SESSION 2026

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

I - Lemme fondamental du calcul variationnel

1 ▷ La fonction $\psi\ :\ x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $\exp\ :\ y \mapsto e^y$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $\varphi = \exp\circ\psi$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x>0$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

- L'affirmation est vraie quand $n=0$ en posant $P_0 = 1$.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x>0$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. Alors, pour tout $x>0$,
$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}\right)'(x) = \frac{1}{x^2}\left(-P_n'\left(\frac{1}{x}\right)+P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
avec $P_{n+1} = X^2\left(P_n - P_n'\right)\in\mathbb{R}[X]$.

On a montré par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x>0$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

2 ▷ La foncrion φ est de classe C^∞ sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, φ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(n)}(0)=0$.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}} = 0 = \varphi(0)$. Donc, φ est continue à droite en 0 puis φ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que φ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(n)}(0)=0$. Alors, φ est de classe C^n sur $[0,+\infty[$, de classe C^{n+1} sur $]0,+\infty[$ et de plus,
$$\lim_{x\to 0^+}\varphi^{(n+1)}(x) = \lim_{x\to 0^+}P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty}P_{n+1}(y)e^{-y} = 0$$
d'après un théorème de croissances comparées. D'après le théorème de la limite de la dérivée, φ est de classe C^{n+1} sur $[0,+\infty[$ et de plus, $\varphi_d^{(n+1)}(0)=0$. Puisque d'autre part, φ est de classe C^{n+1} sur $]-\infty,0]$ avec $\varphi_g^{(n+1)}(0)=0$, φ est finalement de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi^{(n+1)}(0)=0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, φ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(n)}(0)=0$.

3 ▷ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, posons $\psi_{c,d}(x) = \varphi((x-c)(d-x)) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-c)(d-x)}} \text{ si } x\in]c,d[\\ 0 \text{ si }\ : x\in]-\infty,c]\cup[d,+\infty[\end{cases}$ (car $(x-c)(d-x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,c]\cup[d,+\infty[$). La fonction $\psi_{c,d}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,c]\cup[d,+\infty[$ strictement positive sur $]c,d[$.

4 ▷ Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0\in]a,b[$ tel que $f(x_0)\neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$ qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on peut supposer $f(x_0)>0$. Puisque f est continue en x_0, il existe deux réels c et d tels que $a<c<x_0<d<b$ et pour tout $x\in[c,d]$, $f(x)>0$.

Soit $h=\psi_{c,d}$. h est de classe C^∞ sur $[a,b]$ et vérifie $h(a)=h(b)=0$. De plus, $\displaystyle\int_a^b f(x)h(x)\ dx = \int_c^d f(x)\psi_{c,d}(x)\ dx > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $[c,d]$) ce qui contredit l'hypothèse faite sur f. Donc, pour tout $x\in]a,b[$, $f(x)=0$ ou encore f est nulle sur $]a,b[$ puis sur $[a,b]$ par continuité de f en a et b.

II - Equation d'Euler-Lagrange

5 $\triangleright$ Soit $y \in \mathcal{C}$. Les fonctions y et y' sont continues sur $[x_A, x_B]$ puis la fonction $x \mapsto (x, y(x), y'(x))$ est continue sur $[x_A, x_B]$ à valeurs dans $[x_A, x_B] \times U \times V$. Puisque f est continue sur $[x_A, x_B] \times U \times V$, la fonction $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))$ est continue sur le segment $[x_A, x_B]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc la fonction $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))\, dx$ est intégrable sur ce segment.

6 $\triangleright$ Pour tout réel ε, y_ε est de classe C^2 sur $[x_A, x_B]$ et vérifie $y_\varepsilon(x_A) = y_0$ et $y(x_B) = y_1$. Donc, $y_\varepsilon \notin \mathcal{C}$ si et seulement si il existe $x \in [x_A, x_B]$ tel que $y_\varepsilon(x) \notin U$ ou $y'_\varepsilon(x) \notin V$.

Supposons par l'absurde que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$ tel que $y_\varepsilon \notin \mathcal{C}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varepsilon_n \in \left]-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right[$ tel que $y_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{C}$ $(\star)$. On note que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [x_A, x_B]$ tel que $y_{\varepsilon_n}(x_n) \notin U$ ou $y'_{\varepsilon_n}(x_n) \notin V$. La suite (x_n) est une suite d'éléments du compact $[x_A, x_B]$ et on peut donc en extraire une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente, de limite $\ell \in [x_A, x_B]$. Or,

$$y_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\left(x_{\varphi(n)}\right) = z_0\left(x_{\varphi(n)}\right) + \varepsilon_{\varphi(n)}\eta\left(x_{\varphi(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} z_0(\ell)$$

par continuité de z_0 et η sur $[x_A, x_B]$ et donc ℓ. De même, $y'_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\left(x_{\varphi(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} z'_0(\ell)$ et finalement

$$\left(y_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\left(x_{\varphi(n)}\right), y'_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\left(x_{\varphi(n)}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} (z_0(\ell), z'_0(\ell)) \in U \times V.$$

Puisque U et V sont ouverts, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left(y_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\left(x_{\varphi(n)}\right), y'_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\left(x_{\varphi(n)}\right)\right) \in U \times V$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $(\star)$.

