SESSION 2024

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PSI

---

1 Une propriété sur les sommes de Riemann

1 ▷ Soit $g = f_{/]a,b[}$. g est continue sur $]a,b[$ et se prolonge par continuité en a à droite et en b à gauche. Donc, g est intégrable sur $]a,b[$.

Puisque f est continue sur $[a,b]$, la somme de RIEMANN à pas constant $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ tend vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = S_n(f) - \frac{f(a)}{n},$$

et donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ tend vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que $g \in \mathscr{D}_{a,b}$.

2 ▷ • Pour tout $k \geqslant 1$,

$$a_k - b_{k+1} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2^{k+2}}\right) = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Ensuite, $a_k - b_{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2} > 0$. Donc, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $a_k - b_{k+1} > 0$ ou encore $a_k > b_{k+1}$.

• Vérifions que f est bien définie sur $]0,1[$. Soit $t \in]0,1[$. On a $b_{k_0} > a_{k_0} > b_{k_0+1} > a_{k_0+1} > b_{k_0+2} > a_{k_0+2} > \ldots$ et donc, si il existe $k \geqslant k_0$ tel que $t \in \left[a_k, a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right]$ (resp. $t \in \left[a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}, b_k\right]$) l'entier k est uniquement défini puis $f(t)$ est bien défini quand $t \neq a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}$ pour tout $k \geqslant k_0$. Ensuite, les valeurs associées à $a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}$ à gauche et à droite sont les mêmes, à savoir k^2. f est donc bien définie sur $]0,1[$..

• Vérifions que f est continue sur $]0,1[$. f est continue en chaque $a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}$, $k \geqslant k_0$, puis continue sur chaque $[a_k, b_k]$, $k \geqslant k_0$. f est également continue sur le complémentaire dans $]0,1[$ de $\displaystyle\bigcup_{k\geqslant k_0} [a_k, b_k]$ car nulle sur cet ensemble. Enfin, pour tout $k \geqslant k_0$, $f(a_k) = 0 = \displaystyle\lim_{t\to a_k^-} f(t)$ et $f(b_k) = 0 = \displaystyle\lim_{t\to b_k^+} f(t)$. Finalement, f est continue sur $]0,1[$.

• On peut supposer sans perte de généralité $k_0 \geqslant 3$ (car si pour tout $k \geqslant 1$ ou pour tout $k \geqslant 2$, $b_{k+1} < a_k$, alors pour tout $k \geqslant 3$, $b_{k+1} < a_k$). Mais alors $b_{k_0} = \dfrac{1}{k_0} + \dfrac{1}{2^{k_0+1}} \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2^4} < 1$ puis, pour tout $k \geqslant k_0$, $0 < a_k < b_k < 1$.

Ensuite, la fonction f est positive sur $]0,1[$ puis

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \sum_{k=k_0}^{+\infty}\left(\int_{a_k}^{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}} k^2 2^{k+1}\left(t - a_k\right)\ dt + \int_{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}}^{b_k} k^2 2^{k+1}\left(b_k - t\right)\ dt\right).$$

Pour k donné, chacune des deux intégrales est l'aire d'un triangle de base $\dfrac{1}{2^{k+1}}$ et de hauteur k^2. La somme des deux intégrales est donc égale à $\dfrac{k^2}{2^{k+1}}$ puis

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} < +\infty,$$

car $\dfrac{k^2}{2^{k+1}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la fonction f est intégrable sur $]0,1[$.

• Soit $n \geqslant k_0 \geqslant 3$. $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} n^2 \times 2^{n+1} \times \dfrac{1}{2^{n+1}} = n$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = +\infty$. Donc, $f \notin \mathscr{D}_{0,1}$.

3 ▷ La fonction φ est continue et positive sur $]0,1[$. Ensuite, pour x et y sans $]0,1[$ tels que $x < y$,

$$\int_x^y \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = 2\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right).$$

Cette expression tend vers 2 quand x tend vers 0 et y tend vers 1. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt$ est une intégrale convergente puis, la fonction φ étant positive sur $]0,1[$, la fonction φ est intégrable sur $]0,1[$.

