CONCOURS COMMUN 2007

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Jeudi 10 mai 2007 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

PREMIER PROBLÈME

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Partie A — Généralités

1. Prouver que f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $tf'(t) = g(t)$.

2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0.

3. Faire un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$, en faire un graphe sachant que $e^{-1} \simeq 0,36$ à 10^{-2} près.

4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto g(1/t)$, s'annulant en 1 :

- **4.a.** Calculer H.
- **4.b.** En former un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.

5. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On introduit l'équation (E_n) : $f(t) = t/n$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- **5.a.** En utilisant la question **3**, montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0,1[$, que l'on notera α_n. On montrerait identiquement (*mais ce n'est pas à faire*) que (E_n) admet une unique solution dans $]1,+\infty[$, que l'on notera β_n.
- **5.b.** Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ et $(\beta_n)_{n\geq 3}$ sont monotones.
- **5.c.** Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite $l > 0$? En déduire leurs limites.

Partie B — Étude d'une courbe paramétrée

On étudie ici, dans un repère orthonormal d'origine O, la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par le point $M(t)$ de coordonnées $\begin{cases} x(t) = f'(t) = \dfrac{\exp(-1/t)}{t^2} \\ y(t) = g(t) = \dfrac{\exp(-1/t)}{t} \end{cases}$

6. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $M(t)$ se situe sur la première bissectrice du plan d'équation cartésienne $y = x$.

7. Étudier la limite de la pente de la droite $(OM(t))$ lorsque t tend vers 0^+ et $+\infty$.

8. En utilisant la question **3**, faire un tableau de variation de x et y sur $\mathbb{R}_+^*$ avec limites aux bornes 0^+ et $+\infty$.

9. En utilisant les deux questions précédentes, tracer la courbe en repérant les tangentes verticales ou horizontales, on pourra utiliser que $4e^{-2} \simeq 0,54$ à 10^{-2} près.

Partie C — Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

10. Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$; préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question **1** reste valable pour $t = 0$.

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

11.a. Justifier l'existence de ces intégrales *que l'on ne cherchera surtout pas à calculer* puis montrer que $F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$.

11.b. En séparant l'intégrale $G(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C réelle telle que pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq G(x) \leq C + \ln(x).$$

11.c. En déduire que $G(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

12. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$, l'expression générale de la solution fera apparaitre la fonction F.

Partie D — Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de (E) : $x^2y' + y = x^2$ cette fois sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons, *sans aucun calcul explicite de* y, déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

13. Que vaut $u_0 = y(0)$?

14. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.

15. Peut-on avoir y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?

16. Soit n un entier naturel.

16.a. On suppose ici $n \geq 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.$$

En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

16.b. Donner une expression de u_n utilisant une factorielle, valable pour tout $n \geq 2$; en déduire les développements limités (dont on justifiera l'existence) de y à tout ordre au voisinage de 0.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel dont on notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des points, E l'ensemble des vecteurs et $\overrightarrow{0}$ le vecteur nul. $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, toutes les équations de l'énoncé seront relatives aux éléments de ce repère. Si $M \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ on pourra noter $M = (x,y,z)$ et $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$.

On considère les ensembles P et Q d'équations cartésiennes :

$$P : x+z = 0, Q : x+y+z-3 = 0.$$

Partie A — Étude d'un mouvement dans l'espace

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on introduit le point $N(t)$ de $\mathscr{E}$ caractérisé dans $\mathscr{R}$ par les coordonnées $\left\{\begin{array}{l} a(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ b(t) = \sin(t) \\ c(t) = \dfrac{-\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

1. Prouver que $N(t)$ appartient au plan P.

2. Donner une équation paramétrique de la droite D intersection de P et Q. Est-il possible que $N(t) \in D$?

3. Calculer $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t)$. En déduire que $N(t)$ appartient à un cercle de P dont on précisera le centre et le rayon.

4. Calculer la distance de $N(t)$ à la droite D puis au plan Q, on pourra vérifier que leur rapport est constant.

5. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\exp(it) + \exp(i(t+2\pi/3)) + \exp(i(t-2\pi/3)) = 0$.

