SESSION 2024

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

1 ▷ Soient $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{S}_n$. On pose $P_\rho = \left(\delta_{i,\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On sait que $P_\rho \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $(P_\rho)^{-1} = P_{\rho^{-1}} = \left(\delta_{i,\rho^{-1}(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\delta_{\rho(i),j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de $(P_\rho)^{-1} \times M \times P_\rho$ est

$$\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} \delta_{\rho(i),k} m_{k,\ell} \delta_{\ell,\rho(j)} = m_{\rho(i),\rho(j)}.$$

Donc, $(P_\rho)^{-1} MP_\rho = \left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ puis les matrices M et $\left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont semblables.

Soient σ et σ' deux bijections de $[\![1,n]\!]$ sur S. $\rho = (\sigma')^{-1} \circ \sigma$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\sigma' \circ \rho = \sigma$. Ensuite, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \Leftrightarrow \{\sigma(i),\sigma(j)\} \in A \Leftrightarrow \{\sigma'(\rho(i)),\sigma'(\rho(j))\} \in A \Leftrightarrow (M_{G,\sigma'})_{\rho(i),\rho(j)} = 1.$$

Donc, $M_{G,\sigma} = \left((M_{G,\sigma'})_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. D'après le début de la question $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 ▷ Une matrice d'adjacence est symétrique réelle et est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

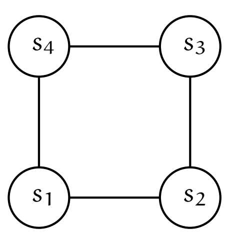
3 ▷ Soit $M_{G,\sigma}$ une matrice d'adjacence. Si $A = \varnothing$, alors $M_{G,\sigma}$ est de rang 0. Sinon, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $(M_{G,\sigma})_{i,j} = (M_{G,\sigma})_{j,i} = 1$. On a

$$\begin{vmatrix} (M_{G,\sigma})_{i,i} & (M_{G,\sigma})_{i,j} \\ (M_{G,\sigma})_{j,i} & (M_{G,\sigma})_{j,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ainsi, il existe dans $M_{G,\sigma}$ une matrice carrée extraite inversible de format 2 et donc $\mathrm{rg}\,(M_{G,\sigma}) \geqslant 2$. Une matrice d'adjacence n'est jamais de rang 1.

4 ▷ Soit $M_{G,\sigma}$ une matrice d'adjacence associé à un graphe du type de l'énoncé. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que l'étoile est de centre $\sigma(i)$. En notant $(E_1,\ldots,E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, chaque colonne C_j, $j \neq i$, est colinéaire à E_i et donc $\mathrm{rg}\,(M_{G,\sigma}) \leqslant 2$. Mais $M_{G,\sigma}$ n'est pas nulle et n'est pas de rang 1 d'après la question précédente. Donc, $\mathrm{rg}\,(M_{G,\sigma}) = 2$.

Considérons la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}\,(M_{G,\sigma}) = \mathrm{rg}\,(C_1,C_2,C_3,C_4) = \mathrm{rg}\,(C_1,C_2) = 2$. Mais le graphe correspondant n'est pas du type de l'énoncé :



5 ▷ Soient $G = (S,A)$ un graphe non vide et $G' = (S',A')$ une copie de G. 'Soit σ une bijection de S' sur S telle que

$$\forall (s',t') \in S'^2,\ \{s',t'\} \in A' \Leftrightarrow \{\sigma(s'),\sigma(t')\} \in A.$$

Soit φ une indexation de G. Alors, $\varphi' = \sigma^{-1} \circ \varphi$ est une indexation de G' (car bijective de $[\![1,n]\!]$ sur S') puis $M_{G',\varphi'} = M_{G,\varphi}$ car pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

$$(M_{G',\varphi'})_{i,j} = 1 \Leftrightarrow \{\varphi'(i), \varphi'(j)\} \in A' \Leftrightarrow \left\{\sigma^{-1}(\varphi(i)), \sigma^{-1}(\varphi(j))\right\} \in A' \Leftrightarrow \{\varphi(i), \varphi(j)\} \in A \Leftrightarrow (M_{G,\varphi})_{i,j} = 1.$$

Donc, $\chi_G = \chi_{G'}$.

6 $\triangleright$ Avec tout ce qui précède, on peut supposer sans perte de généralité que $S = [\![1,n]\!]$ et $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. On note plus simplement M_G la matrice d'adjacence correspondante.

