

## Partie 1 : Calcul de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \chi^2}$

**1** ▷ Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $|e^{i\theta}t| = t < 1$  et en particulier,  $1 - e^{i\theta}t \neq 0$  et d'autre part,  $1 - e^{i\theta} \neq 0$  car  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ .

Ainsi, pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $1 - e^{i\theta}t \neq 0$  puis, la fonction  $t \mapsto e^{i\theta} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ . On en déduit que l'intégrale  $\int_0^1 e^{i\theta} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt$  existe. Ensuite,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt &= \int_0^1 e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta}t)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}. \end{aligned}$$

**2** ▷ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, 1[$ , on pose  $f_n(t) = e^{i\theta} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t}$ .

- Chaque fonction  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , est continue par morceaux sur l'intervalle  $[0, 1[$ .
- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $[0, 1[$  vers la fonction  $f : t \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t}$  car pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $|e^{i\theta}t| = t < 1$  et de plus, la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[0, 1[$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [0, 1[$ ,  $|f_n(t)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}t|} = \varphi(t)$ . De plus, la fonction  $\varphi$  est continue, positive et intégrable sur  $[0, 1[$  car prolongeable par continuité en 1.

D'après le théorème de convergence dominée,

- (chaque fonction  $f_n$  est intégrable sur  $[0, 1)$ ,
- (la fonction  $f$  est intégrable sur  $[0, 1[$ ),
- la suite  $\left( \int_0^1 f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$ .

Ceci montre que la série de terme général  $\frac{e^{ik\theta}}{k}$  converge et de plus,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt.$$

**3** ▷ Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\sin(k\theta)}{k} = \text{Im} \left( \frac{e^{ik\theta}}{k} \right)$  et donc la série de terme général  $\frac{\sin(k\theta)}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , converge.

Ensuite, pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\operatorname{Im} \left( \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta t}} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i\theta} (1 - e^{-i\theta t})}{(1 - e^{i\theta t})(1 - e^{-i\theta t})} \right) = \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \operatorname{Im} \left( \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta t}} dt \right) = \int_0^1 \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta t}} \right) dt = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt.$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|t \cos(\theta)| = t |\cos(\theta)| \leq |\cos(\theta)| < 1$  (car  $\theta \in ]0, \pi[$ ) et donc  $1 - t \cos(\theta) \neq 0$ . La fonction  $u_\theta$  est donc de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} u'_\theta(t) &= \frac{\sin(\theta)}{(1 - t \cos(\theta))^2} \times \frac{1}{1 - \left( \frac{t \sin(\theta)}{1 - t \cos(\theta)} \right)^2} = \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} &= \int_0^1 u'_\theta(t) dt = [u_\theta(t)]_0^1 = u_\theta(1) - u_\theta(0) \\ &= \operatorname{Arctan} \left( \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \right) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\tan \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \left( \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (\text{car } \frac{\theta}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \text{ et donc } \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) > 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad (\text{car } \frac{\theta}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ , \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

**4** ▷ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , posons  $f_n(t) = \frac{\cos(nt)}{n^2}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}$  puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ . Puisque la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge, il en est de même de la série de terme général  $\|f_n\|_\infty$ . Ceci montre que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et donc, la fonction  $S$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Ensuite, la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Puisque chaque fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que la fonction  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**5** ▷ Soient  $\alpha \in ]0, \pi[$  puis  $\theta \in [\alpha, \pi - \alpha]$  ou  $[\pi - \alpha, \alpha]$  suivant que  $\alpha \leq \pi - \alpha$  ou  $\alpha > \pi - \alpha$ . Soit  $I = [\alpha, \theta]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in I$ , on pose  $f_n(t) = - \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}$ .

