SESSION 2024

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE PC

Partie I : Résultats préliminaires

1 ▷ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$. Il existe $d \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k|x|^k$.

Si $d = 0$, pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant a_0$ (et donc $a_0 \geqslant 0$) puis $|f(x)| \leqslant (a_0 + 1)\left(1 + |x|^0\right)$.

Sinon $d \geqslant 1$. Posons $M = \text{Max}\{|a_k|,\ k \in [\![0, d]\!]\}$. Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant M\left(1 + |x| + \ldots + |x|^d\right) \leqslant \left\{\begin{array}{l} M(d+1) \text{ si } |x| \leqslant 1 \\ M\left(1 + d|x|^d\right) \text{ si } |x| \geqslant 1\end{array}\right. . \leqslant \left\{\begin{array}{l} M(d+1)\left(1 + |x|^d\right) \text{ si } |x| \leqslant 1 \\ Md\left(1 + |x|^d\right) \text{ si } |x| \geqslant 1\end{array}\right. \\ &\leqslant (M+1)(d+1)\left(1 + |x|^d\right).\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a trouvé $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^k\right)$. Par suite, f est à croissance lente.

2 ▷ Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Donc, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^k\right)$.

La fonction $g = f \times \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $x^2|g(x)| \leqslant \dfrac{C}{\sqrt{2\pi}}x^2\left(1 + |x|^k\right)e^{-x^2/2}$ et donc $x^2 g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées puis $g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. La fonction g est alors intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et sur un voisinage de $-\infty$ puis sur $\mathbb{R}$. Donc, $f \in L^1(\varphi)$.

3 ▷ La fonction nulle est dans $CL(\mathbb{R})$ ($C = 1$ et $k = 0$ conviennent).
Soient $(f, g) \in (CL(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soient $(C, C') \in]0, +\infty[^2$ et $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^k\right)$ et $|g(x)| \leqslant C'\left(1 + |x|^\ell\right)$. En posant $m = \text{Max}\{k, \ell\}$, pour $x \leqslant 1$ on a

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leqslant |\lambda|C\left(1 + |x|^k\right) + |\mu|C'\left(1 + |x|^\ell\right) \leqslant 2(|\lambda|C + |\mu|C') + 1 \leqslant (2(|\lambda|C + |\mu|C') + 1)\left(1 + |x|^m\right)$$

et pour $|x| \geqslant 1$ on a

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leqslant |\lambda|C\left(1 + |x|^k\right) + |\mu|C'\left(1 + |x|^\ell\right) \leqslant (|\lambda|C + |\mu|C')\left(1 + |x|^m\right) \leqslant (2(|\lambda|C + |\mu|C') + 1)\left(1 + |x|^m\right).$$

Donc, $C'' = 2(|\lambda|C + |\mu|C'|) + 1 \in]0, +\infty[$ et $m = \text{Max}\{k, \ell\} \in \mathbb{N}$ sont tels que pour tout réel x, $|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leqslant C''\left(1 + |x|^m\right)$. Par suite, $\lambda f + \mu g \in CL(\mathbb{R})$.

On a montré que $CL(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Vérifions que $CL(\mathbb{R})$ est stable par produit. Soit $(f, g) \in (CL(\mathbb{R}))^2$. Soient $(C, C') \in]0, +\infty[^2$ et $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^k\right)$ et $|g(x)| \leqslant C'\left(1 + |x|^\ell\right)$. Pour tout réel x

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)| &\leqslant CC'\left(1 + |x|^k\right)(1 + |x|)^\ell = CC'\left(1 + |x|^k + |x|^\ell + |x|^{k+\ell}\right) \\ &\leqslant \left\{\begin{array}{l} 4CC' \text{ si } |x| \leqslant 1 \\ 4CC'|x|^{k+\ell} \text{ si } |x| > 1\end{array}\right. \leqslant 4CC'\left(1 + |x|^{k+\ell}\right).\end{aligned}$$

Donc, $f \times g \in CL(\mathbb{R})$.

