CONCOURS COMMUN 2007

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

PREMIER PROBLÈME

Partie A - Généralités

1. • La fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f\ :\ t \mapsto e^{-1/t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Mais alors la fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus pour tout réel t strictement positif,

$$tf'(t) = t \times \frac{1}{t^2} e^{-1/t} = \frac{e^{-1/t}}{t} = g(t).$$

2. D'après un théorème de croissances comparées, on a

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{e^{-1/t}}{t} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0.$$

Par suite la fonction g a une limite réelle en 0 et est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

Montrons que le prolongement obtenu, encore noté g est dérivable en 0. D'après un théorème de croissances comparées, on a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{e^{-1/t}}{t^2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 0.}$$

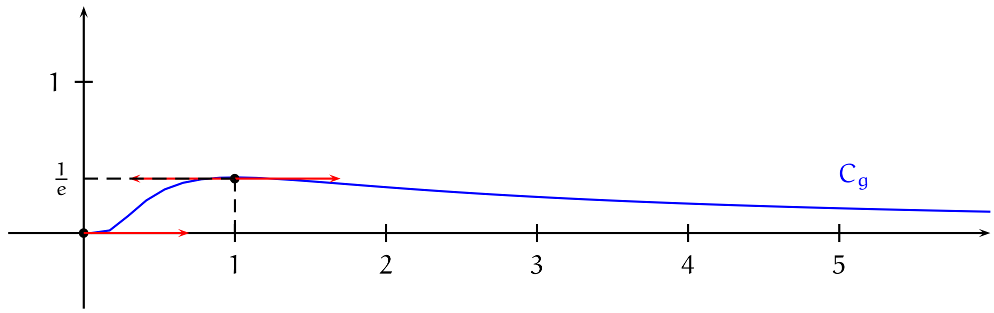
3. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $t > 0$,

$$g'(t) = \frac{tf'(t) - f(t)}{t^2} = \frac{g(t) - f(t)}{t^2} = \frac{(1-t)f(t)}{t^3}.$$

Le signe de g' est clair. On en déduit le tableau de variation de g :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

puis le graphe de g :



4. 4.a. La fonction $t \mapsto g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et on sait que H existe. Pour $x > 0$ donné,

$$H(x) = \int_1^x g\left(\frac{1}{t}\right)\, dt = \int_1^x te^{-t}\, dt.$$

Maintenant, les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$H(x) = [-te^{-t}]_1^x - \int_1^x -e^{-t}\, dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \left[e^{-t}\right]_1^x = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = \frac{2}{e} - (x+1)e^{-x}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ H(x) = \frac{2}{e} - (x+1)e^{-x}.}$$

4.b. Posons $h = x - 1$ ou encore $x = 1 + h$ de sorte que x tend vers 1 si et seulement h tend vers 0.

$$\begin{aligned} H(x) &= 2e^{-1} - (2+h)e^{-1-h} = 2e^{-1} - e^{-1}(2+h)e^{-h} \\ &\underset{h \to 0}{=} 2e^{-1} - e^{-1}(2+h)\left(1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) = e^{-1}h - \frac{e^{-1}h^3}{6} + o(h^3), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{H(x) \underset{x \to 1}{=} e^{-1}(x-1) - \frac{e^{-1}}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).}$$

5. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Pour $t > 0$, $f(t) = \dfrac{t}{n} \Leftrightarrow \dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow g(t) = \dfrac{1}{n}$. Or la fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1[$. Donc la fonction g réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]\lim_0 g, \lim_1 g[=]0, \dfrac{1}{e}[$. Comme $n \geq 3 > e$, on $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$ ou encore $\dfrac{1}{n} \in]0, \dfrac{1}{e}[$. On en déduit que $\dfrac{1}{n}$ admet un antécédent α_n et un seul dans $]0, 1]$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 3, \text{ l'équation } (E_n) \text{ admet une solution et une seule dans }]0, 1[.}$$