Les coefficients diagonaux de M_G, sont nuls. Donc, $a_{n-1} = -\mathrm{tr}\,(M_{G,\sigma}) = 0$.

Déterminons maintenant a_{n-2}.

On a $\chi_G = \sum\limits_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma)\,(XI_n - M_G)_{\sigma(1),1} \ldots (XI_n - M_G)_{\sigma(n),n}$. Dans cette somme, le terme correspondant à $\sigma = \mathrm{Id}$ est X^n. Ensuite, si σ a un nombre de points fixes inférieur ou égal à $n-3$, le terme correspondant est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-3$. Ensuite, il n'existe pas de permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $n-1$ points fixes (si σ a $n-1$ points fixes, alors $\sigma = \mathrm{Id}$ puis σ a en fait n points fixes). Le coefficient a_{n-2} est donc issu exclusivement des termes où σ a exactement $n-2$ points fixes, c'est-à-dire des termes où σ est une transposition. Or, en notant $\mathscr{P}_2([\![1,n]\!])$ l'ensemble des parties à deux éléments de $[\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in (\mathscr{P}_2([\![1,n]\!]))^2} & \varepsilon\left(\tau_{i,j}\right)(XI_n - M_G)_{\tau_{i,j}(1),1} \ldots (XI_n - M_G)_{\tau_{i,j}(n),n} \\
&= -X^{n-2} \sum_{(i,j) \in (\mathscr{P}_2([\![1,n]\!]))^2} (XI_n - M_G)_{j,i} \ldots (XI_n - M_G)_{i,j} \\
&= -X^{n-2} \sum_{(i,j) \in (\mathscr{P}_2([\![1,n]\!]))^2} \left((-M_G)_{i,j}\right)^2 \\
&= -X^{n-2} \sum_{(i,j) \in A} 1 = -|A| X^{n-2}.
\end{aligned}$$

Donc, $a_{n-2} = -|A|$.

7 $\triangleright$ Si $n = 2$, $\chi_G = X^2 - |A| = X^2 - d$. Sinon, $n \geqslant 3$. Si G est du type de l'énoncé, M_G est de rang 2 d'après la question 4 puis 0 est valeur propre de M_G d'ordre $n-2$ d'après le théorème du rang et car M_G est diagonalisable. Donc, pour tout $k \leqslant n-3$, $a_k = 0$. On obtient $\chi_G = X^n - |A|X^{n-2} = X^{n-2}\left(X^2 - d\right)$, ce qui reste vrai quand $n = 2$. Donc,

$$\chi_G = X^{n-2}\left(X^2 - d\right).$$

Si $n = 2$, $\mathrm{Sp}\,(M_G) = \left(\sqrt{d}, -\sqrt{d}\right)$ et si $n \geqslant 3$, $\mathrm{Sp}\,(M_G) = (\sqrt{d}, -\sqrt{d}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2})$.

Ensuite, on peut suppose sans perte de généralité de l'étoile est de centre 1 et que les branches de l'étoile sont $\{1,2\}$, $\ldots$, $\{1, d+1\}$. On a donc

$$M_G = \begin{pmatrix}
0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & & \vdots \\
1 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & & \ldots & & \ldots & 0
\end{pmatrix}.$$

$E_0\,(M_G)$ est le sous-espace d'équations $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 + \ldots + x_{d+1} = 0 \end{array}\right.$. Il est constitué n-uplets de la forme $(0, x_2, \ldots, x_d, -x_2 - \ldots - x_d, x_{d+1}, \ldots, x_n)$ (en identifiant vecteurs colonnes et n-uplets).

Ensuite, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \sqrt{d} \\ \vdots \\ \sqrt{d} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{d} \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque $E_{\sqrt{d}}(M_g)$ est une droite, $E_{\sqrt{d}}(M_g) = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (\sqrt{d}, \underbrace{1, \dots, 1}_{d}, 0, \dots, 0)$. Un calcul conjugué fournit encore $E_{-\sqrt{d}}(M_g) = \mathrm{Vect}(v)$ où $v = (-\sqrt{d}, \underbrace{1, \dots, 1}_{d}, 0, \dots, 0)$.

