SESSION 2026

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PC

Partie 1. Résultats généraux

1 ▷ On sait que $\mathcal{S}(\mathsf{H})$ est un espace vectoriel. Ensuite, $\mathcal{B}(\mathsf{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}(\mathsf{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\mathsf{H})$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, contenue dans $\mathcal{S}(\mathsf{H})$.

2 ▷ Les éléments de $\mathcal{S}(\mathsf{E})$ sont les fonctions de la forme $f = f_0 + g$ où $g \in \mathcal{S}(\mathsf{H})$. Si $f \in \mathcal{B}(\mathsf{E})$, alors $g = f - f_0$ est dans $\mathcal{S}(\mathsf{H}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathsf{H})$ et si g est dans $\mathcal{B}(\mathsf{H})$, alors $f = f_0 + g$ est dans $\mathcal{S}(\mathsf{E}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathsf{E})$. En résumé, $\mathcal{B}(\mathsf{E}) = f_0 + \mathcal{B}(\mathsf{H})$.

3 ▷ Soit $f \in \mathcal{S}(\mathsf{E})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(T(f))''(x) + b(x)(T(f))(x) &= f''(x+2\pi) + b(x)f(x+2\pi) = f''(x+2\pi) + b(x+2\pi)f(x+2\pi)\\ &= c(x+2\pi) = c(x)\end{aligned}$$

et donc $T(f) \in \mathcal{S}(\mathsf{E})$.

4 ▷ Soit $f \in \mathcal{S}(\mathsf{E})$ telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$. Soit $h = T(f) - f$. Puisque $f \in \mathcal{S}(\mathsf{E})$ et $T(f) \in \mathcal{S}(\mathsf{E})$, $h \in \mathcal{S}(\mathsf{H})$. h vérifie donc le problème de Cauchy : $y'' + by = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ $(\star)$, de même que la fonction nulle. Puisque la fonction b est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que le problème $(\star)$ admet une unique solution et donc $h = 0$ puis $T(f) = f$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$.

Donc, la fonction f est 2π-périodique.

Partie 2. Un exemple d'équation à coefficients constants

5 ▷ Soient $d \in \mathbb{R}$ puis $f\ :\ x \mapsto d\cos(x)$. Pour tout réel x,

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = d\left(\omega^2 - 1\right)\cos(x)$$

Par hypothèse, $\omega^2 - 1 \neq 0$ puis la fonction $f_0\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\omega^2-1}\cos(x)$ est solution de (E).

Les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Le théorème de Cauchy linéaire montre l'existence et l'unicité des fonctions u et v. Les fonctions $u\ :\ x \mapsto \cos(\omega x)$ et $v\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x)$ conviennent.

6 ▷ D'après la question précédente, $\mathcal{S}(\mathsf{E}) = \left\{x \mapsto a\cos(\omega x) + \dfrac{b}{\omega}\sin(\omega x) + \dfrac{1}{\omega^2-1}\cos(x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Mais alors, toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}$ puis $\mathcal{B}(\mathsf{E}) = \mathcal{S}(\mathsf{E})$.

7 ▷ Pour tout réel x, $f''(x) + \omega^2 f(x) = \cos(x)$ et en particulier, $f''(T) + \omega^2 f(T) = \cos(T)$. Mais f est T-périodique et donc aussi f''. On en déduit que

$$\cos(T) = f''(T) + \omega^2 f(T) = f''(0) + \omega^2 f(0) = \cos(0) = 1$$

puis que $T \in 2\pi\mathbb{Z}$. Si on ne veut que les périodes T qui sont strictement positives, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T = 2k\pi$.

8 ▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ puis $T = 2k\pi$. On a nécessairement $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$ (car f' est également T-périodique).

$$\begin{aligned}f(0) = f(T) &\Leftrightarrow \frac{1}{\omega^2-1} + A = \frac{1}{\omega^2-1} + A\cos(2k\pi\omega) + B\frac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega}\\ &\Leftrightarrow (\cos(2k\pi\omega) - 1)A + \frac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega}B = 0.\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{1}{\omega^2-1}\sin(x) - A\omega\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ puis

$$f'(0) = f'(T) \Leftrightarrow B = -A\omega\sin(2k\pi\omega) + B\cos(2k\pi\omega) \Leftrightarrow -\omega\sin(2k\pi\omega)A + (\cos(2k\pi\omega) - 1)B = 0.$$

Le couple (A, B) vérifie donc nécessairement le système $\left\{\begin{array}{l}(\cos(2k\pi\omega) - 1)A + \dfrac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega}B = 0 \\ -\omega\sin(2k\pi\omega)A + (\cos(2k\pi\omega) - 1)B = 0\end{array}\right.$.