5.b. Soit $n \geq 3$. On a $g(\alpha_n) = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = g(\alpha_{n+1})$. Puisque g est strictement croissante sur $]0, 1[$, on en déduit que $\alpha_n > \alpha_{n+1}$. De même $g(\beta_n) = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = g(\beta_{n+1})$. Puisque g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, on en déduit que $\beta_n < \beta_{n+1}$. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n \geq 3} \text{ est strictement décroissante et la suite } (\beta_n)_{n \geq 3} \text{ est strictement croissante.}}$$

c. La suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante et est minorée par 0. Par suite la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ converge vers un réel $l \in [0, 1]$ (car $\forall n \geq 3,\ 0 < \alpha_n < 1$). De plus par continuité de g sur $[0, 1]$ et donc en l on a

$$g(l) = g(\lim_{n \to +\infty} \alpha_n) = \lim_{n \to +\infty} g(\alpha_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Comme g est strictement positive sur $]0,1]$, on ne peut avoir $l > 0$ et donc $l = 0$.

De même, la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante et donc ou bien converge vers un réel $l \in [1,+\infty[$ ou bien tend vers $+\infty$. Mais dans le premier cas, par continuité de g sur $[1,+\infty[$ et donc en l on a

$$g(l) = g(\lim_{n\to+\infty} \beta_n) = \lim_{n\to+\infty} g(\beta_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ceci est absurde car g est strictement positive sur $[1,+\infty[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty.}$$

Partie B - Étude d'une courbe paramétrée

6. Soit $t \in]0,+\infty[$.

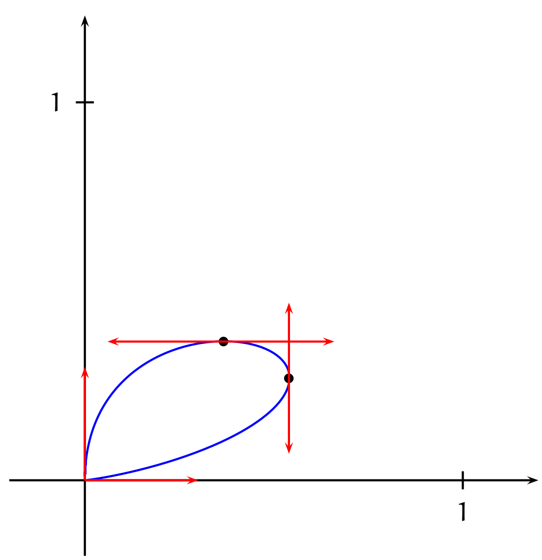
$$x(t) = y(t) \Leftrightarrow \frac{e^{-t}}{t^2} = \frac{e^{-t}}{t} \Leftrightarrow t = 1.$$

7. Soit $t > 0$. Alors $M(t) \neq O$ et la pente de la droite $(OM(t))$ est $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{e^{-t}/t}{e^{-t}/t^2} = t$. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, la pente de la droite $(OM(t))$ tend vers 0 et quand t tend vers $+\infty$, la pente de la droite $(OM(t))$ tend vers $+\infty$.

8. Pour $t > 0$, $x'(t) = \dfrac{1}{t^2} \times \dfrac{1}{t^2}e^{-1/t} - \dfrac{2}{t^3}e^{-1/t} = \dfrac{(1-2t)e^{-1/t}}{t^4}$ et $y'(t) = g'(t) = \dfrac{(1-t)e^{-1/t}}{t^3}$. Les signes de x' et y' sont clairs. On en déduit le tableau des variations conjointes des fonctions x et y.

t	0		$1/2$		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0		$-$		
x	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$		$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0
$y'(t)$			$+$		0	$-$	

9. • La question 7. montre que quand t tend vers 0 l'arc se prolonge par continuité en le point $(0,0)$ et que la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses. De même quand t tend vers $+\infty$ l'arc se prolonge en le point $(0,0)$ et que la tangente en ce point est parallèle à l'axe des ordonnées.
• L'arc $t \mapsto M(t)$ est régulier. Pour $t > 0$, $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. On a une tangente parallèle à (Ox) en le point $M(1) = (e^{-1}, e^{-1})$. De même, Pour $t > 0$, $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$. On a une tangente parallèle à (Ox) en le point $M(1) = (4e^{-2}, 2e^{-2})$.



Partie C - Fonctions définies par des intégrales

10. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} e^{-1/t} = 0$. Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Le prolongement obtenu, encore noté f, est continu sur $[0, +\infty[$. Ensuite, pour $t > 0$

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t)}{t} = g(t),$$

et donc par continuité de g en 0, le rapport $\dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0}$ tend vers $g(0) = 0$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

Enfin, pour $t = 0$, $0 \times f'(0) = 0 = g(0)$ et l'égalité de la question 1. est encore valable pour $t = 0$.