On a donc montré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $y_\varepsilon \in \mathcal{C}$.

7 $\triangleright$ Soit $\beta \in]0, \alpha[$ où β sera choisi ultérieurement.

Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} [-\beta, \beta] \times [x_A, x_B] & \to & \mathbb{R} \\ (\varepsilon, x) & \mapsto & f\left(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)\right) \end{array}$ de sorte que, pour tout $\varepsilon \in [-\beta, \beta]$, $\varphi(\varepsilon) = \displaystyle\int_{x_A}^{x_B} \Phi(\varepsilon, x)\, dx$.

- Pour tout $\varepsilon \in [-\beta, \beta]$, la fonction $x \mapsto \Phi(\varepsilon, x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[x_A, x_B]$.

- Pour tout $x \in [x_A, x_B]$, la fonction $\varepsilon \mapsto \Phi(\varepsilon, x) = f\left(x, z_0(x) + \varepsilon\eta(x), z'_0(x) + \varepsilon\eta'(x)\right)$ est de classe C^1 sur $[-\beta, \beta]$. De plus, d'après la règle de la chaine, pour tout $(\varepsilon, x) \in [-\beta, \beta] \times [x_A, x_B]$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, x) = \eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)\right) + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)\right).$$

Ensuite, la fonction f étant de classe C^2 sur $[x_A, x_B] \times U \times V$,

- Pour tout $\varepsilon \in [-\beta, \beta]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, x)$ est continue par morceaux sur $[x_A, x_B]$.

- Soit $(\varepsilon, x) \in [-\beta, \beta] \times [x_A, x_B]$. Les fonctions z_0, η, z'_0 et η' sont continues sur les segment $[x_A, x_B]$ et en particulier bornées sur ce segment. On peut écrire $|y_\varepsilon(x)| \leqslant \|z_0\|_\infty + \beta\,\|\eta\|_\infty$ et $|y'_\varepsilon(x)| \leqslant \|z'_0\|_\infty + \beta\,\|\eta'\|_\infty$.
Maintenant, $\|z_0\|_\infty$ et $\|z'_0\|_\infty$ sont des maximums car les fonctions $|z_0|$ et $|z'_0|$ sont continues sur le segment $[x_A, x_B]$.
Par suite, $\|z_0\|_\infty \in U$ et $\|z'_0\|_\infty \in V$. Puisque U et V sont ouverts, on peut choisir β suffisamment petit tel que $[\|z_0\|_\infty - \beta\,\|\eta\|_\infty, \|z_0\|_\infty + \beta\,\|\eta\|_\infty] \times \left[\|z'_0\|_\infty - \beta\,\|\eta'\|_\infty, \|z'_0\|_\infty + \beta\,\|\eta'\|_\infty\right] \subset U \times V$, ce que l'on fait.
Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ sont alors continues sur le compact
$K = [x_A, x_B] \times [\|z_0\|_\infty - \beta\,\|\eta\|_\infty, \|z_0\|_\infty + \beta\,\|\eta\|_\infty] \times \left[\|z'_0\|_\infty - \beta\,\|\eta'\|_\infty, \|z'_0\|_\infty + \beta\,\|\eta'\|_\infty\right]$ et en particulier bornées sur K. On note M_y (resp. M_z) un majorant de la fonction $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$ (resp. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|$) sur K et on a

$$\forall(\varepsilon \in [-\beta, \beta] \times [x_A, x_B],\ \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, x)\right| \leqslant \|\eta\|_\infty M_y + \|\eta'\|_\infty M_z.$$

De plus, la fonction constante $x \mapsto \|\eta\|_\infty M_y + \|\eta'\|_\infty M_z$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment $[x_A, x_B]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction φ est de classe C^1 sur $[-\beta,\beta]$ (ce qui suffit pour la suite du problème) et de plus

$$\forall \varepsilon \in [-\beta,\beta],\ \varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right)\ dx.$$

8 $\triangleright$ La fonction φ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-\beta,\beta[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de plus la fonction φ admet un extremum en 0 par définition de z_0. On en déduit que $\varphi'(0) = 0$ ou encore

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right)\ dx = 0\ (\star\star).$$

Maintenant, les deux fonctions $x \mapsto \eta(x)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))$ sont de classe C^1 sur le segment $[x_A, x_B]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit, en tenant compte de $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$,

$$\begin{aligned}\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\ dx &= \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right)\ dx \\ &= -\int_{x_A}^{x_B} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right)\ dx.\end{aligned}$$

