Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PC

1 Matrices de Hadamard

1 ▷ I_1 est une matrice de HADAMARD d'ordre 1 et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de HADAMARD d'ordre 2.

2 ▷ Soit H une matrice de HADAMARD d'ordre n. Notons $(C_1, \ldots, C_n)$ la famille des colonnes de la matrice H. Si pour $j \in [\![1, n]\!]$ donné, on remplace la colonne C_j par $-C_j$, les coefficients de la matrice H' obtenue sont encore égaux à 1 ou à -1.

Ensuite, la famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}C_1, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}C_j, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}C_n\right)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et il en est de même de la famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}C_1, \ldots, -\dfrac{1}{\sqrt{n}}C_j, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}C_n\right)$. Donc, la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H'$ est une matrice orthogonale puis la matrice H' est une matrice de HADAMARD.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$. Les coefficients de la matrice H'' dont la famille des colonnes $(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$ sont égaux à 1 ou à -1 et d'autre part, la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H''$ est orthogonale car la famille de ses colonnes est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc, H'' est une matrice de HADAMARD.

En appliquant à la matrice H^T qui est aussi une matrice de HADAMARD, on obtient les mêmes résultats sur les lignes de H.

3 ▷ Soit H une matrice de HADAMARD dont la famille des colonnes est $(C_1, \ldots, C_n)$. Soit H' la matrice dont la famille des colonnes est $(\text{sgn}(a_{1,1})\, C_1, \ldots, \text{sgn}(a_{1,n})\, C_n)$. H' est une matrice de HADAMARD d'après la question précédente et les coefficients de sa première ligne sont tous égaux à 1.

Soit H une matrice de HADAMARD de format $n \geqslant 2$ dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. Soit k le nombre de coefficients égaux à 1 dans la deuxième ligne. L'égalité $(L_1, L_2) = 0$ fournit $1 \times k + (-1)(n - k) = 0$ ou encore $n = 2k$. Donc, n est pair.

4 ▷ Posons déjà $n = 2p$ où $p \geqslant 2$. Soit H une matrice de HADAMARD de format n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. D'après la question précédente, p coefficients de la deuxième ligne sont égaux à 1 et p coefficients sont égaux à -1. On permute les colonnes de sorte que les p premiers coefficients de la deuxième ligne soient égaux à 1 et les p derniers à -1. La matrice H' obtenue est encore une matrice de HADAMARD.

Notons a_1, ..., a_{2p} les coefficients de la troisième ligne. Les égalités $(L_1, L_3) = 0$ et $(L_2, L_3) = 0$ fournissent $a_1 + \ldots + a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{2p} = 0$ et $a_1 + \ldots + a_p - a_{p+1} + \ldots - a_{2p} = 0$ puis $a_1 + \ldots + a_p = 0$ (en additionnant membre à membre les deux égalités). Comme à la question précédente, cette dernière égalité n'est possible que si p est pair. n est donc nécessairement un multiple de 4.

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

5 ▷ D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f. En permutant les vecteurs de cette base, on obtient une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i est un vecteur propre associé à λ_i.

6 ▷ D'après la relation de GRASSMANN,

$$\begin{aligned} \dim(S_k \cap T_k) &= \dim(S_k) + \dim(T_k) - \dim(S_k \cup T_k) = k + (n - (k-1)) - \dim(S_k \cup T_k) \\ &= n + 1 - \dim(S_k \cup T_k) > 0. \end{aligned}$$

Donc, $S_k \cap T_k \neq \{0\}$.

7 $\triangleright$ Soit x un vecteur non nul de $S_k \cap T_k$. Alors, $x' = \dfrac{1}{\|x\|}x$ est un vecteur unitaire de $S_k \cap T_k$. Posons $x' = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} a_i e_i$.

$$\begin{aligned}(x', f(x')) &= \left(\sum_{i=k}^{n} a_i e_i, \sum_{i=k}^{n} a_i \lambda_i e_i\right)\\ &= \sum_{i=k}^{n} \lambda_i a_i^2 \text{ (car la base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est orthonormée)}\\ &\geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} a_i^2 = \lambda_k \|x'\|^2 = \lambda_k.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $x' \in S_k$ tel que $\|x'\| = 1$ et $(x', f(x')) \geqslant \lambda_k$. On en déduit que $\underset{x \in S_k,\ \|x\|=1}{\text{Max}} (x, f(x)) \geqslant \lambda_k$.

