

A Réduction des endomorphismes de carré nul

1 ▷ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Le polynôme X^2 est annulateur de u et on sait que toute valeur propre de u est racine de ce polynôme annulateur. Donc, 0 est l'unique valeur propre de u ou encore $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = (0, \dots, 0)$. Puisque la trace de u est la somme de ses valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité, $\text{tr}(u) = 0$.

2 ▷ $u^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, u(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, u(x) \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

Mais alors, d'après le théorème du rang, $r = \dim(\text{Im}(u)) \leq \dim(\text{Ker}(u)) = n - r$ puis

$$(1 \leq) r \leq \frac{n}{2}.$$

3 ▷ $\dim(\text{Ker}(u)) = n - r$. Soit F un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$. F est de dimension r . On peut donc considérer $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F . Par construction,

$$E = \text{Ker}(u) \oplus F = \text{Ker}(u) \oplus \text{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \lambda_k u(e_k) = 0 &\Rightarrow u\left(\sum_{k=1}^r \alpha_k e_k\right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^r \alpha_k e_k \in \text{Ker}(u) \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^r \alpha_k e_k = 0 \text{ (car } \text{Ker}(u) \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = \{0\}) \\ &\Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \alpha_k = 0 \text{ (car } (e_k)_{1 \leq k \leq r} \text{ est libre)}. \end{aligned}$$

On a montré que la famille $(u(e_k))_{1 \leq k \leq r}$ est libre.

4 ▷ On pose $e_{r+1} = u(e_1)$, $e_{r+2} = u(e_2)$, $\dots$, $e_{2r} = u(e_r)$. $(e_{r+1}, \dots, e_{2r})$ est une famille libre de $\text{Im}(u)$ d'après la question précédente, de cardinal $r = \dim(\text{Im}(u))$. Donc, $(e_{r+1}, \dots, e_{2r})$ est une base de $\text{Im}(u)$ puis une famille libre de $\text{Ker}(u)$. On complète cette famille en $(e_{r+1}, \dots, e_{2r}, \dots, e_n)$ base de $\text{Ker}(u)$.

$(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\text{Ker}(u)$. Puisque $E = F \oplus \text{Ker}(u)$, on sait que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . De plus, par construction,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_r & 0_r & 0_{r, n-2r} \\ I_r & 0_r & 0_{r, n-2r} \\ 0_{n-2r, r} & 0_{n-2r, r} & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

5 ▷ Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $\mathcal{B}'$ base de E dans laquelle la matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 0_m & 0_m & 0_{m, n-2m} \\ I_m & 0_m & 0_{m, n-2m} \\ 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m} \end{pmatrix}$. En supprimant, les lignes et les colonnes nulles, on obtient

$$r = \text{rg}(u) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0_m & 0_m & 0_{m, n-2m} \\ I_m & 0_m & 0_{m, n-2m} \\ 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m} \end{pmatrix} = \text{rg}(I_m) = m,$$

et donc, $m = r$. Ceci montre l'unicité de m .

B Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

6 ▷ Soit $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. On sait que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$. Redémontrons le. Soit $(u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned} (E_{i,j}E_{k,\ell})_{u,v} &= \sum_{w=1}^n (E_{i,j})_{u,w} (E_{k,\ell})_{w,v} = \sum_{w=1}^n \delta_{u,i} \delta_{w,j} \delta_{w,k} \delta_{v,\ell} = \delta_{u,i} \delta_{v,\ell} \sum_{w=1}^n \delta_{w,j} \delta_{w,k} = \delta_{j,k} \delta_{u,i} \delta_{v,\ell} \\ &= \delta_{j,k} (E_{i,\ell})_{u,v}. \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat.

En particulier, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(E_{i,j})^2 = \delta_{i,j}E_{i,j} = \begin{cases} E_{i,i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned} (F_{i,j})^2 &= (E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}) (E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}) \\ &= E_{i,i} - 0 + E_{i,j} - 0 - 0 + E_{j,j} - 0 + E_{j,i} + 0 - E_{i,j} + 0 - E_{i,i} - E_{j,i} + 0 - E_{j,j} + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

7 ▷ Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{H}_n$. Donc, $\sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} a_{i,j} E_{i,j} \\ &= a_{n,n} E_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} (F_{i,n} + E_{n,n} - E_{i,n} + E_{n,i}) + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} a_{i,j} E_{i,j} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) E_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} F_{i,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} (-E_{i,n} + E_{n,i}) + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} a_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} F_{i,n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} (-E_{i,n} + E_{n,i}) + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} a_{i,j} E_{i,j}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat.