8 ▷ On note n_1 (resp. n_2) le cardinal de S_1 (resp. S_2). On numérote les sommets de sorte que les sommets de S_1 apparaissent en premier en finissant par s_1 puis apparaît le sommet s_2 et enfin les autres sommets de S_2. Le polynôme caractéristique de G est alors :

$$\chi_G = \begin{vmatrix} & & & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & XI_{n_1-1} - M_{G_1 \setminus s_1} & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & \alpha_{n_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n_1-1} & X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X & \beta_1 & \dots & \beta_{n_2-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_1 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & XI_{n_2-1} - M_{G_2 \setminus s_2} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{n_2-1} & & & \end{vmatrix}$$

où les α_i et les β_j sont éléments de $\{-1, 0\}$.

On écrit ensuite, la n_1-ème colonne comme somme des deux colonnes $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n_1-1} \\ X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Par linéarité par rapport à la n_1-ème colonne χ_G est somme de deux déterminants. Le premier est un déterminant triangulaire par blocs égal à $\chi_{G_1} \times \chi_{G_2}$. On développe le deuxième suivant sa n_1-ème colonne. On obtient en tenant compte de $(-1)^{n_1+1+n_1} \times (-1) = 1$:

$$\begin{vmatrix} & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & XI_{n_1-1} - M_{G_1 \setminus s_1} & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n_1-1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_1 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & XI_{n_2-1} - M_{G_2 \setminus s_2} & \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{n_2-1} & & & \end{vmatrix} \quad (*).$$

Ce dernier déterminant est encore triangulaire par blocs. Le déterminant du premier bloc est $\chi_{G_1 \setminus s_1}$. Le deuxième, une fois développé suivant sa première ligne est $-\chi_{G_2 \setminus s_2}$ et donc le déterminant $(*)$ est égal à $-\chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$. Finalement,

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}.$$

9 ▷ D'après ce qui précède et la question 7,

$$\begin{aligned} \chi_G &= X^{d_1-1}\left(X^2 - d_1\right) X^{d_2-1}\left(X^2 - d_2\right) - X^{d_1} X^{d_2} = X^{d_1+d_2+2} - (d_1 + d_2) X^{d_1+d_2} + d_1 d_2 X^{d_1+d_2-2} - X^{d_1+d-2} \\ &= X^n - (d_1 + d_2 + 1) X^{n-2} + d_1 d_2 X^{n-4}. \end{aligned}$$

Puisque $d_1 d_2 \neq 0$, 0 est racine d'ordre $n - 4$ de χ_G puis M_G est de rang 4.

10 $\triangleright$ Soit $G = (S, A)$. On rappelle que le nombre de paires $\{i, j\}$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ est $N = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

D'après une remarque de l'énoncé, $G = \left(\bigcap_{\{i,j\}\in A} (X_{(i,j)} = 1)\right) \cap \left(\bigcap_{\{i,j\}\notin A} (X_{(i,j)} = 0)\right)$. Puisque les variables $X_{i,j}$, $\{i, j\} \in \mathscr{P}_2([\![1, n]\!])$ (où $\mathscr{P}_2([\![1, n]\!])$ est l'ensemble des parties à 2 éléments de $[\![1, n]\!]$), sont indépendantes,

$$P(G) = \prod_{\{i,j\}\in A} (X_{(i,j)} = 1) \times \prod_{\{i,j\}\notin A} (X_{(i,j)} = 0) = p_n^a (1 - p_n)^{N-a}.$$

Ensuite, pour $a \in [\![0, N]\!]$ donné, il y a $\dbinom{N}{a}$ parties A de $[\![1, n]\!]$ telles que $|A| = a$ et donc,

$$P(\Omega_n) = \sum_{a=0}^{N} \binom{N}{a} p_n^a (1 - p_n)^{N-a} = (p_n + 1 - p_n)^N = 1.$$

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

11 $\triangleright$ Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$P(X > 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = E(X).$$

12 $\triangleright$ Supposons $E(X) \neq 0$ et donc $E(X) > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = 0$ entraine $|X(\omega) - E(X)| = |-E(X)| = E(X)$ et donc $|X(\omega) - E(X)| \geqslant E(X)$. Ainsi, $(X = 0) \subset (|X - E(X)| \geqslant E(X))$.Puisque $E(X) > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit

$$P(X = 0) \leqslant P(|X - E(X) \geqslant E(X)) \leqslant \frac{V(X)}{(E(X)^2}.$$