Mais alors, $(\star\star)$ fournit

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right)\right)\ dx = 0.$$

9 $\triangleright$ Ainsi, pour toute fonction η de classe C^∞ (et donc C^2) sur $[x_A, x_B]$ telle que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$, on a $\displaystyle\int_{x_A}^{x_B} \eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right)\right)\ dx = 0$. D'après la question **4.**,

$$\forall x \in [x_A, x_B],\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right) = 0.$$

10 $\triangleright$ Pour tout $x \in]x_A, x_B[$, posons $F(x) = f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x)\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))$.
La fonction F est de classe C^1 sur $]x_A, x_B[$ et pour tout $x \in]x_A, x_B[$, d'après la règle de la chaine.

$$\begin{aligned}F'(x) &= 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(x, z_0(x), z'_0(x)) + z'_0(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) + z''_0(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \\ &\quad - z''_0(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right) \\ &= z'_0(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))\right)\right) = 0.\end{aligned}$$

La fonction F est donc constante sur $]x_A, x_B[$ ou encore

$$\exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]x_A, x_B[,\ f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) = C.$$

III - Le chemin le plus court est la ligne droite !

11 $\triangleright$ Dans cette question, pour tout $(x,y,z) \in [x_A, x_B] \times U \times V$, $f(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$. La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $]x_A, x_B[\times U \times V$ et sa dérivée partielle par rapport à x est nulle. D'après l'identité de Beltrami, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]x_A, x_B[,\ \sqrt{1 + (y'_0(x))^2} - y'_0(x) \times \frac{y'_0(x)}{\sqrt{1 + (y'_0(x))^2}} = C,$$

ou encore $\forall x \in]x_A, x_B[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1 + (y'_0(x))^2}} = C$ (ce qui impose $C \neq 0$) ou encore $\forall x \in]x_A, x_B[$, $(y'_0(x))^2 = \dfrac{1}{C^2} - 1$ (ce qui impose $C \in [-1,1] \setminus \{0\}$).

Si $C \in \{-1, 1\}$, alors pour tout $x \in]x_A, x_B[$, $y_0'(x) = 0$. La fonction y_0 est constante et en particulier affine. Sinon $C \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ puis $\sqrt{\dfrac{1}{C^2} - 1} > 0$. Puisque pour tout $x \in]x_A, x_B[$, $(y_0'(x))^2 = \dfrac{1}{C^2} - 1$, on en déduit que pour tout $x \in]x_A, x_B[$, il existe $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ tel que $y_0'(x) = \varepsilon(x)\sqrt{\dfrac{1}{C^2} - 1}$. Maintenant, la fonction y_0' est continue sur $]x_A, x_B[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction y_0' garde un signe constant ou encore la foction ε est constante.

Mais alors, la fonction y_0' est constante sur $]x_A, x_B[$ puis la fonction y_0 est affine sur $]x_A, x_B[$ puis sur $[x_A, x_B]$ par continuité de y_0 en x_A et en x_B.

IV - Le chemin le plus rapide est la cycloïde

12 $\triangleright$ (On suppose de plus que $y_B < y_A$). Ici, pour tout $(x, y, z) \in]x_A, x_B[\times]0, +\infty[\times]-\infty, 0[$, $f(x, y, z) = \sqrt{\dfrac{1 + z^2}{y}}$. f est de classe C^2 sur l'ouvert $]x_A, x_B[\times[0, +\infty[\times]-\infty, 0[$ et sur cet ouvert, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$. D'après l'identité de Beltrami, il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]x_A, x_B[$,

$$\sqrt{\frac{1 + (y_0'(x))^2}{y_0(x)}} - y_0'(x)\frac{1}{\sqrt{y_0(x)}}\frac{y_0'(x)}{\sqrt{1 + (y_0'(x))^2}} = C'.$$

ou encore $\dfrac{1}{\sqrt{y_0(x)}\sqrt{1 + (y_0'(x))^2}} = C'$ (ce qui impose $C' \neq 0$) ou enfin $y_0(x)\left(1 + (y_0'(x))^2\right) = \dfrac{1}{C'^2}$. Cette dernière égalité est encore valable pour $x = x_A$ ou $x = x_B$ par continuité de y_0 et y_0' en x_A et en x_B. Finalement,

$$\exists C \in \mathbb{R}/ \ \forall x \in [x_A, x_B],\ y_0(x)\left(1 + (y_0'(x))^2\right) = C.$$

13 $\triangleright$ La fonction $x \mapsto \text{cotan}(x)$ est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ et pour tout $x \in]0, \pi[$, $\text{cotan}'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x) < 0$. La fonction cotan est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$ et donc, la fonction cotan réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to\pi-} \text{cotan}(x), \lim\limits_{x\to 0^+} \text{cotan}(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

La fonction cotan$'$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ et donc, la fonction Arccotan est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\text{Arccotan}'(x) = \frac{1}{\text{cotan}'(\text{Arccotan}(x))} = -\frac{1}{1 + \text{cotan}^2(\text{Arccotan}(x))} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

14 $\triangleright$ Pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y_0'(x) = \text{cotan}\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)$ puis $1 + (y_0'(x))^2 = 1 + \text{cotan}^2\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right) = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)} = \dfrac{2}{1 - \cos(\theta(x))}$.