11. 11.a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions f et g sont continues sur $[0, x]$ et donc $F(x)$ et $G(x)$ existent. De plus

$$F(x) + G(x) = \int_0^x (f(t) + g(t))\ dt = \int_0^x (f(t) + tf'(t))\ dt = [tf(t)]_0^x = xf(x) - 0 = xe^{-1/x}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ F(x) = xe^{-1/x} - G(x).}$$

11.b. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Puisque $x \geq 0$ et que g est positive sur $[0, x]$, on a déjà $G(x) \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Ensuite

$$G(x) = \int_0^x g(t)\ dt = \int_0^1 g(t)\ dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\ dt \leq \int_0^1 g(t)\ dt + \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = \int_0^1 g(t)\ dt + \ln(x).$$

$$\boxed{\forall x \geq 1,\ 0 \leq G(x) \leq \int_0^1 g(t)\ dt + \ln(x).}$$

c. Mais alors, pour $x \geq 1$, $0 \leq \dfrac{G(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt + \dfrac{\ln(x)}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt + \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{x} = 0$ ou encore que

$$\boxed{G(x) = \underset{x\to+\infty}{=} o(x).}$$

Ensuite, pour $x \geq 1$, $\dfrac{F(x)}{x} = e^{-1/x} - \dfrac{G(x)}{x}$. Quand x tend vers $+\infty$, cette dernière expression tend vers $1 - 0 = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{F(x) = \underset{x\to+\infty}{\sim} x.}$$

12. Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E) s'écrit encore $y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1$. Les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $]0, +\infty[$ et on sait que les solution de (E) sur $]0, +\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$ espace affine de dimension 1.

Soit y une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ y'(x) + \frac{1}{x^2}y(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x > 0,\ e^{-1/x}y'(x) + \frac{1}{x^2}e^{-1/x}y(x) = e^{-1/x} \\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ (fy)'(x) = f(x) \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ f(x)y(x) = C + F(x) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ y(x) = \frac{C}{f(x)} + \frac{F(x)}{f(x)} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ y(x) = Ce^{1/x} + e^{1/x}F(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto Ce^{1/x} + e^{1/x}F(x),\ C \in \mathbb{R}.}$$

Partie D - Étude qualitative d'une équation différentielle

13. $x = 0$ fournit $0 + y(0) = 0$ et donc

$$\boxed{u_0 = 0.}$$

14. En dérivant on obtient pour $x \in [0, +\infty[$

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) + y'(x) = 2x,$$

puis $x = 0$ fournit $y'(0) = 0$. En dérivant deux fois grâce à la formule de Leibniz, on obtient pour $x \in [0, +\infty[$

$$x^2y'''(x) + 4xy''(x) + 2y'(x) + y''(x) = 2,$$

puis $x = 0$ fournit $2y'(0) + y''(0) = 2$ et donc $y''(0) = 2$.

$$\boxed{u_1 = 0 \text{ et } u_2 = 2.}$$

15. Si (E) admet une solution de la forme $y\ :\ x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ alors nécessairement $\gamma = y(0) = 0$, $\beta = y'(0) = 0$ et $\alpha = \dfrac{y''(0)}{2} = 1$ de sorte que y est nécessairement la fonction $x \mapsto x^2$. Comme cette fonction n'est clairement pas solution de (E) sur $]0, +\infty[$,

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ n'admet pas de solution de la forme } x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

16. 16.a. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), on obtient

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ x^2y'(x) + y(x) = x^2 &\Rightarrow \forall x > 0,\ x^2(y')^{(n)}(x) + \binom{n}{1}(2x)(y')^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}(2)(y')^{(n-2)}(x) + y^{(n)}(x) = 0 \text{ (car } n \geq 3) \\ &\Rightarrow \forall x > 0,\ x^2y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) + y^{(n)}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x > 0,\ x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ \forall x > 0,\ x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.}$$

Quand $x = 0$ on obtient $u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$.