Section B - Une fonction de seuil

13 $\triangleright$ Soit $G = ([\![1, n]\!], A) \in \Omega_n$. $A_n(G) = |A| = \displaystyle\sum_{(i,j)\in \mathscr{P}_2([\![1,N]\!])} X_{(i,j)}$. Puisque les variables $X_{(i,j)}$ sont N variables indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p_n, on sait que A_n suit la loi binomiale de paramètres N et p_n. Donc,

$$A_n(\Omega_n) = [\![0, N]\!] \text{ puis } \forall a \in [\![0, N]\!],\ P(A_n = a) = \binom{N}{a} p_n^a (1 - p_n)^{N-a}.$$

14 $\triangleright$ Donc, $E(A_n) = Np_n = \dfrac{n(n-1)}{2} p_n$. Si $p_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors

$$E(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2 p_n}{2} \underset{n\to+\infty}{=} o(1).$$

Puisque pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant P(A_n > 0) \leqslant E(A_n)$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n > 0) = 0$.

15 $\triangleright$ Pour $n \geqslant 2$,

$$\frac{V(A_n)}{(E(A_n))^2} = \frac{Np_n(1 - p_n)}{(Np_n)^2} = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{p_n} - 1\right) = \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{1}{p_n} - 1\right).$$

Si de plus, p_n est prépondérant devant $\dfrac{1}{n^2}$, alors $\dfrac{1}{p_n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ puis $\dfrac{V(A_n)}{(E(A_n))^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Puisque pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant P(A_n = 0) \leqslant \dfrac{V(A_n)}{(E(A_n))^2}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n = 0) = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n > 0) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n = 0) = 1$.

16 $\triangleright$ Pour la propriété $\mathcal{P}_n : A_n > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 2}$ est une fonction de seuil.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

17 $\triangleright$ Soit $G \in \Omega_n$. La probabilité que H soit contenu dans G est la probabilité que chaque arête de H soit contenu dans G. p_n étant la probabilité qu'une arête donnée de H soit contenue dans G et par indépendance,

$$P\left(X_H(G)=1\right) = P(H \subset G) = P\left(\bigcap_{a \in A_H}(a \in A_G)\right) = \prod_{a \in A_H} P(a \in A_G) = p_n^{a_H}.$$

X_H suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_n^{a_H}$ et donc $E\left(X_H\right) = p_n^{a_H}$.

18 $\triangleright$ Il y a $\binom{n}{s_0}$ choix de s_0 sommets parmi n et donc, $|\mathcal{C}_0| = \binom{n}{s_0} c_0$. Ensuite, les graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0 s'obtiennent par permutations des s_0 sommets. Donc, $c_0 \leqslant s_0!$ puis,

$$|\mathcal{C}_0| \leqslant \binom{n}{s_0} s_0! = n(n-1)\dots(n-s_0+1) \leqslant n^{s_0}.$$

19 $\triangleright$ $X_n^0 = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H$ puis

$$\begin{aligned} E\left(X_n^0\right) &= \sum_{H \in \mathcal{C}_0} E\left(X_H\right) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} P\left(H \subset G\right) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{a_H} \text{ (d'après la question 17)} \\ &= p_n^{a_0} \sum_{H \in \mathcal{C}_0} 1 = |\mathcal{C}_0|\, p_n^{a_0} \\ &\leqslant p_n^{a_0} n^{s_0}. \end{aligned}$$

20 $\triangleright$ Soit H_0 tel que $\omega_0 = \dfrac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$. On note $\mathcal{C}_0' = \{H \mid H \text{ est une copie de } H_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1,n]\!]\}$ et $X_n^{0\,\prime}$ la variable aléatoire définie par : $\forall G \in \Omega_n$, $X_n^{0\,\prime}(G)$ est égal au nombre de copies de H_0 contenues dans G.

En appliquant la question 19 à H_0, on obtient

$$0 \leqslant E\left(X_n^{0\,\prime}\right) \leqslant n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = n^{\omega_0 a_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = \left(p_n n^{\omega_0}\right)^{a_{H_0}}.$$

On en déduit que $E\left(X_n^{0\,\prime}\right) \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$ (car $a_{H_0} \geqslant 1$) puis que $\lim_{n \to +\infty} P\left(X_n^{0\,\prime} > 0\right) = 0$ d'après la question 11.

