varphi(x) &= \int_0^1 \frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)}\,dt \leqslant \int_0^1 (t^x - t^y)\,dt \\
&= \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} - \frac{t^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \\
&\leqslant \frac{y-x}{(1+0)(1+0)} = y - x.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ |\varphi(y)-\varphi(x)| \leqslant |y-x|.}$$

14) Par suite, la fonction φ est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+.}$$

15) Soit $x \geqslant 0$.

$$1-\varphi(x) = \int_0^1 1\ dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\ dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\ dt.$$

16) Soit $x \geqslant 0$. $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\ dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^x}{1+0}\ dt = \frac{1}{x+1}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\ dt = 0$ et donc que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1.}$$

17) Soit $x \geqslant 0$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^x}$ et $t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\varphi(x) = \int_0^1 1 \times \frac{1}{1+t^x}\ dt = \left[\frac{t}{1+t^x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-t(xt^{x-1})}{(1+t^x)^2}\ dt = \frac{1}{2} + x\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\ dt.$$

18) Soit $x > 0$. D'après la question précédente,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \frac{\varphi(x)-\frac{1}{2}}{x} = \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\ dt.$$

Maintenant,

$$\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\ dt - \int_0^1 \frac{t^0}{(1+t^0)^2}\ dt = \int_0^1 \frac{4t^x-(1+t^x)^2}{4(1+t^x)^2}\ dt = -\int_0^1 \frac{(t^x-1)^2}{(t^x+1)^2}\ dt.$$

et donc

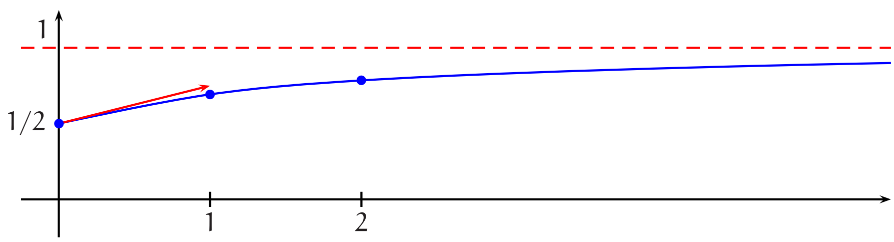
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\ dt - \frac{1}{4}\right| &= \int_0^1 \frac{(t^x-1)^2}{(t^x+1)^2}\ dt \leqslant \int_0^1 (t^x-1)^2\ dt = \int_0^1 \left(t^{2x}-2t^x+1\right) dt\\ &= \frac{1}{2x+1} - \frac{2}{x+1} + 1.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, cette dernière expression tend vers $1-2+1=0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\ dt = \frac{1}{4}$ et donc que

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = \frac{1}{4}.}$$

Par suite, le coefficient directeur de la demi-tangente au point d'abscisse 0 est $\dfrac{1}{4}$.

19) Allure de la courbe représentative de φ.



20) Soit $x > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^x)}{x}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,dt = \int_0^1 t\frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \left[t\frac{\ln(1+t^x)}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\ln(1+t^x)\,dt = \frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,dt,$$

et donc

$$\varphi(x) - 1 = -\frac{\ln 2}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,dt.$$

Vérifions alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,dt = 0$. Il est connu que $\forall u \geqslant 0$, $0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$ (inégalité de convexité). On en déduit que pour $x > 0$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^x)\,dt \leqslant \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,dt = 0$.
Ainsi, $\varphi(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{=} -\dfrac{\ln 2}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ou encore

$$\boxed{\varphi(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{x}.}$$

PROBLEME 2

Théorème de Fermat

21) Soient p un nombre premier et k un entier naturel tels que $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Alors

$$k\binom{p}{k} = p\frac{p!}{k!(p-k)!} = p\frac{(p-1)!}{(k-1)!((p-1)-(k-1))!} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

Par suite, l'entier p divise l'entier $p\dbinom{p-1}{k-1} = k\dbinom{p}{k}$. Puisque $1 \leqslant k \leqslant p-1$ et que p est premier, les entiers k et p sont premiers entre eux (un diviseur commun à k et p étant un diviseur de p strictement plus petit que p). Le théorème de Gauss permet d'affirmer que $p|\dbinom{p}{k}$.

22) Soit $p \in \mathscr{P}$. Montrons par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N}$, $p|(a^p - a)$.

