

I - Quelques propriétés de $O_n(\mathbb{R})$

1 ▷ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2X \cos(\theta) + 1 = X^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})X + e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$. Ensuite,

$$e^{i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{2i\theta} = 1 \Leftrightarrow 2\theta \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z}.$$

1er cas. Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \notin \mathbb{R}$. Dans ce cas, χ_{R_θ} n'est pas scindé sur \mathbb{R} puis R_θ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par contre, χ_{R_θ} est à racines simples dans \mathbb{C} et donc R_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2ème cas. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $R_\theta = I_2$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $R_\theta = -I_2$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 ▷ Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$. Les deux colonnes de A sont unitaires et donc, il existe $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta') \\ \sin(\theta) & \sin(\theta') \end{pmatrix}$. L'égalité $\det(A) = 1$ fournit $\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') = 1$ ou encore $\sin(\theta' - \theta) = 1$ ou enfin $\theta' \in \theta + \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. On

en déduit que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R_\theta$.

Réciproquement, les colonnes de R_θ sont unitaires, orthogonales et le déterminant de R_θ est égal à 1. Donc, $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$.

On a montré que $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$.

3 ▷ L'application $h : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M^T, M) \end{matrix}$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et l'appli-

cation $g : \begin{matrix} (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{matrix}$ est continue car bilinéaire sur un espace de dimension finie. Par suite, l'application

$f = g \circ h : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T M \end{matrix}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\{I_n\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (boule fermée de centre

I_n et de rayon 0). Donc, $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé de \mathbb{R} en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

D'autre part, pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty \leq 1$. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée, de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

Si, par l'absurde, $O_n(\mathbb{R})$ est un connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par continuité du déterminant et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ (car $n \geq 2$) est un connexe par arcs de \mathbb{R} , ce qui est faux (les connexes par arcs de \mathbb{R} étant les intervalles). Donc, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

4 ▷ Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $\gamma(t) = \begin{cases} R_{(1-2t)\theta} & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ R_{(2t-1)\theta'} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$. Déjà, $\gamma(0) = R_\theta$, $\gamma(1) = R_{\theta'}$ et pour

tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in SO_2(\mathbb{R})$. Ensuite, γ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Enfin, $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} \gamma(t) = R_0 = I_2 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Donc, γ est continue en $\frac{1}{2}$ à droite puis γ est continue sur $[0, 1]$.

Ainsi, pour tout couple d'éléments de $SO_2(\mathbb{R})$, on a trouvé un chemin continu joignant ces deux éléments et contenu dans $SO_2(\mathbb{R})$. Ceci montre que $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Soit $n \geq 2$. Soit $A \in SO_n(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\Delta = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}}_r)$$

où p, q et r sont trois entiers naturels tels que $p + q + 2r = 1$ et q est pair (avec une lecture conventionnelle dans les cas $p = 0$ ou $q = 0$ ou $r = 0$). Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $g(t) = 2t - 1$. Alors, g est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. Ensuite, il existe des applications $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, continue sur $[0, 1]$ telles pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\gamma_k(0) = R_{\theta_k}$, $\gamma_k(1) = I_2$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma_k(t) \in SO_2(\mathbb{R})$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = P \operatorname{diag}(1, \dots, 1, g(t), \dots, g(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_r(t)) P^{-1}$. γ est une application continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$ telle que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = I_n$.

En résumé, pour tout $A \in SO_n(\mathbb{R})$, il existe un chemin continu, contenu dans $SO_n(\mathbb{R})$, joignant A à I_n . Par transitivité, pour tout couple d'éléments de $SO_n(\mathbb{R})$, il existe un chemin continu, contenu dans $SO_n(\mathbb{R})$ et joignant ces deux éléments. Ceci montre que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

5 ▷ Soit A un élément fixé de $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$.

Soient $\varphi : SO_n(\mathbb{R}) \rightarrow O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$ et $\psi : O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$.

$$M \mapsto AM \qquad M \mapsto A^T M$$

Pour tout $M \in SO_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $\det(\varphi(M)) = \det(A)\det(M) = -1$ et donc $\varphi(M) \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$. Ceci montre que φ est bien une application. De même, ψ est bien une application.