Ensuite, je suppose qu'il faut montrer que pour tout graphe $G = (S, A)$, G contient un nombre de copies de G_0 inférieur ou égal au nombre de copies de H_0 qu'il contient, ce que je ne parviens pas à faire. En admettant ce résultat, on a donc $0 \leqslant X_n^0 \leqslant X_n^{0\,\prime}$ puis par croissance de l'espérance,

$$0 \leqslant E\left(X_n^0\right) \leqslant E\left(X_n^{0\,\prime}\right).$$

Mais alors, $\lim_{n \to +\infty} E\left(X_n^0\right) = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Avec la question 11, on en déduit encore que $\lim_{n \to +\infty} P\left(X_n^0 > 0\right) = 0$.

21 $\triangleright$

$$\begin{aligned} E\left(\left(X_n^0\right)^2\right) &= E\left(\left(\sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H\right)\left(\sum_{H' \in \mathcal{C}_0} X_{H'}\right)\right) \\ &= \sum_{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2} E\left(X_H X_{H'}\right) \end{aligned}$$

Maintenant, pour $G \in \Omega_n$,

$$\begin{aligned}(X_HX_{H'})(G)=1 &\Leftrightarrow X_H(G)=X_{H'}(G)=1 \Leftrightarrow H\subset G \text{ et } H'\subset G\\ &\Leftrightarrow S_H\subset S_G \text{ et } A_H\subset A_G \text{ et } S_{H'}\subset S_G \text{ et } A_{H'}\subset A_G\\ &\Leftrightarrow S_H\cup S_{H'}\subset S_G \text{ et } A_H\cup A_{H'}\subset A_G\\ &\Leftrightarrow H\cup H'\subset G,\end{aligned}$$

(en supposant que $H\cup H'$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est $S_H\cup S_{H'}$ et l'ensemble des arêtes est $A_H\cup A_{H'}$). En appliquant la question 16 à $H\cup H'$, on obtient pour tout $G\in\Omega_n$,

$$P(H\cup H'\subset G)=p_n^{|A_H\cup A_{H'}|}=p_n^{a_H+a'_H-a_{H\cap H'}}=p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

Ainsi, $X_H\times X_{H'}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}$. On en déduit que $E\left(X_H\times X_{H'}\right)=p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}$ puis que

$$E\left(\left(X_n^0\right)^2\right)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}P(H\cup H'\subset G)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

22 ▷ Si $S_H\cap S_{H'}=\varnothing$, pour tout $G\in\Omega_n$, les événements $\{H\subset G\}$ et $\{H'\subset G\}$ sont indépendants (par indépendance des variables $X_{\{i,j\}}$ définies avant la question 10). Donc,

$$P(H\cup H'\subset G)=P((H\subset G)\cap(H'\subset G))=P(H\subset G)\times P(H'\subset G),$$

puis

$$\Sigma_0=\sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=0}}P(H\subset G)\times P(H'\subset G)\leqslant\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}P(H\subset G)\times P(H'\subset G)=\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2.$$

23 ▷ Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$.

$$\Sigma_k=\sum_{H\in\mathcal{C}_0}\left(\sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0\\ s_{H\cap H'}=k}}P(H\cup H'\subset G)\right)=\sum_{H\in\mathcal{C}_0}\left(\sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0\\ s_{H\cap H'}=k}}p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}\right).$$

Pour tout $(H,H')\in(\mathcal{C}_0)^2$ tel que $s_{H\cap H'}=k$, $\dfrac{k}{a_{H\cap H'}}=\dfrac{s_{H\cap H'}}{a_{H\cap H'}}\geqslant\omega_0$ puis $-a_{H\cap H'}\geqslant-\dfrac{k}{\omega_0}$ et donc, en tenant compte de $p_n\in]0,1[$, $p_n^{-a_{H\cap H'}}\leqslant p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$. Pour $H\in\mathcal{C}_0$, on note alors $\mathcal{E}_{H,k}=\{H'\in\mathcal{C}_0/\ |H\cap H'|=k\}$ et on a

$$\Sigma_k\leqslant\sum_{H\in\mathcal{C}_0}\left(\sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0\\ s_{H\cap H'}=k}}1\right)p_n^{2a_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}=\left(\sum_{H\in\mathcal{C}_0}|\mathcal{E}_{H,k}|\right)p_n^{2a_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