8 ▷ Ainsi, tout élément de $\mathcal{H}_n$ est somme de matrices de carré nul puis tout élément de $\mathcal{H}(E)$ est somme d'endomorphismes de carré nul. Donc, $\mathcal{H}(E) \subset \Sigma_\infty \mathcal{C}(E)$. D'autre part, d'après la question 1, tout endomorphisme de carré nul (y compris 0) a une trace nulle puis, par linéarité de la trace, tout élément de $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E)$ a une trace nulle. Donc, $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) \subset \mathcal{H}(E)$ et finalement,

$$\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E).$$

C Somme de trois endomorphismes de carré nul

9 ▷ Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Soit u l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -(n-1))$. Déjà, $\text{Tr}(u) = (n-1) - (n-1) = 0$. Ensuite, $d = \dim \text{Ker}(u - \text{Id}) = n-1 > 0$. Enfin,

$$d - \frac{3n}{4} = n-1 - \frac{3n}{4} = \frac{n-4}{4} > 0 \text{ (car } n \geq 5)$$

puis $d > \frac{3n}{4}$. Donc, u convient.

10 ▷ $(w-v)^2 = w(w-v) - vw$ puis $\text{Im}((w-v)^2) \subset \text{Im}(w) + \text{Im}(vw)$ puis

$$\operatorname{rg}((w-v)^2) \leq \operatorname{rg}(w) + \operatorname{rg}(w) = 2\operatorname{rg}(w) = 2(n-d) < 2\left(n - \frac{3n}{4}\right) = \frac{n}{2}.$$

(car pour tout $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$ et $\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min\{\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\}$).

On a montré que $\operatorname{rg}((w-v)^2) < \frac{n}{2}$.

11 ▷ On pose $f = u - v$. Alors, $w - v = (u - v) - \operatorname{Id}_E = f - \operatorname{Id}_E$. Pour tout $x \in \operatorname{Ker}((f - \operatorname{Id}_E)^2)$,

$$(f - \operatorname{Id}_E)^2(f(x)) = f((f - \operatorname{Id}_E)^2(x)) = 0$$

et donc, $F = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)^2$ est stable par f . On note f_F l'endomorphisme induit. Le polynôme $(X-1)^2$ est annulateur de f_F et 1 est l'unique racine de ce polynôme. Donc, 1 est l'unique valeur propre de f_F . On en déduit que $\chi_{f_F} = (X-1)^k$ où $k = \dim(F) = n - \operatorname{rg}((w-v)^2)$.

En complétant une base de F en une base de E et en écrivant la matrice de $f = u - v$ dans cette base, on obtient $\chi_f = \chi_{f_F} \times Q = (X-1)^k Q$ pour un certain polynôme Q . 1 est donc valeur propre de $f = u - v$ de multiplicité supérieure ou égale à $k = n - \operatorname{rg}((w-v)^2)$.

12 ▷ D'après les questions **10** et **11**, 1 est valeur propre de $u - v$ d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à $n - \operatorname{rg}((w-v)^2)$ et donc d'ordre strictement supérieur à $n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

D'autre part, on sait que $\chi_{-(u-v)} = \chi_{\varphi \circ (u-v) \circ \varphi^{-1}} = \chi_{u-v}$ et donc 1 est valeur propre de $-(u-v)$ d'ordre strictement supérieur à $\frac{n}{2}$ ou encore -1 est valeur propre de $u - v$ d'ordre strictement supérieur à $\frac{n}{2}$.

13 ▷ Si par l'absurde $u \in \Sigma_3\mathcal{C}(E)$, il existe $(v, v', v'') \in \mathcal{C}(E)^3$ tel que $u = v + v' + v''$. L'endomorphisme $u - v = v' + v''$ est dans $\Sigma_2\mathcal{C}(E)$ et d'après le théorème de WANG et WU, il existe $\varphi \in \operatorname{GL}(E)$ tel que $-(u-v) = \varphi \circ (u-v) \circ \varphi^{-1}$.

D'après la question précédente, 1 et -1 sont valeurs propres de $u - v$ d'ordre strictement supérieur à $\frac{n}{2}$ ce qui est impossible car la somme de ces ordres ne peut pas être strictement supérieure à $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.

Donc, $u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E)$.

D Intermède : matrices de Hessenberg

14 ▷ Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ défini par : $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$.