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ u_n = -n(n-1)u_{n-1}.}$$

16.b. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

$$u_n = -n(n-1) \times -(n-1)(n-2) \times \ldots \times -3 \times 2 \times u_2 = (-1)^{n-2}n \times ((n-1) \times \ldots \times 3 \times 2)^2 = (-1)^{n-2}n((n-1)!)^2,$$

ce qui reste vrai pour $n = 2$.

$$\boxed{u_0 = u_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2,\ u_n = (-1)^{n-2}n((n-1)!)^2 = (-1)^n n! \times (n-1)!.}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Puisque y est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$, y admet en 0 (à droite) un développement limité à l'ordre n, son développement de Taylor-Young :

$$y(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k(k-1)!x^k + o(x^n).$$

A l'ordre 0, on a $y(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} o(1)$ et à l'ordre 1, on a $y(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} o(x)$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie A - Étude d'un mouvement dans l'espace

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. $a(t)+c(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} - \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} = 0$ et donc $N(t) \in P$.

2. Soit $M = (x, y, z)$ un point de $\mathscr{E}$.

$$M \in P \cap Q \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ x+y+z-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-x \\ y=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=3 \\ z=-\lambda \end{array}\right. .$$

$$\boxed{\text{Un système d'équations paramétriques de D est } \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=3 \\ z=-\lambda \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$a^2(t)+b^2(t)+c^2(t) = \frac{\cos^2(t)}{2} + \sin^2(t) + \frac{\cos^2(t)}{2} = 1.$$

Donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ N(t) \text{ appartient à la sphère } S \text{ de centre } (0,0,0) \text{ et de rayon } 1.}$$

Comme $N(t)$ appartient également à P, $N(t)$ appartient à $P \cap S$. Le plan P contient le centre O de la sphère S et donc $P \cap S$ est un cercle de centre O, le centre de S, et de rayon 1, le rayon de S.

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question 2., un repère de D est $(A, \overrightarrow{u})$ où $A = (0,3,0)$ et $\overrightarrow{u} = (1,0,-1)$. On sait alors que

$$d(N(t), D) = \frac{\|\overrightarrow{AN(t)} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

On a $\overrightarrow{AN(t)} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ \sin(t)-3 \\ -\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t)+3 \\ 0 \\ -\sin(t)+3 \end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AN(t)} \wedge \overrightarrow{u}\| = (3-\sin(t))\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}(3-\sin(t))$ puis $d = \dfrac{\sqrt{2}(3-\sin(t))}{\sqrt{2}} = 3-\sin(t)$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ d(N(t), D) = 3-\sin(t).}$$

D'autre part,

$$d(N(t), Q) = \frac{|a(t)+b(t)+c(t)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{[\sin(t)-3|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(3-\sin(t).$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ d(N(t), Q) = \frac{1}{\sqrt{3}}(3-\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}d(N(t), D).}$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. $e^{it} + e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(t-\frac{2\pi}{3})} = e^{it}(1+j+j^2) = 0$.

6. En passant aux parties réelles et imaginaires on obtient encore

$$\cos(t) + \cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(t) + \sin\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(t-\frac{2\pi}{3}\right) = 0,$$

et donc

$$\mathrm{isobar}(N(t),N(t+\frac{2\pi}{3}),N(t-\frac{2\pi}{3}))=\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t)+\cos(t+\frac{2\pi}{3})+\cos(t-\frac{2\pi}{3})\\ \sin(t)+\sin(t+\frac{2\pi}{3})+\sin(t-\frac{2\pi}{3})\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t)+\cos(t+\frac{2\pi}{3})+\cos(t-\frac{2\pi}{3}))\end{array}\right)=(0,0,0).$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{isobar}(N(t),N(t+\frac{2\pi}{3}),N(t-\frac{2\pi}{3}))=O.}$$

Partie B - Construction d'un polynôme

7. Pour tout réel t, $s(t)=\sin(t)$.

8. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}p(t)&=-\frac{1}{2}\cos^2 t\sin t=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\times\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=-\frac{1}{16i}(e^{2it}+2+e^{-2it})(e^{it}-e^{-it})\\&=-\frac{1}{16i}(e^{3it}+e^{it}-e^{-it}-e^{-3it})=-\frac{1}{8}(\sin(3t)+\sin(t)).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ p(t)=-\frac{1}{8}(\sin(3t)+\sin(t)).}$$

9. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$d(t)=\frac{\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cos^2(t)-\frac{\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\cos^2(t),$$