4 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}^+$ de sorte que $1 - e^{-2t} \geqslant 0$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction $g : y \mapsto f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout réel y,

$$|g(y)| \leqslant C\left(1+\left|e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^k\right)\varphi(y).$$

Toujours d'après un théorème de croissances comparées, $y^2 g(y) \underset{y\to\pm\infty}{=} o(1)$ puis $g(y) \underset{y\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$. La fonction g est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ puis pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P_t(f)(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Soit $t\in\mathbb{R}^+$. Soient $(f,g)\in\left(C^0(\mathbb{R})\cap CL(\mathbb{R})\right)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
P_t(\lambda f+\mu g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda f+\mu g)\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ dy\\
&= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ dy+\mu\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ dy\\
&\text{(car les deux intégrales convergent)}\\
&= \lambda P_t(f)(x)+\mu P_t(g)(x).
\end{aligned}$$

Donc, $P_t(\lambda f+\mu g)=\lambda P_t(f)+\mu P_t(g)$. Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, P_t est linéaire sur $C^0(\mathbb{R})\cap CL(\mathbb{R})$.

5 ▷ Soient $f\in C^0(\mathbb{R}\cap CL(\mathbb{R})$ et $x\in\mathbb{R}$. Il existe $C>0$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $|f(u)|\leqslant C\left(1+|u|^k\right)$.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=+\infty$. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{R}$, on pose $\phi_n(y)=f\left(e^{-t_n}x+\sqrt{1-e^{-2t_n}}y\right)\varphi(y)$ de sorte que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{t_n}(f)(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_n(y)\ dy$.

- Chaque fonction ϕ_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $y\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-t_n}x+\sqrt{1-e^{-2t_n}}y=y$ puis, par continuité de f sur $\mathbb{R}$ et donc en y, $\lim\limits_{n\to+\infty}\phi_n(t)=f(y)\varphi(y)$. La suite de fonction $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\phi\ :\ y\mapsto f(y)\varphi(y)$. De plus, la fonction ϕ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\phi_n(y)| &= \left|f\left(e^{-t_n}x+\sqrt{1-e^{-2t_n}}y\right)\right|\varphi(y)\\
&\leqslant C\left(1+\left|e^{-t_n}x+\sqrt{1-e^{-2t_n}}y\right|^k\right)\varphi(y)\leqslant C\left(1+\left(e^{-t_n}|x|+\sqrt{1-e^{-2t_n}}|y|\right)^k\right)\varphi(y)\\
&\leqslant C\left(1+(|x|+|y||^k\right)\varphi(y)=\Psi(y).
\end{aligned}$$

  De plus, la fonction Ψ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $\dfrac{1}{y^2}$ en $\pm\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de convergence dominée,

- (chaque fonction ϕ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$),
- (la fonction ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}$),
- la suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_n(y)\ dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_n(y)\ dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\ dy$.

Plus explicitement, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{t_n}(f)(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y)\ dy$.

Ainsi, pour tout réel x, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{t_n}(f)(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y)\ dy$. On sait alors que pour tout réel x, $\lim\limits_{t\to+\infty} P_t(f)(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y)\ dy.$$

6 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.
Soit $A > 0$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in [-A, A]$, $P_t(f)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,y)\ dy$.

- Pour tout $x \in [-A, A]$, la fonction $y \mapsto \Phi(x, y)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, y)$ est continue sur $[-A, A]$.
- Ensuite, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f(u)| \leqslant C\left(1 + |u|^k\right)$. Mais alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\Phi(x,y)| \leqslant C\left(1 + \left|e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^k\right)\varphi(y) \leqslant C(|x|+|y|)^k\varphi(y) \leqslant C(A+|y|)^k\varphi(y) = \Psi(y).$$

De plus, la fonction Ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $P_t(f)$ est continue sur $[-A, A]$. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, la fonction $P_t(f)$ est continue que $\mathbb{R}$.

Ensuite, pour tout réel x, en tenant compte de la convergence de chaque intégrale,

$$|P_t(f)(x)| \leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} (|x|+|y|)^k\varphi(y)\ dy = \sum_{i=0}^{k} C\binom{k}{i}|x|^i\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{k-i}\varphi(y)\ dy.$$

La fonction $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$. D'après la question 1, $P_t(f) \in CL(\mathbb{R})$.

En résumé, $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et donc $P_t(f) \in L^1(\varphi)$ d'après la question 2.

7 ▷ Les fonctions f', f'' et g sont dans $CL(\mathbb{R})$. Donc, la fonction $x \mapsto L(f)(x)g(x) = f''(x)g(x) - xf'(x)g(x)$ est dans $CL(\mathbb{R})$ d'après la question 3. Plus précisément, la fonction $x \mapsto L(f)(x)g(x)$ est dans $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et donc la fonction $x \mapsto L(f)(x)g(x)\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2.