8 $\triangleright$ Ainsi, pour tout $S \in \pi_k$, $\underset{x \in S,\ \|x\|=1}{\text{Max}} (x, f(x)) \geqslant \lambda_k$. Par suite, $\underset{S \in \pi_k}{\text{Min}} \left(\underset{x \in S,\ \|x\|=1}{\text{Max}} (x, f(x))\right) \geqslant \lambda_k$.

Soit $S_k = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ un vecteur de S_k tel que $\|x\| = 1$. Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée,

$$(x, f(x)) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i, \sum_{j=1}^{k} a_j \lambda_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i^2 \leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k.$$

De plus, e_k est un vecteur unitaire de S_k tel que $(e_k, f(e_k)) = \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k$. Ceci montre que $\underset{x \in S_k,\ \|x\|=1}{\text{Max}} (x, f(x)) = \lambda_k$.
Finalement,

$$\underset{S \in \pi_k}{\text{Min}} \left(\underset{x \in S_k,\ \|x\|=1}{\text{Max}} (x, f(x))\right) = \lambda_k.$$

9 $\triangleright$ Soit $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^T$. D'après le résultat admis par l'énoncé, puisque M est positive, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \geqslant 0$.

Soient alors $\Delta = \text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ puis $B = P\Delta P^T$. B est symétrique réelle car orthogonalement semblable à une matrice diagonale puis

$$B^T B = P\Delta P^T P \Delta P^T = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M.$$

On suppose maintenant que $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ puis que M admet une unique valeur propre strictement positive λ dont le sous-espace propre associé est de dimension 1, engendré par le vecteur unitaire u.
Puisque M est diagonalisable, λ est une valeur propre simple de M. On note $(u, u_2, \ldots, u_n)$ une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de vecteurs propres de M associée à la famille de valeurs propres $(\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Par hypothèse, pour $i \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_i \leqslant 0$.

Soit $M' = \lambda u u^T - M$. Déjà, $M^T = \lambda \left(u^T\right)^T u^T - M^T = \lambda u u^T - M = M'$ et donc $M' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Ensuite,

$$M'u = \lambda u u^T u - Mu = \lambda \|u\|^2 u - \lambda u = 0$$

et pour $k \in [\![2, n]\!]$,

$$M'u_k = \lambda u u^T u_k - M u_k = \lambda (u, u_k) u - \lambda_k u_k = -\lambda_k u_k.$$

La famille $(u, u_2, \ldots, u_n)$ est donc une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M' associée à la famille de valeurs propres $(0, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n)$. Ainsi, les valeurs propres de M' sont des réels positifs. D'après le résultat admis par l'énoncé, la matrice M' est positive.

Ainsi, la matrice $M' = \lambda u u^T - M$ est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Il existe donc $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lambda u u^T - M = B^T B$ ou encore telle que

$$M = \lambda u u^T - B^T B.$$

3 Caractérisation des MDE

10 ▷ $P^T = I_n^T - \frac{1}{n}\left(e^T\right)^T e^T = I_n - \frac{1}{n}ee^T = P$. Donc, $P \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme canoniquement à P.

On note d'abord que $e^Te = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$. Ensuite, puisque les matrices I_n et e^Te commutent,

$$\begin{aligned}P^2 &= \left(I_n - \frac{1}{n}ee^T\right)^2 = I_n^2 - \frac{2}{n}ee^T + \frac{1}{n^2}ee^Tee^T = I_n - \frac{2}{n}ee^T + \frac{1}{n^2}e\left(e^Te\right)e^T\\ &= I_n - \frac{2}{n}ee^T + \frac{n}{n^2}ee^T = I_n - \frac{1}{n}ee^T = P.\end{aligned}$$

Donc, f est une projection. Ensuite, $Pe = \left(I_n - \frac{1}{n}ee^T\right)e = e - \frac{1}{n}e\left(e^Te\right) = e - \frac{n}{n}e = 0$ et si $x \in e^\perp$,

$$Pe = x - \frac{1}{n}ee^Tx = x - \frac{1}{n}(x,e)e = x.$$

f est donc la projection sur $e^\perp$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e)$ ou encore f est la projection orthogonale sur $e^\perp$.

11 ▷ On suppose que les x_i sont les vecteurs coordonnées des A_i dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^m$.