Soit $x \in \mathbb{C}$. La matrice $(x\widetilde{I_n} - A)^{(1,n)}$ est triangulaire inférieure. Son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux : $\det((x\widetilde{I_n} - A)^{(1,n)}) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1,i}$. De plus, A étant régulière $(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1,i} \neq 0$. Pour tout

$x \in \mathbb{C}$, on pose $P_1(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1,i}$. P_1 est un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant $(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1,i}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \det((x\widetilde{I_n} - A)^{(1,n)}) = P_1(x).$$

De plus, P_1 est uniquement défini.

Soit $x \in \mathbb{C}$. La matrice $(x\widetilde{I_n} - A)^{(n,n)}$ est la matrice $xI_{n-1} - A_{n-1}$. Si on pose pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P_n(x) = \chi_{A_{n-1}}(x)$, P_n est un polynôme unitaire de degré $n-1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \det((x\widetilde{I_n} - A)^{(n,n)}) = P_n(x).$$

De plus, P_n est uniquement défini.

Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Soit $x \in \mathbb{C}$. $\left(\widetilde{xI_n - A}\right)^{(k,n)}$ peut s'écrire par blocs sous la forme

$$\left(\widetilde{xI_n - A}\right)^{(k,n)} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-k,k-1} & D \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathcal{M}_{k-1}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ puis, $\left(\widetilde{xI_n - A}\right)^{(k,n)} = \det(B)\det(D)$. B est la matrice $xI_{k-1} - A_{k-1}$ et donc $\det(B) = \chi_{A_{k-1}}(x)$. D'autre part, la matrice D est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $-a_{k+1,k}, \dots, -a_{n,n-1}$.

Donc, $\det(D) = (-1)^{n-k-1} \prod_{i=k}^{n-1} a_{i+1,i}$. Ainsi, si pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $P_k(x) = \left((-1)^{n-k-1} \prod_{i=k}^{n-1} a_{i+1,i}\right) \chi_{A_{k-1}}(x)$,

P_k est un polynôme de degré $k-1$ (car $\prod_{i=k}^{n-1} a_{i+1,i} \neq 0$) et de coefficient dominant $(-1)^{n-k-1} \prod_{i=k}^{n-1} a_{i+1,i}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \det\left(\left(\widetilde{xI_n - A}\right)^{(k,n)}\right) = P_k(x).$$

De plus, P_k est uniquement défini.

15 $\triangleright$ On pose de plus $P_{n+1} = XP_n$. Les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$, sont $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$ tels que, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\deg(P_k) = k-1$. On sait alors que $(P_1, \dots, P_{n+1})$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Soient alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{C}^n$ puis $P = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k P_k$. Puisque $\sum_{k=1}^n \alpha_k P_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et que $\deg(P_{n+1}) = n$, P est de

degré n et unitaire si et seulement si $\alpha_{n+1} = 1$. On pose donc plus précisément $P = P_{n+1} + \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k$. Le coefficient de X^{n-1} dans P est issu uniquement du polynôme

$$P_{n+1} + \alpha_n P_n = X\chi_{A_{n-1}} + \alpha_n \chi_{A_{n-1}},$$

et est donc égal à $-\text{Tr}(A_{n-1}) + \alpha_n$. Par suite, le coefficient de X^{n-1} dans P est égal à $-\text{Tr}(A)$ si et seulement si $-\text{Tr}(A_{n-1}) + \alpha_n = -\text{Tr}(A)$ ou encore $\alpha_n = \text{Tr}(A_{n-1}) - \text{Tr}(A)$ ou enfin, $\alpha_n = -a_{n,n}$. On pose donc encore plus précisément

$$P = P_{n+1} - a_{n,n} P_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k P_k.$$

Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\chi_{A+E_C} = (X - a_{n,n}) P_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k} (-a_{k,n} - c_k) P_k = P_{n+1} - a_{n,n} P_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k+1} (a_{k,n} + c_k) P_k.$$

Puisque $(P_1, \dots, P_{n+1})$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$,

$$\begin{aligned} \chi_{A+E_C} = P &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, (-1)^{n+k+1} (a_{k,n} + c_k) = \alpha_k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, c_k = -a_{k,n} + (-1)^{n+k+1} \alpha_k. \end{aligned}$$

Ceci montre l'existence et l'unicité du vecteur colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\chi_{A+E_C} = P$.