6. En déduire l'isobarycentre des points $N(t), N(t+2\pi/3), N(t-2\pi/3)$.

Partie B — Construction d'un polynôme

On fixe maintenant $t \in \mathbb{R}$ et on note $\left\{\begin{array}{l} s(t) = a(t)+b(t)+c(t) \\ d(t) = a(t)b(t)+a(t)c(t)+b(t)c(t) \\ p(t) = a(t)b(t)c(t) \end{array}\right.$.

7. Simplifier $s(t)$.

8. Linéariser le produit de fonctions trigonométriques $p(t)$.

9. Calculer $d(t)$ de deux manières différentes — on pourra utiliser un résultat de la question **3**.

10. On considère maintenant le polynôme $R(X) = (X-a(t))(X-b(t))(X-c(t))$, dont les racines sont donc $a(t), b(t)$ et $c(t)$:

10.a. Dans cette question seulement $t = \pi/2$. Montrer *sans calculer* $R(X)$ *ni* $R'(X)$ que $R'(0) = 0$.

10.b. Exprimer maintenant $R(X)$ en fonction de $s(t)$, $d(t)$, $p(t)$, puis en fonction des résultats des questions précédentes.

Partie C — Endomorphismes à noyau imposé

11. Montrer que P définit un plan vectoriel de E.

12. Est-ce le cas pour Q ? Préciser, sans preuve, la structure algébrique de Q.

13. On introduit les vecteurs :

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k}), \vec{j}' = \vec{j}, \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}).$$

Montrer que $(\vec{i}', \vec{j}')$ est une base orthonormale de P et que $\vec{k}'$ en est un vecteur normal. En déduire que $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une base orthonormale de l'espace.

14. On désigne par $\vec{a}.\vec{b}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Soit $\vec{e} \in E$. Prouver, autrement que par « c'est du cours », que ses coordonnées dans la base B' sont données par :

$$\vec{e} = (\vec{e}.\vec{i}')\vec{i}' + (\vec{e}.\vec{j}')\vec{j}' + (\vec{e}.\vec{k}')\vec{k}'$$

15. On considère ici une application linéaire $u : E \to E$ telle que $P \subset \ker(u)$.

15.a. Prouver qu'il existe $\vec{z} \in E$ tel que $u(\vec{e}) = (\vec{e}.\vec{k}')\vec{z}$ pour tout $\vec{e} \in E$.

15.b. Réciproquement, montrer qu'une application u donnée par la formule précédente est un endomorphisme de E tel que $P \subset \ker(u)$.

15.c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\vec{z}$ pour que $P = \ker(u)$. Donner dans ce cas le rang et l'image de u.

Partie D — Matrices de projecteur

On note ici $p : E \to E$ le projecteur orthogonal sur le plan P, B la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ la base introduite à la question **13**. On introduit les matrices :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier très rapidement que M' est la matrice de p dans la base B'.

17. Donner la matrice de passage P de la base B à la base B' ainsi que son inverse — on détaillera le raisonnement pour cette dernière.

18. Soit M la matrice de p dans la base B :

18.a. Justifier *sans calcul* que $M^2 = M$.

18.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(M + I)^n = I + (2^n - 1)M.$$

18.c. Exprimer M en fonction de P, P^{-1} et M'. Ensuite, calculer explicitement M.

19. On peut traiter cette partie sans avoir trouvé explicitement M. On introduit l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices du type $M_{a,b} = aM + bI$, où a et b sont réels :

19.a. Montrer que l'ensemble $\mathscr{M}$ muni des lois usuelles sur les matrices a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

19.b. Les réels a et b étant donnés, exprimer $M_{a,b}$ en fonction de P, P^{-1}, I et M'. En déduire une forme factorisée du déterminant de $M_{a,b}$ ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible.

19.c. Déterminer les réels e et f tels que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$.

19.d. Lorsque $M_{a,b}$ est inversible, exprimer son inverse sous la forme d'un élément de $\mathscr{M}$.

FIN DE L'ÉPREUVE