9 ▷ $\det(M) = (\cos(2k\pi\omega) - 1)^2 + \sin^2(2k\pi\omega)$ puis

$$\begin{aligned}\det(M) = 0 &\Leftrightarrow (\cos(2k\pi\omega) - 1)^2 = \sin^2(2k\pi\omega) = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)}\\ &\Leftrightarrow \cos(2k\pi\omega) = 1 \text{ et } \sin(2k\pi\omega) = 0 \Leftrightarrow 2k\pi\omega \in 2\pi\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z}/\ 2k\pi\omega = 2\ell\pi \Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z}/\ \omega = \frac{\ell}{k}.\end{aligned}$$

Donc, si $\omega \notin \mathbb{Q}$, alors $\det(M) \neq 0$ et donc, le système de la question précédente admet l'unique solution $(A, B) = (0, 0)$ et donc nécessairement $f = f_0$. Réciproquement f_0 est périodique.

On a montré que si $\omega \notin \mathbb{Q}$, (E) admet une unique solution périodique, la fonction f_0.

10 ▷ Posons $\omega = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\omega^2 - 1} + A\cos\left(\frac{p}{q}x\right) + B\sin\left(\frac{p}{q}x\right),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Toutes ces solutions sont $2q\pi$ périodiques.

Partie 3. Unicité lorsque la fonction b est négative

11 ▷ Par hypothèse, la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) - (1 + \cos(x))g(x) = 0$.

La fonction g^2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis $\left(g^2\right)' = 2gg'$ puis, pour tout réel x,

$$\left(g^2\right)''(x) = 2\left(g'^2(x) + g(x)g''(x)\right) = 2\left(g'^2(x) + (1 + \cos(x)g^2(x)\right) \geqslant 0.$$

La fonction g^2 est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

12 ▷ Si g^2 n'est pas constante, la fonction g^2 n'est pas bornée d'après le résultat admis par l'énoncé et il en est de même de la fonction g. Donc, si g est une solution bornée de (EH), g est nécessairement constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si g est la fonction constante $x \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$g \in \mathcal{S}(H) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (1 + \cos(x))\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (pour } \Leftarrow \text{ on évalue en } 0).$$

L'équation (EH) admet une solution bornée et une seule, à savoir la fonction nulle.

13 ▷ On suppose que (E) admet une solution bornée f_0. Pour toute fonction f, $f \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow f - f_0 \in \mathcal{S}(H)$ puis, d'après la question précédente,

$$f \in \mathcal{B}(E) \Leftrightarrow f - f_0 \in \mathcal{B}(H) \Leftrightarrow f - f_0 = 0 \Leftrightarrow f = f_0.$$

Ceci montre que (E) admet au plus une solution bornée.

14 ▷ Supposons que (E) admette une solution bornée f_0. D'après la question **3**, $T(f_0)$ est également solution de (E) (car b et c sont 2π-périodiques) et est bornée sur $\mathbb{R}$. Par unicité, $T(f_0) = f_0$ ou encore, f_0 est 2π-périodique.

Partie 4. Existence d'une solution périodique

15 ▷ Pour tout $n \geqslant 2$,

$$|a_n| = \frac{1}{2(n^2 + 1)}|a_{n-1} + a_{n+1}| \leqslant \frac{M + M}{2n^2} = \frac{M}{n^2}.$$

Mais alors, $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ puis la série de terme général a_n converge absolument et en particulier converge.

Ensuite, $n^2|a_n| = \dfrac{n^2}{2(n^2+1)}|a_{n-1}+a_{n+1}| \underset{n\to+\infty}{=} O(1)O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc, la série de terme général n^2a_n est également absolument convergente.

16 ▷ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = a_n\sin(nx)$.

- Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|g_n(x)|\leqslant|a_n|$. Puisque la série de terme général a_n est absolument convergente, la série de terme $g_n(x)$ est absolument convergente et en particulier convergente. La série de fonctions de terme général g_n converge simplement vers la fonction g sur $\mathbb{R}$.
- Chaque fonction g_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $g_n'(x) = na_n\cos(nx)$ et $g_n''(x) = -n^2a_n\sin(nx)$.
- Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|g_n'(x)|\leqslant n|a_n|$ et de plus $n|a_n| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ avec $3>1$. Donc, la série de terme général $g_n'(x)$ converge absolument et en particulier converge. Ainsi, la série de fonctions de terme général g_n' converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|g_n''(x)|\leqslant n^2|a_n|$ puis $\|g_n''\|_\infty\leqslant n^2|a_n|$. Puisque la série de terme général $n^2|a_n|$ converge, la série de fonctions de terme général g_n'' converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme généralisé, la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g_n''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2a_n\sin(nx).$$

Par suite, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
g''(x)-(1+\cos(x))g(x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2a_n\sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\sin(nx)\cos(x)\\
&= -2a_1\sin(x) - \sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2+1\right)a_n\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\sin((n+1)x)+\sin((n-1)x))\\
&= -2a_1\sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n+1}+a_{n-1})\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1}\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}\sin(nx)\\
&= \left(-2a_1 - \frac{1}{2}a_2\right)\sin(x) = \sin(x).
\end{aligned}$$

17 ▷ La famille $(s_1,\ldots,s_N)$ est une famille génératrice de $\mathcal{P}_N$.

Ensuite, classiquement, l'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

Soit $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n\neq m$.

$$\begin{aligned}
\langle s_n,s_m\rangle &= \int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((n-m)t)-\cos((n+m)t))\ dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m} + \frac{\sin((n+m)t)}{n+m}\right]_0^{2\pi}\ \text{(car } n-m\neq 0 \text{ et } n+m\neq 0)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(s_1,\ldots,s_N)$ est une famille orthogonale de $\mathcal{P}_N$, constituée de vecteurs tous non nuls. On sait qu'une telle famille est libre.

Finalement, la famille $(s_1,\ldots,s_N)$ est une base de $\mathcal{P}_N$.

18 ▷ Soit $n\geqslant 1$. Pour tout réel x,

$$L(s_n)(x) = -n^2\sin(nx) - (1+\cos(x))\sin(nx) = -\left(n^2+1\right)\sin(nx) - \frac{1}{2}(\sin((n+1)x)+\sin((n-1)x)),$$

et donc $\mathsf{L}(s_n) = -\dfrac{1}{2}s_{n-1} - (n^2+1)\,s_n - \dfrac{1}{2}s_{n+1}$.

19 ▷ Soient $(p,q) \in \mathcal{P}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\mathsf{L}(\lambda p + \mu q)(x) &= (\lambda p + \mu q)''(x) - (1+\cos(x))(\lambda p + \mu q)(x) \\ &= \lambda(p''(x) - (1+\cos(x))p(x)) + \mu(q''(x) - (1+\cos(x))q(x)) \\ &= (\lambda \mathsf{L}(p) + \mu \mathsf{L}(q))(x)\end{aligned}$$

et donc, $\mathsf{L}(\lambda p + \mu q) = \lambda \mathsf{L}(p) + \mu \mathsf{L}(q)$. L est linéaire sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Ensuite, $\mathsf{L}(\mathcal{P}) = \mathrm{Vect}\,(\mathsf{L}(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*} = \mathrm{Vect}\left(-\dfrac{1}{2}s_{n-1} - (n^2+1)\,s_n - \dfrac{1}{2}s_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{P}$. Donc, L est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

Soit $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$. Il existe au moins un entier naturel non nul n tel que $p \in \mathcal{P}_n$ et on peut donc considérer $\mathsf{N} = \mathrm{Min}\{n \in \mathbb{N}^* / \ p \in \mathcal{P}_n\}$. Il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_\mathsf{N}) \in \mathbb{R}^\mathsf{N}$ tel que $p = \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathsf{N}} \alpha_n s_n$ et $\alpha_\mathsf{N} \neq 0$ (sinon $p \in \mathcal{P}_{\mathsf{N}-1}$ ce qui contredit la définition de N).