On note ensuite que pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ et donc

$$L(f)(x)\varphi(x) + f'(x)g'(x)\varphi(x) = f''(x)g(x)\varphi(x) + f'(x)g'(x)\varphi(x) - xf'(x)g(x)\varphi(x) = (f'g\varphi)'(x) \quad (*).$$

Puisque f' et g sont à croissances lentes, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)g(x)\varphi(x) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Mais alors, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f'g\varphi)'(x)\ dx$ converge et est égale à 0. On en déduit encore que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ dx$ est convergente puis, en intégrant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x)\ dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ dx.$$

Partie II : Dérivée de $P_t(f)$

8 ▷ Soit $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Soit $a > 0$ Notons $\Phi \ \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) \end{array}$ de sorte que, pour tout $t \in [a, +\infty[$, $P_t(f)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,y)\ dy$.

• Pour tout $t \in [a, +\infty[$, la fonction $y \mapsto \Phi(t, y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après les questions 1, 2 et 3.

• La fonction Φ admet sur $[a, +\infty[\times\mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable t définie par :

$$\forall (t,y) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y) = \left(-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right)f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y).$$

De plus,

- Pour tout $t \in [a, +\infty[$, la fonction $y \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y)$ est continue sur $[a, +\infty[$.

- Il existe $C \in]0, +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f'(u)| \leqslant C\left(1 + |u|^k\right)$.
Soit $(t, y) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}$. $e^{-2t} \leqslant 1$ puis $1 - e^{-2t} \geqslant 1 - e^{-2a}$ puis $\dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}$ et donc
$$\left|-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}\right| \leqslant |x| + \frac{|y|}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}.$$
Ensuite, $\left|f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\right| \leqslant C\left(1 + \left|e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right|^k\right) \leqslant C\left(1 + (|x| + |y|)^k\right)$ et donc,
$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y)\right| \leqslant C\left(|x| + \frac{|y|}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}\right)\left(1 + (|x| + |y|)^k\right)\varphi(y) = \Psi(y).$$
La fonction $y \mapsto C\left(|x| + \dfrac{|y|}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}\right)\left(1 + (|x| + |y|)^k\right)$ est à croissance lente d'après les questions 1 et 3 et donc la fonction Ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction $t \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, la fonction $t \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[,\ \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}y\right) f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\, dy.$$

9 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbb{R})$ et $f'' \in CL(\mathbb{R})$.
Soit $A > 0$. Notons $\begin{array}{llll} \Phi : & [-A, A] \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y) \end{array}$ de sorte que, pour tout $x \in [-A, A]$,
$P_t(f)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y)\, dy$.

• Pour tout $x \in [-A, A]$, la fonction $y \mapsto \Phi(x, y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

• La fonction Φ admet sur $[-A, A] \times \mathbb{R}$ des dérivées partielles première et seconde par rapport à sa première variable x définies par : pour tout $(x, y) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = e^{-t}f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y) \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y) = e^{-2t}f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y).$$

De plus,

- Pour tout $x \in [-A, A]$, les fonction $y \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y)$ et $y \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, les fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y)$ sont continues sur $[-A, A]$.

- Il existe $(C', C'') \in]0, +\infty[^2$ et $(k', k'') \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f'(u)| \leqslant C'\left(1 + |u|^{k'}\right)$ et $|f''(u)| \leqslant C''\left(1 + |u|^{k''}\right)$.
Soit $(x, y) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$. $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant C'\left(1 + (|x| + |y|)^{k'}\right)\varphi(y) \leqslant C'\left(1 + (A + |y|)^{k'}\right)\varphi(y) = \Psi_1(y)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)\right| \leqslant C''\left(1 + (A + |y|)^{k''}\right)\varphi(y) = \Psi_2(y)$. De plus, les fonctions Ψ_1 et Ψ_2 sont continues par morceaux, positives et intégrables sur $\mathbb{R}$ d'après les questions 1, 2 et 3.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction $x \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^2 sur $[-A, A]$ et ses dérivées première et seconde s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, la fonction $x \mapsto P_t(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_t(f)'(x) = e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \text{ et } P_t(f)''(x) = e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy.$$

10 ▷ Soit $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente. D'après la question 8, pour tout $t > 0$, pour tout réel x,

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = -xP_t(f)'(x) + e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)y\varphi(y)\,dy \quad (*).$$

Soit $A > 0$. Les deux fonctions $y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)$ et $y \mapsto y\varphi(y)$ sont de classe C^1 sur le segment $[-A, A]$. On peut effectuer une intégration par parties qui fournit (en se rappelant que pour tout réel y, $\varphi'(y) = -y\varphi(y)$)