D'autre part, pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\psi \circ \varphi(M) = A^T AM = M$ et donc $\psi \circ \varphi = \operatorname{Id}_{SO_n(\mathbb{R})}$. De même, $\varphi \circ \psi = \operatorname{Id}_{O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})}$. On en déduit que φ est une bijection (et que $\varphi^{-1} = \psi$).

Soit alors H un sous-groupe du groupe $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ contenant $SO_n(\mathbb{R})$ et distinct de $SO_n(\mathbb{R})$. Soit A un élément fixé de $H \setminus SO_n(\mathbb{R})$. H contient encore $\{AM, M \in SO_n(\mathbb{R})\} = \varphi(O_n(\mathbb{R})) = O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$. Finalement, H contient $(SO_n(\mathbb{R})) \cup (O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})) = O_n(\mathbb{R})$ et finalement $H = O_n(\mathbb{R})$.

On a montré que un sous-groupe du groupe $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ contenant $SO_n(\mathbb{R})$ est soit $SO_n(\mathbb{R})$, soit $O_n(\mathbb{R})$.

6 ▷ • Les éléments de $Z_2(\Omega)$ sont les 16 matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (chacune de probabilité $(1-p)^4$ (par indépendance des $Y_{i,j}$)), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (de probabilité $p(1-p)^3$), $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (de probabilité $p^2(1-p)^2$), $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (de probabilité $p^3(1-p)$) et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (de probabilité p^4).

Les éléments inversibles de $Z_2(\Omega)$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc,

$$\mathbb{P}(Z_2 \in GL_2(\mathbb{R})) = 2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) = 2p^2(1-p)((1-p) + 2p) = 2p^2(1-p^2).$$

• Une matrice orthogonale A dont les coefficients sont dans $\{0, 1\}$ possède exactement un 1 par colonne, les autres coefficients étant nuls, car ses colonnes doivent être unitaires. Cette matrice possède également exactement un 1 par ligne car cette matrice est inversible et ne peut donc avoir deux lignes identiques. Finalement, A est nécessairement une matrice de permutation ou encore il existe une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $A = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} = P_\sigma$. Réciproquement, une matrice de permutation est une matrice orthogonale à coefficients dans $\{0, 1\}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(Z_n \in O_n(\mathbb{R})) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(Z_n = P_\sigma)$ (ces événements étant deux à deux disjoints). Ensuite, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ donnée, les variables $Y_{i,j}$ étant indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = P_\sigma) &= \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{j=1}^n (Y_{\sigma(j), j} = 1) \right) \cap \left(\bigcap_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq \sigma(j)} (Y_{i, \sigma(j)} = 0) \right) \right) \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(Y_{\sigma(j), j} = 1) \times \prod_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq \sigma(j)} \mathbb{P}(Y_{i, \sigma(j)} = 0) \\ &= p^n (1-p)^{n^2-n}. \end{aligned}$$

Puisqu'il y a $n!$ permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(Z_n \in O_n(\mathbb{R})) = n! p^n (1-p)^{n^2-n}.$$

• Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. $\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma') \delta_{\sigma'(1), \sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n), \sigma(n)} = \varepsilon(\sigma)$. Par suite, $P_\sigma \in \text{SO}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{A}_n$. Mais on sait qu'il y a autant de permutations paires que de permutations impaires ou encore $\text{card}(\mathcal{S}_n) = 2\text{card}(\mathcal{A}_n)$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(Z_n \in \text{SO}_n(\mathbb{R})) = \frac{n!}{2} p^n (1-p)^{n^2-n}.$$

7 ▷ Si $x = y$, alors toute réflexion par rapport à un hyperplan contenant x , transforme x en $x = y$. Supposons maintenant, $x \neq y$. Soient $u = \frac{1}{\|x-y\|}(x-y)$ puis $H = u^\perp$. Alors s_H est une réflexion telle que $s_H(x) = y$.

En effet, pour tout $z \in E$,

$$s_H(z) = p_H(z) - p_{H^\perp}(z) = z - 2p_u(z) = z - \langle x, u \rangle u = x - 2 \frac{\langle z, x-y \rangle}{\|x-y\|^2} (x-y).$$

De plus, $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 - \langle x, y \rangle) = 2\langle x, x-y \rangle$ et donc, pour tout $z \in E$, $s_H(z) = z - \frac{\langle z, x-y \rangle}{\langle x, x-y \rangle} (x-y)$. En particulier,

$$s_H(x) = x - (x-y) = y.$$

Si A est la matrice de s_H dans une base orthonormée de E , alors A est une matrice orthogonale telle que $Ax = y$.