- Chaque fonction  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $f : t \mapsto \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}$  d'après la question **3**. et de plus, la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} \right| = \left| \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikt}}{k} \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikt}}{k} \right| = \left| \int_0^1 \frac{e^{it} (1 - (e^{it}u)^n)}{1 - e^{it}u} du \right| \quad (\text{d'après la question 1.}) \\ &\leq \int_0^1 \frac{(1 + |e^{it}u|^n)}{|1 - e^{it}u|} du \leq \int_0^1 \frac{2}{|1 - e^{it}u|} du \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout  $u \in [0, 1]$ ,

$$|1 - e^{it}u|^2 = u^2 - 2u \cos(t) + 1 = (u - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \geq \sin^2(t) \geq \sin^2(\alpha) \quad (\text{car } I \subset [\alpha, \pi - \alpha]),$$

puis  $|1 - e^{it}u| \geq |\sin(\alpha)| = \sin(\alpha)$ . Par suite,

$$|f_n(t)| \leq \int_0^1 \frac{2}{\sin(\alpha)} du = \frac{2}{\sin(\alpha)} = \varphi(t).$$

De plus, la fonction  $\varphi$  est continue par morceaux et intégrable sur le segment  $I$ .

D'après le théorème de convergence dominée, la suite  $\left( \int_{\alpha}^{\theta} f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et de plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\theta} f_n(t) dt = \int_{\alpha}^{\theta} f(t) dt$ . Plus explicitement,

$$\begin{aligned} S(\theta) - S(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta) - \cos(k\alpha)}{k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\theta} -\frac{\sin(kt)}{k} dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\theta} f_n(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\theta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\theta} \left( \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) dt = \left( \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} \right) - \left( \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\alpha \in ]0, \pi[$  et tout  $\theta \in [\alpha, \pi - \alpha]$ ,  $S(\theta) - S(\alpha) = \left( \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} \right) - \left( \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha}{2} \right)$ .

Soit alors  $\theta \in ]0, \pi[$ . Pour tout  $\alpha \in ]0, \min(\theta, \pi - \theta)[$ , on a  $S(\theta) - S(\alpha) = \left( \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} \right) - \left( \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha}{2} \right)$ . Quand  $\alpha$  tend vers 0, par continuité de  $S$  sur  $\mathbb{R}$  et en particulier en 0, on obtient  $S(\theta) - S(0) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2}$ . On a montré que

$$\forall \theta \in ]0, \pi[, S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0).$$

**6** ▷ Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ , posons  $g_n(t) = \frac{\cos(nt)}{n^2(n^2 + x^2)}$ .

- Chaque fonction  $g_n$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et de plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$g'_n(t) = -\frac{\sin(nt)}{n(n^2 + x^2)} \quad \text{et} \quad g''_n(t) = -\frac{\cos(nt)}{n^2 + x^2}.$$

- Soit  $t \in \mathbb{R}$ .  $g_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^4}\right)$  et  $g'_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . Donc, les séries numériques de termes généraux respectifs  $g_n(t)$  et  $g'_n(t)$  convergent. On a montré que les séries de fonctions de termes généraux respectifs  $g_n$  et  $g'_n$  convergent simplement sur  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|g''_n(t)| \leq \frac{1}{n^2 + x^2}$  puis  $\|g''_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2 + x^2}$ . En particulier,  $\|g''_n\|_{\infty} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  puis la série de terme général  $\|g''_n\|_{\infty}$  converge. Mais alors, la série de fonctions de terme général  $g''_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

D'après le théorème de dérivation terme à terme généralisé, la fonction  $g_x$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et ses dérivées première et seconde s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$g'_x(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n(n^2+x^2)} \text{ et } g''_x(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+x^2}.$$

On en déduit que pour tout réel  $t$ ,

$$\begin{aligned} g''_x(t) - x^2 g_x(t) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2 \cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2+x^2) \cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = -S(t). \end{aligned}$$

**7** ▷ Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Soit  $P = aX^2 + bX + c$  où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $a \neq 0$ .