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)y\varphi(y) &= \left[\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)(-\varphi(y))\right]_{-A}^{A}\\ &\quad + \int_{-A}^{A} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

Puisque f' est à croissance lente, $\displaystyle\lim_{y\to\pm\infty} -\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) = 0$ et puisque f'' est à croissance lente, la fonction $y \mapsto f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)y\varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy$ et donc, d'après $(*)$

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = -xP_t(f)'(x) + P_t(f)''(x) = L\left(P_t(f)\right)(x).$$

Partie III : Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

11 ▷ Pour $t > 0$, posons $h(t) = t\ln(t)$. $\displaystyle\lim_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ et on peut donc prolonger la fonction h par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$ (on note encore h le prolongement obtenu). La fonction h est alors continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$,

$$h'(t) = \ln(t) + 1.$$

La fonction h est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

12 ▷ Soit $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ à valeurs strictement positive. Il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < g(x) \leqslant C\left(1 + |x|^k\right) \leqslant (1 + C)\left(1 + |x|^k\right)$ (en notant que $\ln(1 + C) > 0$).

La fonction $x \mapsto \ln(g(x))g(x)\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ensuite, d'après la question précédente, si $0 < g(x) \leqslant 1$, alors $-\dfrac{1}{e} = h\left(\dfrac{1}{e}\right) \leqslant h(t) = t\ln(t) \leqslant 0$ puis $|h(t)| \leqslant \dfrac{1}{e} \leqslant 1$.
Donc, pour $x \in \mathbb{R}$, si $0 < g(x) \leqslant 1$, alors $|\ln(g(x))g(x)| \leqslant 1$ et si $g(x) > 1$, par croissance de la fonction h sur $[1, +\infty[$, $0 \leqslant \ln(g(x))g(x) \leqslant \ln\left((1 + C)\left(1 + |x|^k\right)\right) \times C\left(1 + |x|^k\right)$. En résumé, pour tout réel x,

$$|\ln(g(x))g(x)|\varphi(x) \leqslant \left(1 + \ln\left((1 + C)\left(1 + |x|^k\right)\right) \times C\left(1 + |x|^k\right)\right)\varphi(x).$$

D'après un théorème de croissances comparées, la fonction $x \mapsto |\ln(g(x))g(x)|\varphi(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$ et donc la fonction $x \mapsto |\ln(g(x))g(x)|\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ceci montre que la quantité $\mathrm{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie.

13 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question 6, la fonction $x \mapsto P_t(f)(x)$ est dans $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et donc dans $L^1(\varphi)$. De plus, f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc, pour tout réel x, $P_t(f)(x) > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}$). Donc, $S(t)$ existe d'après la question précédente. On note de plus que d'après le résultat admis à la fin de la question 6,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\varphi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\ dx = 1.$$

14 ▷ Vérifions d'abord que, pour x donné dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto P_t(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) \end{array}$ de sorte que pour tout réel $t \geqslant 0$, $P_t(f)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,y)\ dy$.

- Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $y \mapsto \Phi(t,y)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(t,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- D'après la question 6, pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $|\Phi(t,y)| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} C\binom{k}{i}|x|^i \int_{-\infty}^{|} u|^{k-i}\varphi(u)\ du\right)\varphi(y) = \Psi(y)$ où la fonction Ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ car dominée par $\dfrac{1}{y^2}$ en $\pm\infty$..

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifions que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$. Posons $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \ln\left(P_t(f)(x)\right)P_t(f)(x)\varphi(x) \end{array}$ de sorte que pour tout $t \geqslant 0$, $S(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,x)\ dx$.

- Pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto \Phi(t,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (entre autre car f est strictement positive sur $\mathbb{R}$).
- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- D'après la question 6, pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $|\Phi(t,y)| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} C\binom{k}{i}|x|^i \int_{-\infty}^{|} u|^{k-i}\varphi(u)\ du\right)\varphi(x) = \Psi(x)$ où la fonction Ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ car dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$..

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

15 ▷ $S(0) = \mathrm{Ent}_\varphi\left(P_0(f)\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x))f(x)\varphi(x)\ dx = \mathrm{Ent}_\varphi(f)$.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $s_n(x) = \ln\left(P_{t_n}(f)(x)\right)P_{t_n}(f)(x)\varphi(x)$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S\left(t_n\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(x)\ dx$.