8 ▷ Soient $G \in \mathcal{G}$ et $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. x est non nul et donc $Gx \neq 0$ car $G \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On peut poser $y = \frac{1}{\|Gx\|}Gx$ de sorte que $\|y\| = 1 = \|x\|$. D'après la question précédente, il existe une matrice orthogonale A telle que $Ay = x$ ou encore $AGx = \|Gx\|x$. On pose $G_1 = AG$. Puisque $A \in O_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$ et $G \in \mathcal{G}$, on a $G_1 \in \mathcal{G}$ et de plus $G_1x = \|Gx\|x$. Ensuite, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G_1^p x = \|Gx\|^p x$ et donc $G_p = G_1^p$ est un élément de \mathcal{G} tel que $G_p x = \|Gx\|^p x$. Enfin, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $x = G_1^{-p} G_1^p x = \|Gx\|^p G_1^{-p} x$ et donc $G_1^{-p} x = \|Gx\|^{-p} x$. $G_{-p} = G_1^{-p}$ est un élément de \mathcal{G} tel que $G_{-p} x = \|Gx\|^{-p} x$.

On a montré que : pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, pour tout $G \in \mathcal{G}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que $G_p x = \|Gx\|^p x$.

9 ▷ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme $\| \cdot \|$ que l'on note $\| \| \|$. Puisque \mathcal{G} est compact, \mathcal{G} est borné puis il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $G \in \mathcal{G}$, $\| \| \| \leq M$.

Soit $G \in \mathcal{G}$ Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ (donc $\|Gx\| \neq 0$). Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que $G_p x = \|Gx\|^p x$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\|Gx\|^p = \|G_p x\| \leq \| \| \| G_p \| \| \|x\| = \| \| \| G_p \| \leq M \quad (\star).$$

Si $\|Gx\| > 1$, alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|Gx\|^p = +\infty$ ce qui contredit (\star) et si $0 < \|Gx\| < 1$, alors $\lim_{p \rightarrow -\infty} \|Gx\|^p = +\infty$ ce qui contredit (\star) . Donc, $\|Gx\| = 1$.

Soit alors $x \in E \setminus \{0\}$. $\left\| \frac{1}{\|x\|}x \right\| = 1$ et donc $\left\| G \frac{1}{\|x\|}x \right\| = 1$ puis $\|Gx\| = \|x\|$, ce qui reste vrai quand $x = 0$. Ceci montre que G est une matrice orthogonale.

Ainsi, tout élément de \mathcal{G} est dans $O_n(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{G} \subset O_n(\mathbb{R})$. Puisque d'autre part, $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$, on a montré que $\mathcal{G} = O_n(\mathbb{R})$.

II - Calcul différentiel sur $O_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$

10 ▷ On reprend les notations de la question 3 : $f = g \circ h$. L'application h est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et l'application g est bilinéaire sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et donc de classe C^1 sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Mais alors, l'application $f = g \circ h$ est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative telle que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, H^T et H aient même norme. ($\| \cdot \|_2$ convient.) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f(M+H) = (M+H)^T(M+H) = M^T M + M^T H + H^T M + H^T H = f(M) + M^T H + H^T M + H^T H.$$

Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|H^T H\|_2 \leq \|H\|_2^2$ et donc

$$f(M+H) \underset{H \rightarrow 0}{=} f(M) + M^T H + H^T M + o(H).$$

Puisque l'application $H \mapsto M^T H + H^T M$ est linéaire, cette application est la différentielle de f en M . On a montré que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df(M)(H) = M^T H + H^T M.$$

11 ▷ Soit $H \in T$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ puis $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, dérivable en 0, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$. La fonction γ admet en 0 un développement limité d'ordre 1 : $\gamma(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n + tH + o(t)$. Puisque pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} I_n &= \gamma(t)^T \gamma(t) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} ((I_n + tH + o(t))^T (I_n + tH + o(t))) \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n + t(H + H^T) + o(t). \end{aligned}$$

$((I_n + tH + o(t))^T = I_n + tH^T + o(t)^T$ par linéarité de la transposition puis $\frac{1}{\|H\|} o(t)^T = \left(\frac{1}{\|H\|} o(t)\right)^T = o(1)$ par continuité de la transposition en 0). Ainsi, $t(H + H^T) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t)$ puis $H + H^T \underset{t \rightarrow 0}{=} o(1)$. Ceci impose $H + H^T = 0$ et donc H est anti-symétrique.