Pour $n \geqslant 2$, posons $S_n(\varphi) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Soit $n \geqslant 2$. La fonction φ étant décroissante sur $]0,1[$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(t)\ dt \leqslant \dfrac{1}{n}\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi(t)\ dt$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(t)\ dt \leqslant S_n(\varphi) \leqslant \int_0^{1-\frac{1}{n}} \varphi(t)\ dt.$$

Les membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\ dt$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(S_n(\varphi))_{n\geqslant 2}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\ dt = 2.$$

Donc, $\varphi \in \mathscr{D}_{0,1}$.

4 ▷ La fonction $\widetilde{h}$ est dérivable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $\widetilde{h}'(t) = \dfrac{2t-1}{2(t(1-t))^{\frac{3}{2}}} < 0$. La fonction $\widetilde{h}$ est donc décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Ensuite, la fonction $\widetilde{h}$ est continue et positive sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, équivalente à φ en 0 à droite et donc intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ et en particulier sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

Pour $n \geqslant 2$, on pose $S_n\left(\widetilde{h}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{h}\left(\dfrac{k}{2n}\right)$. Puisque la fonction $\widetilde{h}$ est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, comme à la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} \widetilde{h}(t)\ dt \leqslant \frac{1}{2n}\widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{2n}}^{\frac{k}{2n}} \widetilde{h}(t)\ dt$$

puis en sommant

$$2\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\ dt \leqslant S_n\left(\widetilde{h}\right) \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} \widetilde{h}(t)\ dt.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\widetilde{h}\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\ dt = \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\ dt.$$

Donc, $\widetilde{h} \in \mathscr{D}_{0,\frac{1}{2}}$.

5 ▷ En posant $u = 1-t$, on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{(1-u)u}}\ (-du) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\ dt$$

et donc

$$\int_0^1 h(t)\ dt = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\ dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\ dt.$$

6 ▷ Soit $n \geqslant 2$. Pour $t \in]0,1[$, $h(1-t) = h(t)$ et donc pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, $h\left(\dfrac{2n-k}{2n}\right) = h\left(1 - \dfrac{k}{2n}\right) = h\left(\dfrac{k}{2n}\right)$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(S_n\left(\widetilde{f}\right) + \frac{1}{n}h\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1} h\left(\frac{2n-\ell}{2n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(S_n\left(\widetilde{f}\right) + \frac{2}{n} + S_n\left(\widetilde{h}\right)\right) = S_n\left(\widetilde{h}\right) + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

D'après les questions 4 et 5, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(S_n\left(\widetilde{h}\right) + \frac{1}{n}\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\ dt = \int_0^1 h(t)\ dt$.

7 ▷ Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < \dfrac{k}{2n+1} < \dfrac{1}{2}$. La fonction $\widetilde{h}$ étant décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{2n+2} h\left(\frac{k}{2n+2}\right) \leqslant \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right).$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2(n+1)}\right) \leqslant \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n}\right).$$

ou encore

$$\frac{1}{2} S_{n+1}\left(\widetilde{h}\right) \leqslant \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(S_n\left(\widetilde{h}\right) + \frac{2}{n}\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, les membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\dfrac{1}{2} \times 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\ dt = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\ dt$. D'après le théorème des gendarmes, il en est de même de $\displaystyle\frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)$.

Soit $n \geqslant 2$.

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{2n+1-\ell}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)$$

et donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\ dt = \int_0^1 h(t)\ dt$.

8 ▷ Les deux suites extraites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right)\right)$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)\right)$ convergent et ont même limite, à savoir $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ dt$. Donc, la suite $(S_n(h)) = \left(\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ converge et de plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(h) = \int_0^1 h(t)\ dt$. La fonction h est donc un élément de $\mathscr{D}_{0,1}$.