16 $\triangleright$ J_n est une matrice d'HESENBERG régulière. De plus, J_n est triangulaire inférieure et donc

$$\chi_{J_n+E_0} = \chi_{J_n} = \prod_{k=1}^n (X - 0) = X^n.$$

Mais alors, par unicité, $C = 0$.

17 ▷ Par hypothèse $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u)$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
 où de plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$a_{i+1,i} \neq 0$.

Montrons que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il existe $v_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ tel que $u^k(e_1) = a_{2,1}a_{3,2} \dots a_{k+1,k}e_{k+1} + v_k$

- Puisque $u(e_1) = a_{2,1}e_2 + a_{1,1}e_1$, le résultat est vrai quand $k = 1$ en prenant $v_1 = a_{1,1}e_1$.
- Soit $k \geq 1$. Supposons qu'il existe $v_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ tel que $u^k(e_1) = a_{2,1}a_{3,2} \dots a_{k+1,k}e_{k+1} + v_k$. Alors,

$$u^{k+1}(e_1) = a_{2,1}a_{3,2} \dots a_{k+1,k}u(e_{k+1}) + u(v_k).$$

Ensuite, $u(v_k) \in \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_k)) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$. D'autre part, $u(e_{k+1})$ s'écrit $a_{k+2,k+1}e_{k+2} + w_k$ où w_k est un élément de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$. En posant $v_{k+1} = w_k + u(v_k)$, v_{k+1} est un élément de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ tel que $u^{k+1}(e_1) = a_{2,1}a_{3,2} \dots a_{k+1,k}a_{k+2,k+1}e_{k+2} + v_{k+1}$.

Le résultat est démontré par récurrence. En tenant compte de $u^0(e_1) = e_1$, la matrice de la famille $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$ dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux, à savoir $1, a_{2,1}, a_{2,1}a_{3,2}, \dots, a_{2,1}a_{3,2} \dots a_{n,n-1}$, sont tous non nuls. Cette matrice est donc inversible et on a montré que la famille $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de E .

18 ▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de HESSENBERG régulière dont le polynôme caractéristique est X^n . Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, puisque $\chi_u = \chi_A = X^n$, on a $u^n = 0$.

D'après la question précédente, la famille $\mathcal{B} = (u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et, en tenant compte de $u^n = 0$, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est J_n . Ceci montre que A est semblable à J_n .

E Somme de quatre endomorphismes de carré nul

19 ▷ Puisque $a_{n,n-1} \neq 0$, la matrice $A + V = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice de HESSENBERG régulière. De plus, $\text{Tr}(A + V) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(V) = 0$. D'après la question **15**, il existe $C_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que polynôme caractéristique de $A + V + E_{C_0}$ soit X^n . D'après la question **18**, la matrice $A + V + E_{C_0}$ est semblable à la matrice J_n .

20 ▷ On pose $B_1 = \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} E_{2k,2k-1} = E_{2,1} + E_{4,3} + \dots$ et $B_2 = \sum_{1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} E_{2k+1,2k} = E_{3,2} + E_{5,4} + \dots$

Alors, $B_1 + B_2 = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k+1,k} = J_n$. D'autre part,

$$B_1^2 = \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}, 1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}} E_{2k,2k-1} E_{2\ell,2\ell-1} = 0,$$

(car l'entier pair $2k$ n'est jamais égal à l'entier impair $2\ell - 1$) et de même, $B_2^2 = 0$.

21 ▷ Posons $C = (c_i)_{1 \leq i \leq n-1}$. Alors, $V + E_C = \sum_{k=1}^{n-1} (E_{k+1,k} + c_k E_{k,n})$. On pose $B_3 = \sum_{1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} (E_{2k,2k-1} + c_{2k} E_{2k,n})$ et

$B_4 = \sum_{1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}} E_{2k+1,2k} + \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} c_{2k-1} E_{2k-1,n}$ de sorte que $V + E_C = B_3 + B_4$.

$$B_3^2 = \sum_{1 \leq k, \ell \leq \frac{n-1}{2}} E_{2k, 2k-1} E_{2\ell, 2\ell-1} + \sum_{1 \leq k, \ell \leq \frac{n-1}{2}} c_{2\ell} E_{2k, 2k-1} E_{2\ell, n} \\ + \sum_{1 \leq k, \ell \leq \frac{n-1}{2}} c_{2k} E_{2k, n} E_{2\ell, 2\ell-1} + \sum_{1 \leq k, \ell \leq \frac{n-1}{2}} c_{2k} c_{2\ell} E_{2k, n} E_{2\ell, n}$$

Dans les deux premières sommes, tous les termes sont nuls car l'entier impair $2k-1$ n'est jamais égal à l'entier pair 2ℓ . Dans les deux dernières sommes, l'entier 2ℓ est inférieur ou égal à $n-1$ et n'est donc jamais égal à n . Les deux dernières sommes sont également nulles. Finalement, $B_3^2 = 0$. De même, $B_4^2 = 0$ pour des raisons analogues.