On a montré que $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

12 ▷ • Soit $H = 0_n$. Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = I_n$, alors γ est une application dérivable sur \mathbb{R} telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = 0_n$. Donc $0_n \in T$.

• Soit $(H_1, H_2) \in T^2$. Il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions $\gamma_1 :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\gamma_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, dérivables sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I_n$ et $\gamma_1'(0) = H_1$ et $\gamma_2'(0) = H_2$.

Soit $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$. γ est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) = \gamma_1(t) \gamma_2(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. Ensuite, $\gamma(0) = I_n \times I_n = I_n$. Enfin,

$$\gamma(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} (I_n + tH_1 + o(t)) (I_n + tH_2 + o(t)) \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n + t(H_1 + H_2) + o(t).$$

Donc, $\gamma'(0) = H_1 + H_2$ puis $H_1 + H_2 \in T$.

• Soient $H \in T$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Il existe $\varepsilon > 0$ puis $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$. Soit $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$. Pour tout $t \in]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$, $\lambda t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et on peut poser $\gamma_1(t) = \gamma(\lambda t)$. γ_1 est dérivable sur $]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$, à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $\gamma_1(0) = I_n$ et $\gamma_1'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda H$. Donc, $\lambda H \in T$.

On a montré que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

13 ▷ On sait déjà que $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Vérifions que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset T$. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $\gamma(t) = \exp(tA)$. Par continuité de la transposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout réel t , $(\exp(tA))^T = \exp(tA^T) = \exp(-tA)$ puis, pour tout réel t , puisque les matrices tA et $-tA$ commutent,

$$\gamma(t)^T \gamma(t) = \exp(-tA) \exp(tA) = \exp(0_n) = I_n.$$

Donc, l'application γ est à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, $\gamma(0_n) = I_n$. Enfin, γ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel t , $\gamma'(t) = A \exp(tA)$ puis $\gamma'(0_n) = A$. Ceci montre que $A \in T$.

On a montré que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset T$ et finalement,

$$T = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

14 ▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\Delta_k = \text{diag}\left(k, \frac{1}{k}, 1, \dots, 1\right)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\det(\Delta_k) = 1$ et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_k \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$g(\Delta_k) = \text{Tr}(\Delta_k^T \Delta_k) = \text{Tr}\left(\text{diag}\left(k^2, \frac{1}{k^2}, 1, \dots, 1\right)\right) = k^2 + \frac{1}{k^2} + n - 2.$$

Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(\Delta_k) = +\infty$, la fonction g n'est pas bornée sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})$. La fonction g n'admet donc pas de maximum global sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

15 ▷ La trace est linéaire et donc de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, $g = \text{Tr} \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} g(M + H) &= \text{Tr}((M + H)^T(M + H)) = g(M) + \text{Tr}(H^T M) + \text{Tr}(M^T H) + \text{Tr}(HH^T) \\ &= g(M) + \text{Tr}(H^T(2M)) + \text{Tr}(HH^T) \\ &= g(M) + \langle H, 2M \rangle + \|H\|_2^2, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée. En particulier,

$$g(M + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} g(M) + \langle H, 2M \rangle + o(H).$$

Puisque l'application $H \mapsto \langle H, 2M \rangle$ est linéaire, ceci montre que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $dg(M)(H) = \langle H, (2M) \rangle$. D'autre part, on sait que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $dg(M)(H) = \langle H, \nabla g(M) \rangle$. Donc, par unicité,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \nabla g(M) = 2M.$$