9 ▷ $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}}\ dt = \left[\text{Arcsin}\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^1 = (\text{Arcsin}(1) - \text{Arcsin}(-1)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

10 ▷ Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{k}{n}}} = \sqrt{n}\left(S_n(\varphi) + \frac{1}{n}\right).$$

D'après la question 3, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}(2+o(1)) \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + o\left(\sqrt{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

11 ▷ Soit $n \geqslant 1$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 \times \dfrac{i}{n}\left(1 - \dfrac{i}{n}\right)}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right).$$

Puisque $h \in \mathscr{D}_{0,1}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \int_0^1 h(t)\ dt = \pi$.

12 ▷ Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|\varepsilon_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\pi}$. Pour $n \geqslant n_0 + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} &= \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{1 \times (n-(n_0-1))}} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{n-n_0+1}} \sum_{i=1}^{n_0-1} |\varepsilon_i| + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}.
\end{aligned}$$

Puisque n_0 est contant quand n varie, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-n_0+1}} \sum_{i=1}^{n_0-1} |\varepsilon_i| + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = 0 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \times \pi = \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, il existe $n_1 \geqslant n_0 + 1$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n-n_0+1}} \sum_{i=1}^{n_0-1} |\varepsilon_i| + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_1$, $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left(n \geqslant n_1 \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \varepsilon\right)$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0.$$

13 ▷ Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1\right) &= \frac{1}{1+\varepsilon_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} - \varepsilon_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}\right) \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon_n} \left(2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} - \varepsilon_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}\right)
\end{aligned}$$

(en posant $j = n - i$ dans la deuxième somme).

Ensuite, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} = 0$ (car pour $n \geqslant 2$, $\left|\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}}\right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}$) et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \pi$).

Enfin, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et en particulier, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Pour $n \geqslant 2$, on a $\left|\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_i\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}}\right| \leqslant \|(\varepsilon_p)_{p\in\mathbb{N}^*}\|_\infty\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}$. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_i\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} = 0$ et finalement que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}\left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n}-1\right) = 0.$$

2 Une marche aléatoire

14 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $p = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

$$\mathbb{E}(X_n) = (-1)\times(1-p) + 1\times p = 2p-1.$$

Puisque X_n est centrée, $2p-1 = 0$ puis $p = \dfrac{1}{2}$.

Posons alors $Y_n = \dfrac{1+X_n}{2}$. On a $Y_n(\Omega) = \left\{\dfrac{-1+1}{2}, \dfrac{1+1}{2}\right\} = \{0,1\}$. De plus, $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}\left(\dfrac{1+X_n}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{2}$. Donc, la variable Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

15 ▷ Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\omega \in \Omega$. En posant $Y_k = \dfrac{1+X_k}{2}$ pour $k \in [\![1,2i]\!]$,

$$\omega \in A_i \Leftrightarrow X_1(\omega)+\ldots+X_{2i}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+X_1}{2}(\omega)+\ldots+\frac{1+X_{2i}}{2}(\omega) = i \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{2i}Y_k\right)(\omega) = i.$$

D'après la question 14, les variables Y_k, $1 \leqslant k \leqslant 2i$, suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Ces variables étant indépendantes, on sait que la variable $\sum\limits_{k=1}^{2i}Y_k$ suit la loi binomiale de paramètres $2i$ et $\dfrac{1}{2}$. Donc,

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2i}Y_k = i\right) = \binom{2i}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}.$$

16 ▷ Soient $n \geqslant 1$ et $\ell \in \mathbb{Z}$.

$$S_n = \ell \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}X_k = \ell \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1+X_k}{2} = \frac{n+\ell}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}Y_k = \frac{n+\ell}{2},$$

où $\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

Si ℓ et n n'ont pas même parité ou bien si n et ℓ ont même parité et $\dfrac{n+\ell}{2} \notin [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(S_n = \ell) = 0$.