Alors,  $P'' - x^2 P = -ax^2 X^2 - bx^2 X + 2a - cx^2$  puis  $P$  est solution de  $(E_x)$  sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $a = \frac{1}{4x^2}$ ,  $b = -\frac{\pi}{2x^2}$  et  $c = \frac{1}{2x^4} + \frac{S(0)}{x^2}$

Le polynôme  $P : t \mapsto \frac{t^2}{4x^2} - \frac{\pi t}{2x^2} + \frac{1}{2x^4} + \frac{S(0)}{x^2}$  est une solution particulière de  $(E_x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**8** ▷ Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Pour tout réel  $t$ ,  $g'_x(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n(n^2+x^2)}$  puis  $g'_x(0) = g'_x(\pi) = 0$ .

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{xt} + \mu e^{-xt}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et donc les solutions de l'équation  $(E_x)$  sur  $\mathbb{R}$ , sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{xt} + \mu e^{-xt} + \frac{t^2}{4x^2} - \frac{\pi t}{2x^2} + \frac{1}{2x^4} + \frac{S(0)}{x^2}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .  $g_x$  est l'une de ces solutions.

Les égalités  $g'_x(0) = g'_x(\pi) = 0$  fournissent  $\begin{cases} \lambda x - \mu x - \frac{\pi}{2x^2} = 0 \\ \lambda x e^{\pi x} - \mu x e^{-\pi x} = 0 \end{cases}$  puis  $\lambda = e^{-2\pi x} \mu$  puis  $\mu = -\frac{\pi}{2x^3(1-e^{-2\pi x})}$  et  $\lambda = -\frac{\pi e^{-2\pi x}}{2x^3(1+e^{-2\pi x})}$ . Mais alors,

$$g''_x(0) = x^2(\lambda + \mu) + \frac{1}{2x^2} = -\frac{\pi}{2x} \times \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} + \frac{1}{2x^2}.$$

**9** ▷ Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . On a aussi pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $g''_x(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+x^2}$ . Donc,  $g''_x(0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$  puis

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2+x^2} &= -2x^2 g''_x(0) = -1 + \pi x \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} = -1 + \pi x \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} = -1 + \pi x \frac{e^{2\pi x} - 1 + 1 + 1}{e^{2\pi x} - 1} \\ &= -1 + \pi x + \frac{2\pi x}{e^{2\pi x} - 1}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\frac{2\pi x}{e^{2\pi x} - 1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2+x^2}.$$

## Partie 2 : Développement en série entière de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ et applications

**10** ▷ Soient  $x \in ]-1, 1[$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Alors,  $\left| -\frac{x^2}{n^2} \right| \leq x^2 < 1$  et en particulier,  $-\frac{x^2}{n^2} \neq 1$  puis

$$\frac{1}{x^2+n^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=0}^N \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k \right) + \frac{1}{n^2} \frac{\left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^{N+1}}{1 - \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=0}^N \left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k \right) + (-1)^{N+1} \frac{x^{2N+2}}{x^2+n^2}.$$

Ensuite,  $|R_{N,n}(x)| = \frac{1}{x^2 + n^2} \frac{|x|^{2N+2}}{n^{2N+2}} \leq \frac{1}{n^{2N+2}} |x|^{2N+2}$  et donc, en sommant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2N+2}} \right) |x|^{2N+2} = \zeta(2N+2) |x|^{2N+2}.$$

**11** ▷ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $s \in [2, +\infty[$ , posons  $h_n(s) = \frac{1}{n^s}$  de sorte que pour tout  $s \geq 2$ ,  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ .

• Chaque fonction  $h_n$  a une limite réelle quand  $s$  tend vers  $+\infty$  à savoir  $\ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ .

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|h_n\|_{\infty, [2, +\infty[} = \frac{1}{n^2}$ . Donc, la série de fonctions de terme général  $h_n$  converge normalement et en particulier uniformément vers la fonction  $\zeta$  sur  $[2, +\infty[$ .

D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction  $\zeta$  converge en  $+\infty$  et de plus,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$ .