L'application \det est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coordonnées de la variable dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} \det(M + tE_{i,j}) &= \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} & m_{1,j} & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ m_{i-1,1} & & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j} & m_{i-1,j+1} & & m_{i-1,n} \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j-1} & m_{i,j} + t & m_{i,j+1} & m_{i,n} & \\ m_{i+1,1} & & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j} & m_{i+1,j+1} & & m_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j-1} & m_{n,j} & m_{n,j+1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \det(M) + \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} & 0 & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ m_{i-1,1} & & m_{i-1,j-1} & 0 & m_{i-1,j+1} & & m_{i-1,n} \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j-1} & t & m_{i,j+1} & m_{i,n} & \\ m_{i+1,1} & & m_{i+1,j-1} & 0 & m_{i+1,j+1} & & m_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j-1} & 0 & m_{n,j+1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(par linéarité par rapport à la j -ème colonne),

et donc, pour tout réel t , $\det(M + tE_{i,j}) = \det(M) + t(\text{com}(M))_{i,j}$ (en développant suivant la j -ème colonne). Mais alors,

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(M) = \frac{d}{dt} (\det(M + tE_{i,j})) (0) = (\text{com}(M))_{i,j}.$$

On en déduit que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\nabla(\det) = \text{com}(M)$.

16 ▷ $SL_n(\mathbb{R}) = (\det - 1)^{-1}\{0\}$ où de plus, la fonction $(\det - 1)$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, g est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $M \in SL_n(\mathbb{R})$, $dg(M) = \text{com}(M) \neq 0$ car M est inversible.

D'après le théorème des extremas liés, si la restriction de g à $SL_n(\mathbb{R})$ admet un extremum local en M , alors, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $dg(M) = \mu d(\det - 1)(M)$ ou encore, $2M = \mu \text{com}(M)$ ou enfin, en posant $\lambda = \frac{\mu}{2}$, $M = \lambda \text{com}(M)$. On note que $\lambda \neq 0$ car $M \neq 0$.

On sait que $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}(\text{com}(M))^T = \frac{1}{\lambda}M^T$. En prenant le déterminant des deux membres, on obtient $1 = \frac{1}{\lambda^n}$ puis $\lambda \in \{-1, 1\}$ puis $M^{-1} = \pm M^T$ ou encore $M^T M = \pm I_n$. Mais de plus, la matrice $M^T M$ est symétrique positive car pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T M^T M X = (MX)^T (MX) = \|MX\|^2 \geq 0$. Puisque $-I_n$ n'est pas positive (car $-1 < 0$ est valeur propre de $-I_n$), il ne reste que $M^T M = I_n$ et donc $M \in O_n(\mathbb{R})$. Enfin, puisque $\det(M) = 1$, on a montré que $M \in SO_n(\mathbb{R})$.

17 ▷ Soit $M \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$. La matrice $M^T M$ est symétrique positive. Ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sont des réels positifs. De plus, l'égalité $\det(M) = 1$ fournit $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(M^T M) = 1$ et en particulier, les λ_i sont strictement positifs. Mais alors, d'après l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique,

$$g(M) = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k \geq n (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} = n.$$

De plus, si $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, $g(M) = \text{Tr}(M^T M) = \text{Tr}(I_n) = n$. Donc, g admet un minimum local égal à n et ce minimum est atteint en chaque élément de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$. La question précédente montre alors que ce minimum est atteint uniquement en les éléments de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

III - Morphismes continus de \mathbb{U} dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

18 ▷ Soit G un sous-groupe borné du groupe (\mathbb{R}^*, \times) . Soit $a \in G^*$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $a^p \in G$ et donc la famille $(a^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est bornée. Mais si $|a| < 1$, $\lim_{p \rightarrow -\infty} |a^p| = +\infty$ et si $|a| > 1$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} |a^p| = +\infty$. Il ne reste que $|a| = 1$ puis $a \in \{-1, 1\}$. Ceci montre que $G \subset \{-1, 1\}$.

Réciproquement, $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$ sont des sous-groupes bornés de (\mathbb{R}^*, \times) et $\{-1\}$ n'est pas un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) . On a donc montré que les sous-groupes bornés de (\mathbb{R}^*, \times) sont $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$.

Puisque φ est un morphisme de groupes, $\varphi(\mathbb{U})$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ puis $\det \circ \varphi(\mathbb{U})$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) . De plus, $\det \circ \varphi(\mathbb{U})$ est borné car fini. D'après la question précédente, $\det \circ \varphi(\mathbb{U}) = \{1\}$ ou $\det \circ \varphi(\mathbb{U}) = \{-1, 1\}$.