Sinon, il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\dfrac{n+\ell}{2} = k$ ou encore $\ell = 2k-n$. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}(S_n = \ell) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{\frac{n+\ell}{2}}\frac{1}{2^n}.$$

17 ▷ $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n$ ou encore $c_n - d_n \underset{n\to+\infty}{=} o(c_n)$. Puisque la suite (c_n) est strictement positive et que la série de terme général c_n diverge, d'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k - \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)$$

ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} d_k$.

18 ▷ Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons 1_{A_i} la variable indicatrice de l'événement A_i : pour tout $\omega \in \Omega$, $1_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A_i \\ 0 \text{ si } \omega \notin A_i \end{cases}$.
On sait que $\mathbb{E}(1_{A_i}) = \mathbb{P}(A_i)$. Redémontrons-le.

$$\mathbb{E}(A_i) = 1 \times \mathbb{P}(1_{A_i} = 1) + 0 \times \mathbb{P}(1_{A_i} = 0) = \mathbb{P}(1_{A_i} = 1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / \ \omega \in A_i\}) = \mathbb{P}(A_i).$$

De plus, pour tout $\omega \in \Omega$, $N_n(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(\omega)$ ou encore $N_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i},$$

d'après la question 15.

19 ▷ D'après la formule de Stirling

$$\begin{aligned}\frac{1}{4^i}\binom{2i}{i} &= \frac{1}{2^{2i}} \times \frac{(2i)!}{(i!)^2} \\ &\underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2i}}\left(\frac{2i}{e}\right)^{2i}\sqrt{2\pi \times 2i} \times \left(\frac{e}{i}\right)^{2i}\frac{1}{2\pi i} = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}\end{aligned}$$

Puisque la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi i}}\right)_{i\geqslant 1}$ est strictement positive et que la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{\pi i}}$ diverge, d'après les questions 16 et 17,

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n},$$

d'après la question 10.

20 ▷ Les indices d'égalité sont des entiers pairs compris entre 1 et $2n$. Comme à la question 18, $\mathbb{E}(M_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_{2k})$.

Un tirage successif des $2n$ boules peut s'identifier à un anagramme du mot $\underbrace{B\dots B}_{n}\underbrace{N\dots N}_{n}$ et tous ces anagrammes sont équiprobables. Le nombre de ces anagrammes est le nombre de choix des emplacements des n lettres B dans $2n$ emplacements, à savoir $\dbinom{2n}{n}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Un tirage réalisant l'événement B_{2k} « est » encore un anagramme de $\underbrace{B\dots B}_{n}\underbrace{N\dots N}_{n}$ pour lequel les $2k$ premières lettres sont constituées de k lettres B et de k lettres N. Le nombre de ces anagrammes est le nombre de choix des emplacements des k lettres B dans les $2k$ premiers emplacements et des emplacements des $n-k$ dernières lettres B dans les $2n-2k$ emplacements restants, à savoir $\dbinom{2k}{k} \times \dbinom{2n-2k}{n-k}$. Finalement $\mathbb{P}(B_{2k}) = \dfrac{\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i}\binom{2(n-i)}{n-i}}{\binom{2n}{n}} \text{ (en posant } i = n-k).$$

21 ▷ On a vu à la question 19 que $\dbinom{2i}{i} \underset{i\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2i}}{\sqrt{\pi i}}$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on peut donc poser $\dbinom{2i}{i} = \dfrac{2^{2i}}{\sqrt{\pi i}}(1 + \varepsilon_i)$ où $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement supérieurs à -1, convergente de limite nulle. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\dfrac{2^{2i}}{\sqrt{\pi i}}(1+\varepsilon_i)\dfrac{2^{2(n-i)}}{\sqrt{\pi(n-i)}}(1+\varepsilon_{n-i})}{\dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(1+\varepsilon_n)} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} + 1 \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) + 1.
\end{aligned}$$

Mais alors, d'après les questions 11 et 13,

$$\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}(\pi + o(1)) + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} o(1) + 1 \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\pi n} + o\left(\sqrt{n}\right)$$

et donc $\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}$.