- C'est vrai pour $a = 0$ car $a^p - a = 0$.
- Soit $a \geqslant 0$. Supposons que $p|(a^p - a)$. Alors $(a+1)^p - (a+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k = (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k$. Par hypothèse de récurrence, $p|(a^p - a)$ et d'après la question précédente, $p|\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k$. Par suite, $p|((a+1)^p - (a+1))$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p \in \mathscr{P},\ \forall a \in \mathbb{N},\ p|(a^p - a).}$$

23) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall p \in \mathscr{P}$, $p|\det(M^p)$. Alors, pour $p \in \mathscr{P}$, $p|\det(M^p) = (\det(M))^p$ et d'autre part, d'après la question précédente, $p|\left((\det(M))^p - \det(M)\right)$. Par suite, $\forall p \in \mathscr{P}$, $p|\left((\det(M))^p - \left((\det(M))^p - \det(M)\right)\right) = \det(M)$. Ainsi, $\det M$ est un entier relatif divisible par tous les nombres premiers. On ne peut donc avoir $\det(M) = \pm 1$ et pas davantage $|\det(M)| \geqslant 2$ car un entier naturel supérieur ou égal à 2 a un nombre fini de diviseurs premiers. Il reste $\det(M) = 0$.

Réciproquement, si $\det(M) = 0$, alors $\forall p \in \mathscr{P}$, $\det(M^p) = (\det(M))^p = 0$ et donc $\forall p \in \mathscr{P}$, $p|\det(M^p)$.

Etude d'un ensemble de matrices

24) $\mathscr{A} = \{aE_{1,1} + b(E_{2,2} + E_{3,3}) + c(-E_{3,2} + E_{2,3}),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2} + E_{3,3}, -E_{3,2} + E_{2,3})$. Par suite, $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension au plus 3.

Montrons que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}+E_{3,3}, -E_{3,2}+E_{2,3})$ est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$aE_{1,1} + b(E_{2,2}+E_{3,3}) + c(-E_{3,2}+E_{2,3}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Par suite, la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}+E_{3,3}, -E_{3,2}+E_{2,3})$ est libre et donc cette famille est une base de $\mathscr{A}$. Finalement

$$\boxed{\mathscr{A} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ de dimension 3.}}$$

25) Montrons que $(\mathscr{A}, +, \times)$ est un sous-anneau commutatif de l'anneau $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$.
Il est déjà acquis que $(\mathscr{A}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), +)$. De plus, $\mathscr{A}$ contient I_3 (obtenue pour $a = b = 1$ et $c = 0$).
Il reste à vérifier que $\mathscr{A}$ est stable pour $\times$ et que deux éléments de $\mathscr{A}$ commutent.

Soient $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb'-cc' & bc'+cb' \\ 0 & -(bc'+cb') & bb'-cc' \end{pmatrix} \in \mathscr{A}.$$

Donc $\mathscr{A}$ est stable pour $\times$. De plus, le calcul ci-dessus montre que pour tout $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$,
$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$. Finalement

$$\boxed{(\mathscr{A}, +, \times) \text{ est un sous-anneau commutatif de l'anneau } (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), +, \times).}$$

26) M est dans $\mathscr{A}$ et donc M^2 est dans $\mathscr{A}$ d'après la question précédente. Par suite, (I_3, M, M^2) est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$ de cardinal $3 = \dim(\mathscr{A})$. Vérifions que cette famille est libre.
Tout d'abord, $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit alors $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$aI_3 + bM + cM^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2b+4c & 0 & 0 \\ 0 & a+b & b+2c \\ 0 & -b-2c & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-2b+4c = 0 \\ a+b = 0 \\ b+2c = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -b \\ c = -\dfrac{b}{2} \\ -b-2b-2b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc, la famille (I_3, M, M^2) est une famille libre d'éléments de $\mathscr{A}$ de cardinal $3 = \dim(\mathscr{A}) < +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la famille } (I_3, M, M^2) \text{ est une base de } \mathscr{A}.}$$

27) $M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2M - 4I_3.$

$$\boxed{M^3 = 2M - 4I_3.}$$

Etude d'une suite

28) I_3 et M est dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ est stable pour $\times$. Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, M^k est dans $\mathscr{A}$. On en déduit l'existence des suites (a_k), (b_k) et (c_k).

29) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$M^{k+1} = M^k \times M = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k - c_k & b_k + c_k \\ 0 & -b_k - c_k & b_k - c_k \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+1} = -2a_k \text{ et } b_{k+1} = b_k - c_k \text{ et } c_{k+1} = b_k + c_k.}$$

30) La suite (a_k) est géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $q = -2$. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = (-2)^k$.