On a montré que pour tout $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$, il existe deux matrices carrées B_3 et B_4 , de carré nul, telles que $V + E_C = B_3 + B_4$.

22 $\triangleright$ Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie.

1er cas. On suppose que v admet au moins deux valeurs propres distinctes λ et μ . On note x et y des vecteurs propres respectivement associés à λ et μ . Puisque $\lambda \neq \mu$, on sait que la famille (x, y) est libre puis, $F = \text{Vect}(x, y)$ est un plan vectoriel. De plus,

$$v(F) = \text{Vect}(v(x), v(y)) = \text{Vect}(\lambda x, \mu y) \subset \text{Vect}(x, y) = F.$$

Donc, F est un plan vectoriel stable par v . $x + y$ est dans F et $x + y \neq 0$ (car (x, y) libre). Supposons par l'absurde que $x + y$ soit aussi un vecteur propre de v . Il existe $\nu \in \mathbb{C}$ tel que $v(x + y) = \nu(x + y)$. Mais alors

$$\nu x + \nu y = v(x + y) = v(x) + v(y) = \lambda x + \mu y.$$

Puisque la famille (x, y) est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda = \nu = \mu$ ce qui contredit $\lambda \neq \mu$. Donc, $x + y$ est un élément non nul du plan vectoriel F qui n'est pas un vecteur propre de v .

2ème cas. Sinon, v admet une unique valeur propre λ puis il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de

v est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Puisque v n'est pas une homothétie, il existe un couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que

$i < j$ et $a_{i,j} \neq 0$. On note alors $k (\geq 2)$ le plus petit indice j tel qu'il existe $i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$ tel que $a_{i,j} \neq 0$. Par définition, pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $v(e_i) = \lambda e_i$ et d'autre part, $v(e_k) = \lambda e_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} e_i$.

On pose alors $x = e_k$, $y = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} e_i$ puis $F = \text{Vect}(x, y)$. Puisque la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est libre et que l'un des $a_{i,k}$

est non nul, la famille (x, y) est libre puis F est un plan vectoriel. Ensuite, $v(x) = \lambda e_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} e_i = \lambda x + y \in F$ et

$$v(y) = \lambda \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} e_i = \lambda y \in F.$$

Donc, $v(F) = \text{Vect}(v(x), v(y)) \subset \text{Vect}(x, y)$ puis F est un plan vectoriel stable par v . Enfin, si par l'absurde, x est un vecteur propre de v , x est nécessairement associé à la valeur propre λ . Ceci fournit $\sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} e_i = 0$ puis, pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $a_{i,k} = 0$, ce qui contredit la définition de k . Donc, x n'est pas un vecteur propre de v .

Dans tous les cas, on a trouvé un plan vectoriel stable par v et contenant au moins un vecteur non nul qui n'est pas un vecteur propre de v .

23 $\triangleright$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \text{Vect}(I_n)$. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A . v n'est pas une homothétie et donc il existe un plan vectoriel stable F par v et contenant au moins un vecteur non nul qui n'est pas un vecteur propre de v .

Soit e_1 un vecteur non nul de F qui n'est pas un vecteur propre de v . On complète la famille libre (e_1) de F en une base (e_1, e_2) de F puis on complète la famille libre (e_1, e_2) de E en $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ de E . La matrice de v dans cette base

est de la forme $\begin{pmatrix} B & D' \\ 0_{n-2,2} & C' \end{pmatrix}$ où de plus $b_{2,1} \neq 0$ car e_1 n'est pas vecteur propre de v . La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} B & D' \\ 0_{n-2,2} & C' \end{pmatrix}$.

Maintenant, la matrice C' est triangulable dans $\mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ et il existe donc $P' \in \text{GL}_{n-2}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{T}_{n-2,s}(\mathbb{C})$ telles que $C' = P'CP'^{-1}$.