$D = \left(\|x_i - x_j\|^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\|x_i\|^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} - 2\left((x_i,x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} + \left(\|x_j\|^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Ensuite, $eC^T = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|x_1\|^2 & \dots & \|x_n\|^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|x_1\|^2 & \dots & \|x_n\|^2\\ \vdots & & \vdots\\ \|x_1\|^2 & \dots & \|x_n\|^2\end{pmatrix} = \left(\|x_j\|^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ puis

$Ce^T = \begin{pmatrix}\|x_1\|^2\\ \vdots\\ \|x_n\|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \vdots & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|x_1\|^2 & \dots & \|x_1\|^2\\ \vdots & & \vdots\\ \|x_n\|^2 & \dots & \|x_n\|^2\end{pmatrix} = \left(\|x_i\|^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et enfin, puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, $M_A^TM_A = \left(x_i^Tx_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left((x_i,x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Donc,

$$D = Ce^T + eC^T - 2M_A^TM_A.$$

Mais alors, en tenant compte de $P^T = P$ et $Pe = 0$ d'après la question précédente,

$$T(D) = -\frac{1}{2}P\left(Ce^T + eC^T - 2M_A^TM_A\right)P = PM_A^TM_AP - \frac{1}{2}\left(PC(Pe)^T + PeC^TP\right) = \left(M_AP\right)^TM_AP.$$

Par suite, $(T(D))^T = \left(M_AP\right)^T\left(\left(M_AP\right)^T\right)^T = \left(M_AP\right)^TM_AP = T(D)$ et donc $T(D) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^TT(D)X = X^T\left(M_AP\right)^TM_APX = \left(M_APX\right)^T\left(M_APX\right) = \|M_APX\|_2^2 \geqslant 0$$

et donc $T(D) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, $T(D)e = \left(M_AP\right)^TM_APe = 0$. Donc, $T(D) \in \Omega_n$.

12 ▷ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A \in \Omega_n$. A est symétrique réelle positive. Donc, d'après la question 9, il existe $M_A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M_A^TM_A$. On note $x_1, \dots, x_n$, les colonnes de M_A puis on considère les points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont les vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, $A = M_A^TM_A = \left(\langle x_i,x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ puis

$$\begin{aligned}K(A) &= ea^T + ae^T - 2A = ea^T + ae^T - 2M_A^TM_A\\ &= \left(\langle x_j,x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} + \left(\langle x_i,x_i\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} - 2\left(\langle x_i,x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\\ &= \left(\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i,x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\|x_i - x_j\|^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(d\left(A_i,A_j\right)^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \Delta_n.\end{aligned}$$

13 ▷ Soit $A \in \Omega_n$.

$$T(K(A)) = -\frac{1}{2}P\left(ea^T + ae^T - 2A\right)P = -\frac{1}{2}\left(Pea^TP + Pa(Pe)^T\right) + PAP = PAP \text{ (car } Pe = 0)$$

puis, en tenant compte de $A^T = A$ et $Ae = 0$,

$$PAP = \left(I_n - \frac{1}{n}ee^T\right) A \left(I_n - \frac{1}{n}ee^T\right) = A - \frac{1}{n}Aee^T - \frac{1}{n}e(Ae)^T + \frac{1}{n^2}ee^TAee^T = A.$$

Donc, $T \circ K = \mathrm{Id}_{\Omega_n}$.

14 ▷ Si D est symétrique, alors $(T(D))^T = -\frac{1}{2}P^TD^TP^T = -\frac{1}{2}PDP = T(D)$ et donc $T(D)$ est symétrique et si $T(D)$ est symétrique, alors $D = -2P^{-1}T(D)P^{-1}$ est symétrique.

Soit D une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonales nulle. Si D est une MDE ou encore si D est dans Δ_n, alors $T(D)$ est dans Ω_n et donc $-\frac{1}{2}PDP$ est une matrice (symétrique) positive.

Si $-\frac{1}{2}PDP$ est (symétrique) positive, alors, en tenant compte de $-\frac{1}{2}PDPe = 0$, $-\frac{1}{2}PDP$ est dans Ω_n. La matrice $D' = K\left(-\frac{1}{2}PDP\right)$ est dans Δ_n et vérifie $-\frac{1}{2}PD'P = T(D') = T\left(K\left(-\frac{1}{2}PDP\right)\right) = -\frac{1}{2}PDP$. Mais alors, $PDP = PD'P$.

P est la projection orthogonale sur $H = (e)^{\perp}$, H étant l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Donc, pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in H$, on a $Px = x$ puis $PDx = PD'x$ puis $P(D - D')x = 0$ et donc $(D - D')x \in \mathrm{Vect}(e)$. En posant $D = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $D' = \left(d'_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, pour tout $x \in H$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{n} (d_{i,k} - d'_{i,k})\, x_k = 0 \quad (*).$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a déjà $d_{i,i} = 0 = d'_{i,i}$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On applique $(*)$ aux vecteur x de H tel que $x_i = -1$, $x_j = 1$ et pour tout $k \notin \{i, j\}$, $x_k = 0$. On obtient $d_{i,j} - d'_{i,j} = 0$ puis $d_{i,j} = d'_{i,j}$.