- Chaque fonction s_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- D'après la question 5, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{t_n}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(t)\ dy = 1$ et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = 0$. Ainsi, la suite de fonctions s_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et de plus la fonction nulle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|s_n(x)| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} C\binom{k}{i}|x|^i \int_{-\infty}^{|} u|^{k-i}\varphi(u)\ du\right)\varphi(x) = \Psi(x)$ où Ψ est une fonction continue par morceaux , positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- (chaque fonction s_n est intégrable sur $\mathbb{R}$),
- (la fonction nulle est intégrable sur $\mathbb{R}$),
- la suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx = 0.$

Plus explicitement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(t_n) = 0$. Ainsi, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(t_n) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0$.

16 ▷ Puisque $f\in C^2(\mathbb{R})\cap CL(\mathbb{R})$ et que f' et f'' sont à croissance lente, d'après la question 10,

$$\forall t>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L\left(P_t(f)\right)(x).$$

Mais alors, d'après le résultat admis par l'énoncé, pour tout $t>0$, $\displaystyle S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L\left(P_t(f)\right)(x)\left(1+\ln\left(P_t(f)\right)(x)\right)\varphi(x)\,dx$.

17 ▷ D'après la question 7, pour tout $t>0$,

$$-S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(P_t(f)\right)'(x)\times\frac{\left(P_t(f)\right)'(x)}{P_t(f)(x)}\times\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\left(P_t(f)\right)'(x)\right)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,dx.$$

Posons alors pour $t>0$ et $A>0$ fixé, $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}[-A,A]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\end{array}$ de sorte que pour tout réel $x\in[-A,A]$, $\displaystyle P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,y)\,dy$.

- Pour tout réel $x\in[-A,A]$, la fonction $y\mapsto\Phi(x,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times\mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall(x,y)\in[-A,A]\times\mathbb{R},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) = e^{-t}f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y).$$

De plus,

- pour chaque $x\in[-A,A]$, la fonction $y\mapsto\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $[-A,A]$,
- il existe $C>0$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que pour tout réel u, $|f'(u)|\leqslant C\left(1+|u|^k\right)$. Pour chaque $(x,y)\in[-A,A]\times\mathbb{R}$, on a alors

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant Ce^{-t}\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y)\leqslant Ce^{-t}\left(1+\left(e^{-t}A+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y) = \Psi(y)$$

  où Ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après la théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $P_t(f)$ est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A>0$, la fonction $P_t(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \left(P_t(f)\right)'(x) = e^{-t}P_t\left(f'\right)(x).$$

En appliquant ce résultat à la fonction f' (qui est continue sur $\mathbb{R}$ à croissance lente), on en déduit que

$$\forall t>0,\ -S'(t) = e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(P_t\left(f'^2\right)(x)\right)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,dx.$$

18 ▷ Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(P_t(f')(x)\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy\right)^2\\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}{\sqrt{f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}}\sqrt{\varphi(y)}\times\sqrt{f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)}\,dy\right)^2\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
(P_t(f')(x))^2 &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}{f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}\varphi(y)\ dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ dy\right)\\
&= P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\times P_t(f)(x)
\end{aligned}
$$

et donc, en tenant compte de $P_t(f)(x)>0$, $\dfrac{P_t\left(f'^2\right)(x)}{P_t(f)(x)} \leqslant P_t\left(\dfrac{f'^2}{f}\right)(x)$. Finalement,

$$\forall t>0,\ -S'(t)\leqslant e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\ dx.$$

19 ▷ La fonction $\dfrac{f'^2}{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ à croissance lente. D'après le résultat admis par l'énoncé à la fin de la question 6, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ dx$. Par suite,

$$\forall t>0,\ -S'(t)\leqslant e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ dx.$$

20 ▷ La fonction S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ donc, pour tout $(\varepsilon, A)\in]0,+\infty[^2$ tel que $0<\varepsilon<A$, $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} -S'(t)\ dt = S(\varepsilon)-S(A)$. La fonction S est continue en 0 d'après la question 14. Donc, d'après la question 15,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\varphi(f) = S(0)-\lim_{t\to+\infty}S(t) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ A\to+\infty}}\int_{\varepsilon}^{A} -S'(t)\ dt = \int_0^{+\infty} -S'(t)\ dt\\
&\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ dx\right)\ dt\\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ dx\right)\int_0^{+\infty} e^{-2t}\ dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ dx\right)\left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ dx
\end{aligned}
$$