$$\mathsf{L}(p) = \sum_{n=1}^{\mathsf{N}} \alpha_n \left(-\frac{1}{2}s_{n-1} - (n^2+1)\,s_n - \frac{1}{2}s_{n+1}\right) = -\frac{\alpha_\mathsf{N}}{2}s_{\mathsf{N}+1} + q_\mathsf{N}$$

où $q_\mathsf{N} \in \mathrm{Vect}\,(s_1,\dots,s_\mathsf{N})$. Puisque la famille $(s_1,\dots,s_\mathsf{N},s_{\mathsf{N}+1})$ est libre, l'égalité $\mathsf{L}(p) = 0$ entraine $\alpha_\mathsf{N} = 0$ ce qui est faux. Donc, $\mathsf{L}(p) \neq 0$.

On a montré que $\mathrm{Ker}(\mathsf{L}) = \{0\}$ et donc L est injectif. Ensuite, avec les notations précédentes,

$$\mathsf{L}(p) = s_1 \Leftrightarrow -\frac{\alpha_\mathsf{N}}{2}s_{\mathsf{N}+1} + \underbrace{q_\mathsf{N} - s_1}_{\in \mathcal{P}_\mathsf{N}} = 0.$$

De nouveau, cette égalité est impossible car $-\dfrac{\alpha_\mathsf{N}}{2} \neq 0$ et par liberté de la famille $(s_1,\dots,s_{\mathsf{N}+1})$. Donc, $s_1 \notin \mathrm{Im}(\mathsf{L})$.

20 ▷ Soit $\mathsf{N} \geqslant 1$. D'après ce qui précède, $\mathsf{L}(\mathcal{P}_\mathsf{N})$ et $\mathcal{P}_1$ sont des sous-espaces de $\mathcal{P}_{\mathsf{N}+1}$ tels que $\mathsf{L}(\mathsf{P}_\mathsf{N}) \cap \mathcal{P}_1 = \{0\}$ (I). Ensuite, puisque la famille $(s_1,\dots,s_{\mathsf{N}+1})$ est une base de $\mathcal{P}_{\mathsf{N}+1}$ et donc $\dim(\mathcal{P}_{\mathsf{N}+1}) = \mathsf{N}+1$.
D'autre part, puisque L est injectif, $\dim(\mathsf{L}(\mathcal{P}_\mathsf{N})) = \dim(\mathcal{P}_\mathsf{N}) = \mathsf{N}$. On en déduit que

$$\dim(\mathcal{P}_{\mathsf{N}+1}) = \mathsf{N}+1 = \dim(\mathsf{L}(\mathsf{P}_\mathsf{N})) + \dim(\mathcal{P}_1) \quad \text{(II)}.$$

(I) et (II) entrainent $\mathcal{P}_{\mathsf{N}+1} = \mathsf{L}(\mathcal{P}_\mathsf{N}) \oplus \mathcal{P}_1$.

21 ▷ Soit $c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$. Il existe $\mathsf{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $c \in \mathcal{P}_{\mathsf{N}+1}$. Puisque $\mathcal{P}_{\mathsf{N}+1} = \mathsf{L}(\mathcal{P}_\mathsf{N}) \oplus \mathcal{P}_1$, il existe $(\alpha, p_\mathsf{N}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_\mathsf{N}$ tel que $c = \alpha s_1 + \mathsf{L}(p_\mathsf{N})$.

Soit $f_0 = \alpha g + p_\mathsf{N}$. g est solution de l'équation $y'' - (1+\cos(x))y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ et p_N est solution de l'équation $y'' - (1+\cos(x))y = \mathsf{L}(p_\mathsf{N})$ sur $\mathbb{R}$. D'après le principe de superposition des solutions, f_0 est solution de l'équation $y'' - (1+\cos(x))y = c$ sur $\mathbb{R}$. De plus, f_0 est 2π-périodique car g et p_N le sont.