Par suite, puisque pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y_0(x)\left(1 + (y_0'(x))^2\right) = 2$, on en déduit que

$$\forall x \in [x_A, x_B],\ y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x)).$$

15 $\triangleright$ En dérivant les deux membres de l'égalité précédente, on obtient pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $\theta'(x)\sin(\theta(x)) = y_0'(x) = \text{cotan}\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)$ puis

$$\theta'(x) = \frac{\text{cotan}\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)}{\sin(\theta(x))} = \frac{\cos\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right) \times 2\sin\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)} = \frac{1}{2\sin^2\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)} = \frac{1}{1 - \cos(\theta(x)}, $$

et donc, pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $\theta'(x) - \theta'(x)\cos(\theta(x)) = 1$. En intégrant, on obtient :

$$\exists c \in \mathbb{R}/ \ \forall x \in [x_A, x_B],\ x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + c.$$

V - Une application à une structure optimale : la caténoïde

16 ▷ Ici, pour tout $(x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2\pi y\sqrt{1+z^2}$. On peut de nouveau appliquer l'identité de BELTRAMI et on obtient l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0,1]$,

$$2\pi y_0(x)\sqrt{1+(y_0'(x))^2} - y_0'(x) \times 2\pi y_0(x)\frac{y_0'(x)}{\sqrt{1+(y_0'(x))^2}} = C,$$

ou encore $\dfrac{y_0(x)}{\sqrt{1+(y_0'(x))^2}} = \dfrac{C}{2\pi}$. De plus, $\dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{y_0(0)}{\sqrt{1+(y_0'(0))^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(y_0'(0))^2}} \neq 0$. On peut poser $c = \dfrac{2\pi}{C} \neq 0$ et on obtient

$$\forall x \in [0,1],\ 1+(y_0'(x))^2 = c^2\left(y_0(x)\right)^2.$$

17 ▷ La fonction ch est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. La fonction ch réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\left[\mathrm{ch}(0), \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)\right[= [1,+\infty[$.

La fonction ch est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction Argch est dérivable sur $\mathrm{ch}(]0,+\infty[) =]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\mathrm{Arcgch}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{Argch}(x))} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x))}$.
Maintenant, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argch}(x)) = \mathrm{ch}^2(\mathrm{Argch}(x)) - 1 = x^2 - 1$. De plus, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\mathrm{Argch}(x) \geqslant 0$ et donc $\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x)) \geqslant 0$. On en déduit que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$. On a ainsi montré que

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

18 ▷ On suppose de plus que pour tout $x \in [0,1]$, $y_0'(x) > 0$ et $c^2\left(y_0(x)\right)^2 > 1$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1],\ 1+(y_0'(x))^2 = c^2\left(y_0(x)\right)^2 &\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ y_0'(x) = \sqrt{(cy_0(x))^2 - 1} \\
&\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ \frac{y_0'(x)}{\sqrt{(cy_0(x))^2-1}} = 1 \\
&\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\mathrm{Argch}\left(cy_0(x)\right)\right)(x) = 1 \\
&\Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}/\frac{1}{c}\mathrm{Argch}\left(cy_0(x)\right) = x + d \\
&\Rightarrow \exists (c,d)\ \mathbb{R}^2/\ \forall x \in [0,1],\ y_0(x) = \frac{1}{c}\mathrm{ch}(c(x+d)),
\end{aligned}$$

où c et d sont deux réels tels que $\mathrm{ch}(cd) = \mathrm{ch}(c(d+1)) = c$ (à partir des conditions $y_0(0) = y_0(1) = 1$). Ensuite, en tenant compte de $c \neq 0$,

$$\mathrm{ch}(cd) = \mathrm{ch}(c(d+1)) \Leftrightarrow cd = c(d+1) \text{ ou } c(d+1) = -cd \Leftrightarrow d+1 = -d \Leftrightarrow d = -\frac{1}{2}.$$

Donc, pour tout $x \in [0,1]$, $y_0(x) = \dfrac{1}{c}\,\mathrm{ch}\left(c\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right)$ où c est un réel tel que $\mathrm{ch}\left(\dfrac{c}{2}\right) = c$.