Ceci montre que $D = D' \in \Delta_n$.

15 ▷ Soit D une matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive λ, d'espace propre associé de dimension 1 engendré par le vecteur unitaire e. D'après la question 9, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = \lambda ee^T - B^TB$.

Ensuite, $-\frac{1}{2}PDP = \frac{1}{2}PB^TBP - \frac{1}{2}\lambda Pee^TP = \frac{1}{2}(PB)^T(PB)$. Encore une fois, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T\left(-\frac{1}{2}PDP\right)X = \frac{1}{2}(PBX)^T(PBX) = \frac{1}{2}\|PBX\|_2^2 \geqslant 0$$

et donc la matrice $-\frac{1}{2}PDP$ est positive puis D est une MDE d'après la question précédente.

4 Spectre des MDE

16 ▷ Soit D une MDE d'ordre n. On pose $\mathrm{Sp}(D) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Les coefficients diagonaux de D sont nuls et donc la trace de M est nulle. Puisque la trace de D est la somme de ses valeurs propres, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

17 ▷ Soit D une MDE d'ordre n. D'après la question 14, la matrice $-\frac{1}{2}PDP$ est symétrique positive. Donc, pour tout $x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $-\frac{1}{2}x^TPDPx \geqslant 0$ puis $(Px)^TDPx \leqslant 0$. Si de plus, $x \in (e)^{\perp}$, $Px = x$ et donc $x^TDx \leqslant 0$.

18 ▷ On suppose de plus que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n$ et que D n'est pas nulle. D'après la question 7 appliquée avec $S = H$ qui est de dimension $n - 1$,

$$\lambda_{n-1} \leqslant \underset{x \in H,\ \|x\|=1}{\mathrm{Max}} (x, Dx) = \underset{x \in H,\ \|x\|=1}{\mathrm{Max}} x^TDx \leqslant 0$$

d'après la question précédente.

Donc, $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant 0$ puis $\lambda_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} -\lambda_i \geqslant 0$. Si par l'absurde $\lambda_n = 0$, alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ (réels négatifs de somme nulle). Par suite, toutes les valeurs propres de D sont nulles puis, D étant diagonalisable car symétrique réelle, D est semblable à 0_n et donc égale à 0_n ce qui est faux. Donc, $\lambda_n > 0$.

On a montré que D a une unique valeur propre strictement positive, cette valeur propre étant simple.

5 Problème inverse pour les MDE

19 ▷ $U = \dfrac{1}{\sqrt{n}}H$ est une matrice orthogonale. Donc, $D = U^T \Lambda U = U^T \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,U$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (réelle) puis D est symétrique réelle.

Posons $H = (\varepsilon_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varepsilon_{i,j} \in \{-1,1\}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$D_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i} \varepsilon_{k,j}.$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $D_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

$$\begin{aligned} nD_{i,j} &= \varepsilon_{1,i}\varepsilon_{1,j}\lambda_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i}\varepsilon_{k,j} \\ &= \lambda_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i}\varepsilon_{k,j} \text{ (car pour tout } \ell \in [\![1,n]\!],\ \varepsilon_{1,\ell} = 1) \\ &= -\sum_{k=2}^{n} \lambda_k + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i}\varepsilon_{k,j} = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(-1 + \varepsilon_{k,i}\varepsilon_{k,j}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $\lambda_k \leqslant 0$ et $-1 + \varepsilon_{k,i}\varepsilon_{k,j} \leqslant -1 + 1 = 0$ puis $\lambda_k\left(-1 + \varepsilon_{k,i}\varepsilon_{k,j}\right) \geqslant 0$. On en déduit que $D_{i,j} \geqslant 0$.

20 ▷ Il reste à vérifier que e est vecteur propre de D associé à λ_1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On note que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{1,j} = n$ car la première ligne de H est constituée de 1 et que pour $k \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{k,j} = 0$ car la k-ème ligne de H est orthogonale à sa première ligne.

$$\begin{aligned} (De)_i &= \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i}\varepsilon_{k,j} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i} \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{k,j} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_{k,i} \times n\delta_{k,1} = \frac{1}{n} \times n\lambda_1 = \lambda_1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(De)_i = \lambda_1$ et donc $De = \lambda_1 e$.

D'après la question 15, D est une MDE.

21 ▷ $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard d'ordre 4. Une MDE d'ordre 4 dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$ et $\lambda_4 = -2$ est $D = \dfrac{1}{4}H\Lambda H$ où $\Lambda = \mathrm{diag}(5,-1,-2,-2)$. Plus précisément,

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