31) Soit $k \in \mathbb{N}$. $z_{k+1} = b_{k+1}+ic_{k+1} = (b_k-c_k)+i(b_k+c_k) = (b_k+ic_k)+(-c_k+ib_k) = (b_k+ic_k)+i(b_k+ic_k) = (1+i)z_k$. Par suite, en tenant compte de $z_0 = b_0 + ic_0 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_k = (1+i)^k$ et finalement

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ b_k = \mathrm{Re}((1+i)^k).}$$

32) Pour $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2} = b_{k+1}-c_{k+1} = b_{k+1}-(b_k+c_k) = b_{k+1}-b_k+(b_{k+1}-b_k)$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2}-2b_{k+1}+2b_k = 0$. L'équation caractéristique associée à cette récurrence est $z^2 - 2z + 2 = 0$. Cette équation admet pour solution $1+i$ et $1-i$. Donc il existe deux complexes λ et μ tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$. Maintenant

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 = 1 \\ b_1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda+\mu = 1 \\ (1+i)\lambda + (1-i)\mu = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda+\mu = 1 \\ i(\lambda-\mu) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

On retrouve donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k = \dfrac{1}{2}((1+i)^k + (1-i)^k) = \mathrm{Re}((1+i)^k)$.

33) L'égalité $M^3 = 2M - 4I_3$ fournit pour $n \in \mathbb{N}$, $M^{n+3} = 2M^{n+1} - 4M^n$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(M^{n+3}) = 2\mathrm{Tr}(M^{n+1}) - 4\mathrm{Tr}(M^n)$ (par linéarité de la trace).

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Tr}(M^n)$.

• Pour $n = 0$, $\mathrm{Tr}(M^0) = 1+1+1 = 3 = u_0$, pour $n = 1$, $\mathrm{Tr}(M^1) = -2+1+1 = 0 = u_1$ et pour $n = 2$, $\mathrm{Tr}(M^2) = 4+0+0 = 4 = u_2$. Donc, l'égalité est vraie quand $n \in \{0, 1, 2\}$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = \mathrm{Tr}(M^n)$, $u_{n+1} = \mathrm{Tr}(M^{n+1})$ et $u_{n+2} = \mathrm{Tr}(M^{n+2})$. Alors

$$u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n = 2\mathrm{Tr}(M^{n+1}) - 4\mathrm{Tr}(M^n) = \mathrm{Tr}(M^{n+3}).$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{Tr}(M^n).}$$

34) D'après les questions 30 et 31, pour $p \in \mathscr{P}$,

$$u_p = a_p + 2b_p = (-2)^p + 2\mathrm{Re}((1+i)^p) = (-2)^p + 2\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{p}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k} = ((-2)^p - (-2)) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k}.$$

Maintenant, d'après la question 21, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{p}{2}$, $p|\dbinom{p}{k}$ (car $(p-1) - \dfrac{p}{2} = \dfrac{p-2}{2} \geqslant 0$).
Enfin, si $p \neq 2$, alors p est impair et donc $(-2)^p - (-2) = -(2^p - 2)$ de sorte $p|((-2)^p - (-2))$ d'après la question 21 et si $p = 2$, $(-2)^p - (-2) = 6$ et de nouveau $p|((-2)^p - (-2))$.

En résumé, p divise $(-2)^p - (-2)$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k}$ et donc p divise u_p.

$$\boxed{\forall p \in \mathscr{P},\ p|u_p.}$$

Etude d'un coefficient

35) On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En développant suivant la dernière ligne, on obtient

$$\det_{\mathscr{B}_0}\mathscr{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(2+1) + 2(1-4) = -9 \neq 0.$$

Donc,

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

36) $c(u) = (u(e_1)|e_1) + (u(e_2)|e_2) + (u(e_3)|e_3) = \lambda_1(e_1|e_1) + \lambda_2(e_2|e_2) + \lambda_3(e_3|e_3) = 6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3$.
Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^k) = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k)$ et par un calcul identique

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ c(u^k) = 6\lambda_1^k + 5\lambda_2^k + 6\lambda_3^k.}$$

37) Soit $p \in \mathscr{P}$. p divise $c(u^p) = 6\lambda_1^p + 5\lambda_2^p + 6\lambda_3^p$. D'autre part, d'après le petit théorème de FERMAT, p divise $6(\lambda_1^p - \lambda_1) + 5(\lambda_2^p - \lambda_2) + 6(\lambda_3^p - \lambda_3)$.
On en déduit que p divise $c(u^p) - (6(\lambda_1^p - \lambda_1) + 5(\lambda_2^p - \lambda_2) + 6(\lambda_3^p - \lambda_3)) = 6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3$.
Par suite, $\forall p \in \mathscr{P}$, p divise l'entier naturel $6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3$ et donc $6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$ puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et finalement $u = 0$.