Enfin, \mathbb{U} est connexe par arcs et \det est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\det \circ \varphi(\mathbb{U})$ est un connexe par arcs de \mathbb{R} , ce qui empêche $\det \circ \varphi(\mathbb{U}) = \{-1, 1\}$. Il ne reste que $\det \circ \varphi(\mathbb{U}) = \{1\}$ ou encore, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\det(\varphi(z)) = 1$.

On a montré que $\varphi(\mathbb{U})$ est un sous-groupe de $(\text{SL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

19 ▷ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de la norme infinie. Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$\|Ax\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|x\|_\infty.$$

D'autre part, \mathbb{U} est compact et φ est continue. Donc, $\varphi(\mathbb{U})$ est une partie compacte et en particulier bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note m un majorant de l'ensemble des $\|\varphi(z)\|_\infty$, $z \in \mathbb{U}$. On a ainsi

$$\forall z \in \mathbb{U}, \forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \|\varphi(z)x\|_\infty \leq n \|\varphi(z)\|_\infty \|x\|_\infty \leq nm \|x\|_\infty.$$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de $\varphi(z)$ ($\lambda \neq 0$ car $\varphi(z) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$) et $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors, $\varphi(z)x = \lambda x$ puis, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(z^p)x = (\varphi(z))^p x = \lambda^p x.$$

Par suite, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $|\lambda|^p \|x\|_\infty = \|\lambda^p x\|_\infty = \|\varphi(z^p)x\|_\infty \leq nm \|x\|_\infty$ car $z^p \in \mathbb{U}$. Enfin, $\|x\|_\infty > 0$ et donc

$$\forall p \in \mathbb{Z}, |\lambda|^p \leq nm.$$

Ainsi, la famille $(|\lambda|^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est bornée et donc, comme à la question **18**, $|\lambda| = 1$.

On a montré que $\forall z \in \mathbb{U}, \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z)) \subset \mathbb{U}$.

20 ▷ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x + y) = \varphi(e^{i(x+y)}) = \varphi(e^{ix} \times e^{iy}) = \varphi(e^{ix}) \varphi(e^{iy}) = \psi(x)\psi(y)$.

21 ▷ La fonction $t \mapsto \psi(t) = \varphi(e^{it})$ est continue sur \mathbb{R} . Donc, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \psi(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et de plus $F' = \psi$. Ensuite,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} F(x) = F'(0) = \psi(0) = \varphi(1) = I_n$$

car le morphisme φ transforme 1 l'élément neutre de (\mathbb{R}^*, \times) en I_n l'élément neutre de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. Ainsi, il existe une fonction ε définie sur un voisinage de 0 à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de limite nulle en 0, telle que

$$\det(F(x)) = \det(x(I_n + \varepsilon(x))) = x^n \det(I_n + \varepsilon(x)).$$

Maintenant, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque par l'application continue \det de l'ouvert $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Puisque $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $A(x) = I_n + \varepsilon(x)$ est inversible pour x au voisinage de 0 ou encore il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$,

$$\det(F(x)) = x^n \det(A(x)) \neq 0$$

et donc, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, $F(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

22 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question **20**,

$$\int_x^{x+\alpha} \psi(t) dt = \int_0^\alpha \psi(u+x) du = \int_0^\alpha \psi(u)\psi(x) du = \psi(x)F(\alpha).$$

Puisque $F(\alpha) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \psi(t) dt \right) (F(\alpha))^{-1}.$$

Maintenant, la fonction $x \mapsto \int_x^{x+\alpha} \psi(t) dt = F(x+\alpha) - F(x)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donc, la fonction ψ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

23 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\psi(x+y) = \psi(y)\psi(x)$ puis en dérivant, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\psi'(x+y) = \psi'(y)\psi(x)$. En évaluant en 0, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \psi'(0)\psi(x) = M\psi(x).$$

De plus, $\psi(0) = I_n$. Mais, la fonction $x \mapsto \exp(xM)$ est solution du problème de CAUCHY $Y' - MY = 0$ et $Y(0) = I_n$. Par unicité de la solution à ce problème de CAUCHY,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \exp(xM).$$