Mais on a aussi d'après la question 3

$$d(t)=\frac{1}{2}\left((a(t)+b(t)+c(t))^2-a^2(t)-b^2(t)-c^2(t)\right)=\frac{1}{2}((\sin(t))^2-(1)^2)=-\frac{1}{2}\cos^2(t).$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ p(t)=-\frac{1}{2}\cos^2(t).}$$

10. 10.a. $R'(0)$ est le coefficient de X dans l'expression développée de R c'est-à-dire $d(\frac{\pi}{2})$. Or $d(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}\cos^2(\frac{\pi}{2})=0$ et donc $R'(0)=0$.

10.b. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$R=(X-a(t))(X-b(t))(X-c(t))=X^3-s(t)X^2+d(t)X-p(t)=X^3-\sin(t)X^2-\frac{1}{2}\cos^2(t)X+\frac{1}{8}(\sin(3t)+\sin(t)).$$

$$\boxed{\forall\in\mathbb{R},\ R=X^3-\sin(t)X^2-\frac{1}{2}\cos^2(t)X+\frac{1}{8}(\sin(3t)+\sin(t)).}$$

Partie C - Endomorphismes à noyau imposé

11. P est le noyau de la forme linéaire $(x,y,z)\mapsto x+z$, forme linéaire non nulle sur $E=\mathbb{R}^3$ et donc P est un plan vectoriel.

12. Le vecteur nul $(0,0,0)$ n'appartient pas à Q et donc Q n'est pas un espace vectoriel. Q est un plan affine de direction le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$.

13. $\overrightarrow{i}'$ et $\overrightarrow{j}'$ sont dans P car $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ et $0-0=0$. $\|\overrightarrow{i}'\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2}=1$ et $\|\overrightarrow{j}'\|=\|\overrightarrow{j}\|=1$. Enfin $\overrightarrow{i}'.\overrightarrow{j}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}.\overrightarrow{j})=0$.

Comme P est de dimension 2,

$$\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}') \text{ est une base orthonormale de } \mathsf{P}.}$$

$\overrightarrow{k}'$ est orthogonal à $\overrightarrow{i}'$ et à $\overrightarrow{j}'$ et donc $\overrightarrow{k}'$ est un vecteur normal à P. Comme de plus $\overrightarrow{k}'$ est unitaire,

$$\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}') \text{ est une base orthonormale de l'espace.}}$$

14. Posons $\overrightarrow{e} = x'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}' + z'\overrightarrow{k}'$. Puisque la famille $(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$ est orthonormée,

$$\overrightarrow{e}.\overrightarrow{i}' = x'\overrightarrow{i}'.'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}'.\overrightarrow{i}' + z'\overrightarrow{k}'.\overrightarrow{i}' = x' \times 1 + y' \times 0 + z' \times 0 = x',$$

et de même $y' = \overrightarrow{e}.\overrightarrow{j}'$ et $z' = \overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}'$.

$$\boxed{\overrightarrow{e} = (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{i}')\overrightarrow{i}' + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{j}')\overrightarrow{j}' + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')\overrightarrow{k}'.}$$

15. 15.a. Soit $\overrightarrow{e} \in \mathsf{E}$.

$$u(\overrightarrow{e}) = (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{i}')u(\overrightarrow{i}') + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{j}')u(\overrightarrow{j}') + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')u(\overrightarrow{k}') = (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')u(\overrightarrow{k}').$$

$$\boxed{\forall \overrightarrow{e} \in \mathsf{E},\ u(\overrightarrow{e}) = (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')u(\overrightarrow{k}').}$$

15.b. Soient $\overrightarrow{z} \in \mathsf{E}$ puis u l'application qui à tout vecteur $\overrightarrow{e}$ associe $(\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')\overrightarrow{z}$.

• Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) \in \mathsf{E}^2$.

$$u(\lambda_1\overrightarrow{e}_1 + \lambda_2\overrightarrow{e}_2) = (((\lambda_1\overrightarrow{e}_1 + \lambda_2\overrightarrow{e}_2).\overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} = \lambda_1(\overrightarrow{e}_1.\overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} + \lambda_2(\overrightarrow{e}_2.\overrightarrow{k}') = \lambda_1 u(\overrightarrow{e}_1) + \lambda_2 u(\overrightarrow{e}_2).$$

L'application u est donc un endomorphisme de E.