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . En additionnant membre à membre les égalités de la question **10.**, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} &= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^N \left( -\frac{x^2}{n^2} \right)^k \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) \\ &= \sum_{k=0}^N \left( (-1)^k x^{2k+2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) \quad (\text{combinaison linéaire de séries convergentes}) \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \zeta(2k+2) x^{2k+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) \quad (*). \end{aligned}$$

Puisque pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq \zeta(2N+2) |x|^{2N+2}$  et que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \zeta(2N+2) |x|^{2N+2} = 1 \times 0 = 0$

(car  $x \in ]-1, 1[$ ), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) = 0$ .

Mais alors, les égalités (\*) permettent d'affirmer que la série de terme général  $(-1)^k \zeta(2k+2) x^{2k+2}$  converge et de plus, quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \zeta(2k+2) x^{2k+2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) x^{2k}.$$

**12** ▷ D'après la question **9.**, pour tout réel  $t$  non nul,  $h(2\pi t) = 1 - \pi t + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{t^2 + n^2}$ , ce qui reste vrai si  $t = 0$  car  $h(0) = 1$ . Mais alors, pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$h(2\pi t) = 1 - \pi t + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) t^{2k}$$

ou encore, pour tout  $x \in ]-2\pi, 2\pi[$  (en posant  $x = 2\pi t$ ),

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}.$$

En particulier, la fonction  $h$  est développable en série entière sur  $] -2\pi, 2\pi[$  (et en particulier, la fonction  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -2\pi, 2\pi[$ ).

On sait d'autre part que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$ . Par unicité des coefficients d'une série entière, on

en déduit que  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -\frac{1}{2}$ , pour tout  $k \geq 1$ ,  $b_{2k+1} = 0$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{(2k)! \zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}}$ .

**13** ▷ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\ell(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Alors, pour tout réel  $x$ ,  $h(x)\ell(x) = 1$ . Ensuite, pour tout réel  $x$  non nul,

$$\ell(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

ce qui est vrai pour  $x = 0$  car  $\ell(0) = 1$ . On en déduit que pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= h(x)\ell(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} \right) x^n \text{ (produit de CAUCHY de deux séries entières).} \end{aligned}$$

On en déduit en particulier, par unicité des coefficients d'une série entière, que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = 0$ .

**14** ▷ Par suite,  $\frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} = 0$  puis  $b_2 = -2 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}$  puis  $\frac{b_0}{120} + \frac{b_1}{24} + \frac{b_2}{12} + \frac{b_3}{12} + \frac{b_4}{24} = 0$  et donc

$$b_4 = -24 \left( \frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} - 0 \right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}.$$

D'après la question **12.**,  $\zeta(2) = +\frac{2b_2\pi^2}{2!} = \frac{\pi^2}{6}$  et  $\zeta(4) = -\frac{8b_4\pi^4}{4!} = \frac{\pi^4}{90}$ . On a montré que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

### Probabilité qu'un entier naturel choisi au hasard et uniformément dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ soit sans facteur à la puissance $k$

**15** ▷ On développe complètement le produit  $\prod_{i=1}^r (1 + x_i)$ . On obtient une somme de  $2^r$  termes constitués chacun de  $r$  facteurs. Un et un seul de ces termes n'est constitué que de facteurs égaux à 1 et est donc égal à 1. Chacun des autres termes est constitué d'un certain nombre  $m \in \llbracket 1, r \rrbracket$  de facteurs du type  $x_i$  et de  $m - r$  autres facteurs égaux à 1. On ordonne les facteurs  $x_k$  par ordre croissants des indices et on écrit donc chacun des  $2^r - 1$  termes restants sous la forme  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$  où  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ . On regroupe enfin les termes constitués d'exactly  $m$  facteurs  $x_k$  et on obtient

$$\prod_{i=1}^r (1 + x_i) = 1 + \sum_{m=1}^r \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} \right).$$

**16** ▷ Pour tout  $\omega \in \Omega$ , si  $\omega \in A$ ,  $1_{\bar{A}}(\omega) = 0 = 1 - 1 = 1 - 1_A(\omega)$  et si  $\omega \notin A$ ,  $1_{\bar{A}}(\omega) = 1 = 1 - 0 = 1 - 1_A(\omega)$ . Puisque  $(A, \bar{A})$  est une partition de  $\Omega$ , on a montré que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $1_{\bar{A}}(\omega) = 1 - 1_A(\omega)$  et donc que  $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$ .