IV - Morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$

24 ▷ Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Un couple de matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$ ou encore $PB = AP$. On pose $P = Q + iR$ avec $(Q, R) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $QB = AQ$ et $RB = AR$ puis,

$$\forall x \in \mathbb{R}, (Q + xR)B = A(Q + xR).$$

Maintenant, le polynôme $\pi = \det(Q + XR)$ n'est pas nul car $\pi(i) = \det(P) \neq 0$. Donc, π admet un nombre fini de racines. Puisque \mathbb{R} est infini, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(Q + x_0R) \neq 0$. La matrice $P_0 = Q + x_0R$ est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $P_0B = AP_0$ ou encore $B = P_0^{-1}AP_0$.

On a montré que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

25 ▷ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Donc, $N^n = 0_n$. Supposons que $\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N^2)$

Montrons que par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(N^k) = \mathrm{Ker}(N)$ (le résultat étant clair quand $k = 1$).

- Le résultat est vrai quand $k = 2$.
- Soit $k \geq 2$. Supposons que pour tout $\ell \in \llbracket 2, k \rrbracket$, $\mathrm{Ker}(N^\ell) = \mathrm{Ker}(N)$. Déjà, $\mathrm{Ker}(N) \subset \mathrm{Ker}(N^{k+1})$. Inversement, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(N^{k+1}) &\Rightarrow N^k NX = 0 \Rightarrow NX \in \mathrm{Ker}(N^k) = \mathrm{Ker}(N^{k-1}) \Rightarrow N^{k-1} NX = 0 \Rightarrow N^k X = 0 \\ &\Rightarrow X \in \mathrm{Ker}(N^k) = \mathrm{Ker}(N). \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}(N^{k+1}) = \mathrm{Ker}(N)$.

Le résultat est démontré par récurrence. En particulier, $\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N^n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et donc $N = 0_n$.

Par contraposition, si $N \neq 0_n$, alors $\mathrm{Ker}(N) \neq \mathrm{Ker}(N^2)$.

26 ▷ $\exp(2\pi M) = \psi(2\pi) = \varphi(e^{2i\pi}) = \varphi(1) = I_n$. De plus, en posant $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on sait que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(2\pi M) = (2\pi\lambda_1, \dots, 2\pi\lambda_n)$ puis $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(2\pi M)) = (e^{2\pi\lambda_1}, \dots, e^{2\pi\lambda_n})$.

Puisque $\exp(2\pi M) = I_n$, on a donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e^{2\pi\lambda_k} = 1$ puis $2\pi\lambda_k \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et donc $\lambda_k \in i\mathbb{Z}$.

On a montré que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset i\mathbb{Z}$.

27 ▷ Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M . Posons $\chi_f = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où les λ_k sont des nombres complexes deux à deux distincts et les α_k sont des entiers naturels non nuls de somme n .

D'après le lemme des noyaux, E est somme directe des sous-espaces caractéristiques $F_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{\alpha_k}$:

$$E = \bigoplus_{1 \leq k \leq r} \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{\alpha_k}.$$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, f et $(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{\alpha_k}$ commutent (en tant que polynômes en f) et donc F_k est stable par f . Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note f_k l'endomorphisme de F_k induit par f puis on pose $d_k = \lambda_k \text{Id}_{F_k}$ et $v_k = f_k - d_k$.

On définit ainsi des endomorphismes d et v de E par leurs restrictions aux sous-espaces supplémentaires F_k . Les endomorphismes f et $d + v$ coïncident sur des sous-espaces supplémentaires et donc $f = d + v$. Ensuite, la matrice de d dans une base adaptée à la décomposition de E en somme des F_k est diagonale. Donc, d est diagonalisable. De plus, par construction, $\chi_d = \chi_f$.

Ensuite, pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, d_k et f_k commutent car d_k est une homothétie. Les endomorphismes $d \circ f = f \circ d$ coïncident sur des sous-espaces supplémentaires et donc $f \circ d = d \circ f$. Mais alors, d et $v = f - d$ commutent.

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $v_k^{\alpha_k} = (f_k - \lambda_k \text{Id}_{F_k})^{\alpha_k} = 0$. Donc, si on pose $\alpha = \text{Max}\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $v_k^{\alpha} = 0$ puis $v^{\alpha} = 0$. v est donc nilpotent.