• $u(\overrightarrow{i}') = (\overrightarrow{i}'.\overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} = 0$ et de même $u(\overrightarrow{j}') = 0$. Donc $\overrightarrow{i}'$ et $\overrightarrow{j}'$ sont dans $\mathrm{Ker}(u)$ puis $\mathsf{P} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}') \subset \mathrm{Ker}(u)$.

u est donc un endomorphisme tel que $\mathsf{P} \subset \mathrm{Ker}(u)$.

15.c. Soit $\overrightarrow{e} \in \mathsf{E}$. $u(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}' = 0$ ou $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{e} \in \mathsf{P}$ ou $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.

• **1er cas.** Si $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$, alors $u = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathsf{E} \neq \mathsf{P}$.

• **2ème cas.** Si $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\forall \overrightarrow{e} \in \mathsf{E},\ u(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{e} \in \mathsf{P}$ et donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathsf{P}$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathsf{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}.}$$

Dans ce cas, le théorème du rang permet d'affirmer que $\mathrm{rg}(u) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - 2 = 1$ et donc $\mathrm{Im}(u)$ est une droite vectorielle contenant le vecteur non nul $(\overrightarrow{z})$. On en déduit que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{z})$.

$$\boxed{\text{Si } \overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0},\ \mathrm{Ker}(u) = \mathsf{P},\ \mathrm{rg}(u) = 1 \text{ et } \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{z}).}$$

Partie D - Matrices de projecteur

16. On sait que les vecteurs de P sont invariants par p et que $\overrightarrow{k}'$ est dans le noyau de p et donc on a bien $p(\overrightarrow{i}') = \overrightarrow{i}'$, $p(\overrightarrow{j}') = \overrightarrow{j}'$ et $p(\overrightarrow{k}') = \overrightarrow{0}$.

17. $\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. La matrice P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre et est donc une matrice orthogonale. Ainsi, $\mathsf{P}^{-1} = {}^t\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

18. 18.a. On sait que $p^2 = p$ et donc $M^2 = M$.

18.b. Mais alors, par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = M$.
Les matrices M et I commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(M+I)^n = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} M^k = I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right) M = I + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1\right) M = I + \left((1+1)^n - 1\right) M = I + (2^n - 1)M.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (M+I)^n = I + (2^n - 1)M.}$$

18.c.

$$\begin{aligned}
M = PM'P^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

19. 19.a. $\mathscr{M} = \mathrm{Vect}(I, M)$ et donc $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ de dimension au plus 2. De plus, la matrice M n'est pas une matrice scalaire. On en déduit que la famille (I, M) est libre et donc une base de $\mathscr{M}$.

$$\boxed{\mathscr{M} \text{ est un espace vectoriel de dimension 2. Une base de } \mathscr{M} \text{ est } (I, M).}$$

19.b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$M_{a,b} = aM + bI = aPM'P^{-1} + bI = P(aM' + bI)P^{-1}.$$

La matrice $M_{a,b}$ est donc semblable à la matrice $aM' + bI$. On en déduit que

$$\det(M_{a,b}) = \det(aM' + bI) = \det(\mathrm{diag}(a+b, a+b, b)) = b(a+b)^2.$$

En particulier, $\det(M_{a,b}) \in GL_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b(a+b)^2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$ et $b \neq -a$.

19.c. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$M_{a,b} \times M_{c,d} = (aM + bI)(cM + dI) = acM^2 + (ad + bc)M + bdI = (ad + bc + ac)M + bdI.$$

19.d. On suppose de plus $b \neq 0$ et $b \neq -a$ de sorte que $M_{a,b}$ est inversible.

$$\begin{aligned}
M_{a,b} \times M_{c,d} = I &\Leftrightarrow (ad + bc + ac)M + bdI = I \\
&\Leftrightarrow (a+b)c + ad = 0 \text{ et } bd = 1 \text{ (car la famille } (I, M) \text{ est libre)} \\
&\Leftrightarrow d = \frac{1}{b} \text{ et } c = -\frac{a}{b(a+b)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } b \neq 0 \text{ et } b \neq -a,\ (M_{a,b})^{-1} = \frac{1}{b(a+b)}(-aM + (a+b)I).}$$