Soit P la matrice définie par blocs : $P = \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & P' \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et que

$P^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & P'^{-1} \end{pmatrix}$. Ensuite, toujours grâce à un calcul par blocs et en posant $D = D'P'^{-1}$,

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} B & D' \\ 0_{n-2,2} & C' \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & D' \\ 0_{n-2,2} & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & P'^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B & D' \\ 0_{n-2,2} & P'C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & P'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & D'P'^{-1} \\ 0_{n-2,2} & P'C'P'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & D \\ 0_{n-2,2} & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De nouveau, la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} B & D \\ 0_{n-2,2} & C \end{pmatrix}$ où de plus $b_{2,1} \neq 0$ et $C \in \mathcal{T}_{n-2,s}$.

24 ▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \text{Vect}(I_n)$. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice A^T . v n'est pas une homothétie et donc, d'après la question **22**, il existe un plan P qui est v -stable. On note G un supplémentaire de P dans $\mathbb{C}^n$ puis $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = G \oplus P$. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est de la forme $\begin{pmatrix} C & 0_{n-2,2} \\ D & B \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{R})$ et $(B^T)_{2,1} \neq 0$. A^T est alors semblable à la matrice $\begin{pmatrix} C & 0_{n-2,2} \\ D & B \end{pmatrix}$ puis A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} C^T & D^T \\ 0_{2,n-2} & B^T \end{pmatrix}$. De plus,

Ensuite, C^T est triangulable dans $\mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ et donc il existe $P_1 \in \text{GL}_{n-2}(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_{n-2,s}(\mathbb{C})$ telles que $C^T = P_1 T P_1^{-1}$. Soit $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. Toujours par un calcul par blocs,

$$\begin{aligned} P^{-1} A' P &= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^T & D^T \\ 0_{2,n-2} & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} C^T & P_1^{-1} D^T \\ 0_{2,n-2} & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} C^T P_1 & P_1^{-1} D^T \\ 0_{2,n-2} & B^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T & P_1^{-1} D^T \\ 0_{2,n-2} & B^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice A est semblable à la matrice A' qui elle-même est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} T & P_1^{-1} D^T \\ 0_{2,n-2} & B^T \end{pmatrix}$ qui est presque triangulaire supérieure.

25 ▷ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Tr}(u) = 0$. Si u est une homothétie, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$. L'égalité $\text{Tr}(u) = 0$ fournit $\lambda = 0$ puis $u = 0$. Dans ce cas, $u \in \Sigma_4 \mathcal{C}(E)$ car $u = 0 + 0 + 0 + 0$ avec $0^2 = 0$. On suppose dorénavant que u n'est pas une homothétie.

Soit $\mathcal{B}$ une base donnée de E puis $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. D'après la question **24**, il existe une matrice presque triangulaire supérieure A et une matrice inversible P telles que $M = PAP^{-1}$. Puisque $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(u) = 0$, d'après la question **19**, il existe $C_0 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A + V + E_{C_0} = QJ_n Q^{-1}$ et donc

$$M = PAP^{-1} = P(- (V + E_{C_0}) + QJ_n Q^{-1}) = -P(V + E_{C_0})P^{-1} + (PQ)J_n(PQ)^{-1}.$$

D'après la question **21**, il existe deux matrices carrées B_1 et B_2 , de carré nul et telles que $V + E_{C_0} = B_1 + B_2$ et d'après la question **20**, il existe deux matrices carrées B_3 et B_4 , de carré nul, et telles que $J_n = B_3 + B_4$. On a alors

$$M = -PB_1P^{-1} - PB_2P^{-1} + (PQ)B_3(PQ)^{-1} + (PQ)B_4(PQ)^{-1}.$$

Les quatre matrices $-PB_1P^{-1}$, $-PB_2P^{-1}$, $(PQ)B_3(PQ)^{-1}$ et $(PQ)B_4(PQ)^{-1}$ sont de carré nul et donc, si on note b_1 , b_2 , b_3 et b_4 les endomorphismes de matrice dans la base $\mathcal{B}$ $-PB_1P^{-1}$, $-PB_2P^{-1}$, $(PQ)B_3(PQ)^{-1}$ et $(PQ)B_4(PQ)^{-1}$ respectivement, alors $u = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ avec $b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = b_4^2$. Encore une fois, $u \in \Sigma_4 \mathcal{C}(E)$.

On a montré que tout endomorphisme de E , de trace nulle, est dans $\Sigma_4 \mathcal{C}(E)$.