On note alors D_0 et N_0 les matrices respectives de d et v dans la base canonique de \mathbb{C}^n de sorte que $M = D_0 + N_0$. On note ensuite D et N les matrices respectives de d et v dans une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$. Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $D_0 = P D P^{-1}$ et $N_0 = P N P^{-1}$ puis $M = D_0 + N_0 = P(D + N)P^{-1}$. De plus, D est diagonale, N est nilpotente, $ND = DN$ et $\chi_D = \chi_d = \chi_f = \chi_M$.

28 ▷ On a vu que $\exp(2\pi M) = I_n$. Donc, si on pose $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(D)$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(2\pi D)) = (e^{2\pi\lambda_1}, \dots, e^{2\pi\lambda_n}) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(2\pi M)) = (1, \dots, 1)$. Puisque D est diagonale,

$$\exp(2\pi D) = I_n.$$

Ensuite, puisque $2\pi N$ et $2\pi D$ commutent, $I_n = \exp(2\pi M) = \exp(2\pi D + 2\pi N) = \exp(2\pi D)\exp(2\pi N) = \exp(2\pi N)$ et donc

$$\exp(2\pi N) = I_n.$$

Vérifions alors que $\text{Ker}(N) = \text{Ker}(N^2)$. On a déjà $\text{Ker}(N) \subset \text{Ker}(N^2)$. Inversement, soit $x \in \text{Ker}(N^2)$. Puisque N est nilpotente,

$$x = I_n x = \exp(2\pi N)x = I_n x + 2\pi N x + \frac{(2\pi)^2}{2} N^2 x + \dots + \frac{(2\pi)^n}{n!} N^n x = x + 2\pi N x$$

et donc $2\pi N x = 0$ puis $N x = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(N)$.

Ainsi, N est nilpotente et vérifie $\text{Ker}(N) = \text{Ker}(N^2)$. D'après la question **25**, $N = 0$. On en déduit que M est semblable à D et donc que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

29 ▷ D'après ce qui précède, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = P D P^{-1}$ et D est diagonale. D'après la question, **26**, 0 est la seule valeur propre réelle éventuelle de M et les autres valeurs propres sont de la forme ik avec $k \in \mathbb{Z}^*$. Puisque M est réelle, pour chaque valeur propre non réelle λ de M , $\bar{\lambda}$ est valeur propre de M avec même ordre de multiplicité. Le spectre de M peut donc s'écrire sous la forme $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = (ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0)$ où k_1, \dots, k_p , sont des entiers relatifs non nuls.

Mais alors, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout x réel, $\exp(xM) = P \text{diag}(e^{ik_1 x}, e^{-ik_1 x}, \dots, e^{ik_p x}, e^{-ik_p x}, 1, \dots, 1) P^{-1}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}^*$. On a vu que les valeurs propres de $R_{kx} = \begin{pmatrix} \cos(kx) & -\sin(kx) \\ \sin(kx) & \cos(kx) \end{pmatrix}$ sont e^{ikx} et e^{-ikx} . Donc, $\text{diag}(e^{ikx}, e^{-ikx})$ est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à R_{kx} . De plus, $E_{e^{ikx}}(R_{kx}) = \text{Vect}((1, -i))$ ne dépend pas de x de même que $E_{e^{-ikx}}(R_{kx})$.

Un calcul par blocs montre qu'il existe $P_1 \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xM) = P \text{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) P_1^{-1}$. Mais alors, d'après la question **24**, il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = Q \text{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}) Q^{-1}.$$

30 ▷ Inversement, ψ ainsi définie est bien une application de \mathbb{R} dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_{xk} R_{yk} = \begin{pmatrix} \cos(kx) & -\sin(kx) \\ \sin(kx) & \cos(kx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(ky) & -\sin(ky) \\ \sin(ky) & \cos(ky) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k(x+y)) & -\sin(k(x+y)) \\ \sin(k(x+y)) & \cos(k(x+y)) \end{pmatrix} = R_{(x+y)k}.$$

Un calcul par blocs montre alors que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$.

Ainsi, ψ définie comme à la question **29** est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.