$1_{A_1} 1_{A_2} \dots 1_{A_m}$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  de même que  $1_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m}$ . De plus, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} 1_{A_1} 1_{A_2} \dots 1_{A_m}(\omega) = 1 &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, 1_{A_i}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \omega \in A_i \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i=1}^m A_i \\ &\Leftrightarrow 1_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m}(\omega) = 1 \end{aligned}$$

et donc  $1_{A_1} 1_{A_2} \dots 1_{A_m} = 1_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m}$ .

17 ▷ Soit  $A \in \mathcal{A}$ .

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r}) = \mathbb{E}\left(1 - \mathbf{1}_{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r}}\right) = \mathbb{E}\left(1 - \mathbf{1}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_r}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(1 - \prod_{i=1}^r (1 - \mathbf{1}_{A_i})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(-\sum_{m=1}^r \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r} (-1)^{i_1} (-1)^{i_2} \dots (-1)^{i_m}\right)\right) \quad (\text{d'après 15.}) \\ &= \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \dots \mathbf{1}_{A_{i_m}})\right) \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\ &= \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}})\right) \\ &= \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r} \mathbb{P}_n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m})\right). \end{aligned}$$

18 ▷  $\overline{S_n(k)} = \{m \in \llbracket 1, n \rrbracket / \exists i \in \llbracket 1, r \rrbracket / p_i^k | m\} = \bigcup_{i=1}^r \{m \in \llbracket 1, n \rrbracket / p_i^k | m\} = \bigcup_{i=1}^r A_n(p_i^k)$  et donc

$$\begin{aligned} q_n(k) &= 1 - \mathbb{P}_n(\overline{S_n(k)}) = 1 - \mathbb{P}_n\left(\bigcup_{i=1}^r A_n(p_i^k)\right) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r} (-1)^m \mathbb{P}_n(A_n(p_{i_1}^k) \cap A_n(p_{i_2}^k) \cap \dots \cap A_n(p_{i_m}^k)) \quad (\text{d'après la question précédente}) \end{aligned}$$

Ensuite, les entiers  $p_{i_1}^k, p_{i_2}^k, \dots, p_{i_m}^k$  sont deux à deux premiers entre eux et donc pour tout  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$(\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, p_{i_j}^k | m \Leftrightarrow p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k | m).$$

Ceci montre que  $A_n(p_{i_1}^k) \cap A_n(p_{i_2}^k) \cap \dots \cap A_n(p_{i_m}^k) = A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)$  et donc que

$$q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r} (-1)^m \mathbb{P}_n(A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)).$$

19 ▷ Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , déterminons  $\mathbb{P}_n(A_n(d))$ .  $A_n(d)$  est le nombre de multiples de  $d$  qui sont élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Or, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ,

$$1 \leq \ell d \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{d} \leq \ell \leq \frac{n}{d} \Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

Donc,  $\text{card}(A_n(d)) = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$  puis, la probabilité  $\mathbb{P}_n$  étant uniforme,  $\mathbb{P}_n(A_n(d)) = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ .

Pour tout  $m \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on note  $\mathcal{P}_n(m)$  l'ensemble des entiers éléments de  $\llbracket 2, n \rrbracket$  qui sont produit de  $m$  nombres premiers deux à deux distincts inférieurs ou égaux à  $n$ . Les entiers  $d$  éléments de  $\mathcal{P}_n(m)$  sont exactement les entiers de la forme  $d = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}$  avec  $m \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r$ . Pour un tel entier  $d$ ,

$$(-1)^m \mathbb{P}_n(A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)) = \mu(d) \mathbb{P}(A_n(d^k)) = \frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor,$$

et donc

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r} (-1)^m P_n(A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)) = \sum_{d \in \mathcal{P}_n(m)} \frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor.$$

Ensuite, si  $d$  admet au moins un facteur premier à un exposant supérieur ou égal 2, alors  $\mu(d) = 0$  puis  $\frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 0$ . D'autre part, si  $d > \frac{\ln(n)}{\ln(k)}$  de sorte que  $\frac{n}{d^k} < 1$ , alors  $\frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 0$ . Enfin,  $1 = \frac{\mu(1)}{n} \left\lfloor \frac{n}{1^k} \right\rfloor$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} q_n(k) &= 1 + \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r} (-1)^m P_n(A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)) \\ &= \frac{\mu(1)}{n} \left\lfloor \frac{n}{1^k} \right\rfloor + \sum_{m=1}^r \sum_{d \in \mathcal{P}_n(m)} \frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \\ &= \sum_{1 \leq d \leq \frac{\ln(n)}{\ln(k)}} \frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

**20** ▷ Soit  $k \geq 2$ . Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \frac{\mu(d)}{d^k} \right| \leq \frac{1}{d^k}$ . Ceci montre que la série de terme général  $\frac{\mu(d)}{d^k}$  est absolument convergente et donc convergente.

Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [d, d+1[$ ,  $f_n(t) = \frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor$ . On a donc,

$$q_n(k) = \sum_{d=1}^{+\infty} f_n(d) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_d^{d+1} f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt,$$

(la dernière intégrale converge car la fonction  $f_n$  est nulle sur un voisinage de  $+\infty$ ).

- Chaque fonction  $f_n$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .

- Soient  $t \in [1, +\infty[$  puis  $d = \lfloor t \rfloor$  de sorte que  $t \in [d, d+1[$  puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(t) = \frac{\mu(d)}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{d^k} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{d^k}$  puis

$$\frac{1}{d^k} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \leq \frac{1}{d^k}.$$

D'après le théorème des gendarmes,  $\frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^k}$  puis  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$ . Ainsi, la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

converge simplement sur  $[1, +\infty[$  vers la fonction  $f$  définie par :  $\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [d, d+1[$ ,  $f(t) = \frac{\mu(d)}{d^k}$ . De plus, la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $t \in [d, d+1[$ ,  $|f_n(t)| = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \leq \frac{1}{d^k} = \varphi(t)$ . La fonction  $\varphi$  est continue par morceaux, positive et intégrable sur  $[1, +\infty[$  car

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \sum_{d=1}^{+\infty} \int_d^{d+1} \varphi(t) dt = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^k} = \zeta(k) < +\infty \text{ (car } k \geq 2).$$

D'après le théorème de convergence dominée, la suite  $\left( \int_1^{+\infty} f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, la fonction  $f$  est intégrable et de

plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ . Plus explicitement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(k) = \int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{d=1}^{+\infty} \int_d^{d+1} f(t) dt = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}.$$

## Partie 4 : Calcul de la somme $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$

**21**  $\triangleright$   $F_N$  est contenu dans  $E_N$  par définition. D'autre part, pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^*$ , si  $(i, j) \in E_n$ , alors  $i \leq j \leq N \times N = N^2$  et de même,  $j \leq N^2$ . Donc,  $E_N \subset F_{N^2}$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_m \geq 0$  puis

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{m=1}^N \left( \sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \right) = \sum_{m=1}^N \left( \sum_{\substack{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ ij=m}} |u_i| v_j \right) = \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j \\ &\leq \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j = \left( \sum_i^N |u_i| \right) \left( \sum_{j=1}^N v_j \right) \\ &\leq \left( \sum_i^{+\infty} |u_i| \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} v_j \right) \end{aligned}$$

De plus,  $\sum_i^{+\infty} |u_i| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^s} < +\infty$ . Ainsi, la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  est majorée. Cette suite étant croissante, on en déduit que la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge.

Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{m=1}^N \left( \sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \right) \leq \left( \sum_i^{+\infty} |u_i| \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} v_j \right) = \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right)$ . Quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \right) \leq \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).$$

D'autre part, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_N \subset F_{N^2}$  et donc  $\sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j \leq \sum_{(i,j) \in F_{N^2}} |u_i| v_j$ . Quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right) &\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \right) \text{ et finalement} \\ \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \right) &= \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right). \end{aligned}$$

**22**  $\triangleright$  Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \left| \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) \left( \sum_{j=1}^N v_j \right) - \sum_{m=1}^N \left( \sum_{d|m} u_d v_{\frac{N}{d}} \right) \right| &= \left| \sum_{(i,j) \in E_N} u_i v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} u_i v_j \right| = \left| \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} u_i v_j \right| \text{ (car } F_N \subset E_N) \\ &\leq \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} |u_i| v_j = \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j. \end{aligned}$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j = S_N$  et  $\sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j = \left( \sum_{i=1}^N \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^s} \right)$ . D'après la question précédente,

$$\sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \text{ D'après le théorème des gendarmes,}$$

$$\left( \sum_{i=1}^n u_i \right) \left( \sum_{j=1}^N v_j \right) - \sum_{m=1}^N \left( \sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais,  $\left( \sum_{i=1}^n u_i \right) \left( \sum_{j=1}^N v_j \right)$  converge vers  $\left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right)$ . On en déduit que la suite  $\left( \sum_{m=1}^N \left( \sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right) \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge puis que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right) = \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).$$

Enfin, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} = \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{m^s} = \frac{1}{m^s} \sum_{d|m} \mu(d)$$

et on a donc montré que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \left( \sum_{d|m} \mu(d) \right) = \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).$$

**23**  $\triangleright \sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$ . Soit  $m \geq 2$ . Soit  $q_1, \dots, q_t$  les facteurs premiers deux à deux distincts de  $m$ . Si on pose  $m = q_1^{\alpha_1} \dots q_t^{\alpha_t}$  où les  $\alpha_i$  sont des entiers naturels non nuls, les diviseurs de  $m$  sont les entiers de la forme  $d = q_1^{\beta_1} \dots q_t^{\beta_t}$  où pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ ,  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{d|m} \mu(d) &= 1 + \sum_{i=1}^t \mu(q_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} \mu(q_i q_j) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t} \mu(q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_k}) + \dots + \mu(p_1 p_2 \dots p_t) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^t \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t} \mu(q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_k}) \right) = 1 + \sum_{k=1}^t (-1)^k \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t} 1 \right). \end{aligned}$$

Maintenant, il y a autant de  $k$ -uplets  $(i_1, \dots, i_k)$  d'éléments de  $\llbracket 1, t \rrbracket$  tels que  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  que de parties à  $k$  éléments de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , à savoir  $\binom{t}{k}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{d|m} \mu(d) &= 1 + \sum_{k=1}^t (-1)^k \binom{t}{k} = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} \\ &= (1 - 1)^t = 0 \text{ (car } t \geq 1 \text{)}. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**24**  $\triangleright$  D'après la question **23.**,  $\sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{d|m} \mu(d) \right) = \frac{1}{1^s} = 1$ . D'après la question **22.**,

$$1 = \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right) = \zeta(s) \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \text{ et donc,}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

**25** ▷ D'après les questions **20.** et **24.**,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(k) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} = \frac{1}{\zeta(k)}$ . En particulier, d'après la question **14.**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(2) = \frac{6}{\pi^2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(4) = \frac{90}{\pi^4}.$$