Partie 5. Un théorème général

22 ▷ D'après la question **2**, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{E}) = f_0 + \mathcal{B}(\mathsf{H})$ puis $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ où $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}\,(f_0) + \mathcal{B}(\mathsf{H})$. D'après la question **1**, $\mathcal{B}(\mathsf{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathsf{H})$ et donc $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel contenant $\mathcal{A}$.

Ensuite, $\dim(\mathcal{H}) \leqslant \dim(\mathrm{Vect}\,(f_0)) + \dim(\mathcal{B}(\mathsf{H})) \leqslant 1 + \dim(\mathcal{S}(\mathsf{H})) = 3 < +\infty$. $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel de dimension finie contenant $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ contient f_0 et n'est donc pas vide. De plus, $\mathcal{A}$ est par définition une partie bornée de $\mathcal{H}$. Enfin, $\mathcal{B}(\mathsf{E})$ est un sous-espace affine de l'espace de dimension finie $\mathcal{H}$ et donc une partie fermée de $\mathcal{H}$. D'autre part, $\mathsf{B}_f(0,\mathsf{M}_0) = \{f \in \mathcal{H} / \ \|f\| \leqslant \mathsf{M}_0\}$ est une partie fermée de $\mathcal{H}$. Donc, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{E}) \cap \mathsf{B}_f(0,\mathsf{M}_0)$ est un fermé de $\mathcal{H}$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathcal{H}$.

En résumé, $\mathcal{H} = \text{Vect}\,(f_0) + \mathcal{B}(H)$ est un espace vectoriel de dimension finie contenant $\mathcal{A}$ et de plus, $\mathcal{A}$ est une partie non vide, fermée et bornée de $\mathcal{H}$.

23 ▷ Puisque $\mathcal{A} \neq \varnothing$, $\mathcal{I}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. De plus, $\mathcal{I}$ est minorée par 0. Donc, $\mathcal{I}$ admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & |f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)| \end{array}$. La forme linéaire $f \mapsto f(2\pi) - f(0)$ est continue sur l'espace de dimension finie $\mathcal{H}$ de même que la forme linéaire $f \mapsto f'(2\pi) - f'(0)$. Mais alors, la fonction φ est continue sur $\mathcal{H}$.

L'application φ est continue sur $\mathcal{A}$ qui est une partie fermée, bornée, non vide de l'espace de dimension finie $\mathcal{H}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction φ admet un minimum sur $\mathcal{A}$. On a donc montré qu'il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ telle que $\alpha = |f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f_1'(2\pi) - f_1'(0)|$.

24 ▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = T^k\,(f_0)\,(x) = f_0(x + 2k\pi)$. D'après la question **3**, chaque fonction f_k est un élément de $\mathcal{S}(E)$ et peut donc s'écrire sous la forme $f_k = f_0 + h_k$ où $h_k \in \mathcal{S}(H)$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n = f_0 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} h_k \in f_0 + \mathcal{S}(H) = \mathcal{S}(E).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} M_0 = M_0$ et donc, $\|g_n\|_\infty \leqslant M_0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{A}$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\varphi\,(g_n) &= |g_n(2\pi) - g_n(0)| + |g_n'(2\pi) - g_n'(0)| \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f_0(2(k+1)\pi) - f_0(2k\pi)\right)\right| + \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f_0'(2(k+1)\pi) - f_0'(2k\pi)\right)\right|\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(|f_0(2(n+1)\pi) - f_0(0)| + |f_0'(2(n+1)\pi) - f_0'(0)|\right)\ \text{(sommes télescopiques)} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left(|f_0(2(n+1)\pi)| + |f_0(0)| + |f_0'(2(n+1)\pi)| + |f_0'(0)|\right) \\
&\leqslant \frac{2\,(M_0 + M_1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \varphi\,(f_1) \leqslant \varphi\,(g_n) \leqslant \dfrac{2\,(M_0 + M_1)}{n+1}$.

25 ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{2\,(M_0 + M_1)}{n+1}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\alpha = 0$ ou encore $|f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f_1'(2\pi) - f_1'(0)| = 0$. Ceci entraine que f_1 est une solution de (E) vérifiant $f_1(2\pi) = f_1(0)$ et $f_1'(2\pi) = f_1'(0)$ (réels positifs de somme nulle). Mais alors, d'après la question **4**, f_1 est une solution de (E) qui est 2π-périodique.