Il reste à déterminer $|\mathcal{E}_{H,k}|$ pour $H\in\mathcal{C}_0$ fixé. Pour $H'\in\mathcal{E}_{H,k}$, il s'agit de choisir d'abord l'ensemble S'_0 des sommets de H' : k des s_0 de sommets sont dans H et s_0-k sont dans $[\![1,n]\!]\setminus(H\cap H')$. Il y a donc $\dbinom{s_0}{k}\times\dbinom{n-k}{s_0-k}$ choix de S'_0. Pour chacun de ces choix de S'_0, il y a c_0 graphes $H'\in\mathcal{C}_0$ dont l'ensemble des sommets est S'_0. Donc, $|\mathcal{E}_{H,k}|=\dbinom{s_0}{k}\times\dbinom{n-k}{s_0-k}c_0$. Finalement,

$$\Sigma_k\leqslant\sum_{H\in\mathcal{C}_0}\binom{s_0}{k}\times\binom{n-k}{s_0-k}c_0p_n^{2a_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 ▷ Soient q et r deux entiers naturels tels que $1\leqslant q\leqslant r$.

$$\binom{r}{q}r^{-q}=\frac{1}{q!}\frac{r(r-1)\ldots(r-(q-1))}{r^q}=\frac{1}{q!}\prod_{k=0}^{q-1}\left(1-\frac{k}{r}\right).$$

Pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{k}{r} \leqslant \dfrac{q-1}{q}$ puis $1 - \dfrac{k}{r} \geqslant 1 - \dfrac{q-1}{q} > 0$ et donc

$$\binom{r}{q} r^{-q} \geqslant \frac{1}{q!} \prod_{k=0}^{q-1} \left(1 - \frac{q-1}{q}\right) = \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q.$$

Soit alors $k \in [\![1, s_0]\!]$. On a vu aux questions 17 et 18 que $|\mathcal{C}_0| = \dbinom{n}{s_0} c_0$ puis $E\left(X_n^0\right) = p_n^{a_0} |\mathcal{C}_0|$. Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma_k}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2} &\leqslant \frac{1}{p_n^{2a_0} |\mathcal{C}_0|^2} \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \\
&\leqslant \frac{c_0}{|\mathcal{C}_0|}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} = \frac{\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \\
&\leqslant \binom{s_0}{k} \frac{1}{\frac{n^{s_0}}{s_0!}\left(1 - \frac{s_0-1}{s_0}\right)^{s_0}} \binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{-\frac{k}{n_0}} \text{ (d'après le début de la question)} \\
&= s_0! \binom{s_0}{k} s_0^{s_0} \binom{n-s_0}{s_0-k} n^{-s_0} p_n^{-\frac{k}{n_0}} \quad (*).
\end{aligned}$$

Maintenant, $\dbinom{n-s_0}{s_0-k} = \dfrac{\overbrace{(n-s_0)(n-s_0-1)\dots(n-2s_0+k)}^{s_0-k}}{(s_0-k)!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^{s_0-k}}{(s_0-k)!}$ puis, en posant $K = \dfrac{s_0!}{(s_0-k)!}\dbinom{s_0}{k} s_0^{s_0}$ (K est constant quand n varie),

$$s_0! \binom{s_0}{k} s_0^{s_0} \binom{n-s_0}{s_0-k} n^{-s_0} p_n^{-\frac{k}{n_0}} \underset{n \to +\infty}{\sim} K n^{-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} = K\left(n^{\omega_0} p_n\right)^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

Par hypothèse, $n^{\omega_0} p_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ et donc, puisque $-\dfrac{k}{\omega_0} < 0$, $K\left(n^{\omega_0} p_n\right)^{-\frac{k}{\omega_0}} \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$. Mais alors, l'inégalité $(*)$ montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\Sigma_k}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2} = 0$ puis

$$\Sigma_k \underset{n \to +\infty}{=} o\left(E\left(X_n^0\right)^2\right).$$

25 ▷ D'après la formule de Koenig-Huygens, $\dfrac{V\left(X_n^0\right)}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2} = \dfrac{E\left(\left(X_n^0\right)^2\right)}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2} - 1$.

Ensuite, d'après les questions 21 et 24, $E\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{s_0} \Sigma_k \underset{n \to +\infty}{=} \Sigma_0 + o\left(\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2\right)$ et donc

$$\frac{V\left(X_n^0\right)}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\Sigma_0}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2} - 1 + o(1),$$

ou encore $\dfrac{V\left(X_n^0\right)}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2} + 1 - \dfrac{\Sigma_0}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Les suites $(u_n) = \left(\dfrac{V\left(X_n^0\right)}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2}\right)$ et $(v_n) = \left(1 - \dfrac{\Sigma_0}{\left(E\left(X_n^0\right)\right)^2}\right)$ sont positives (pour la suite (v_n) d'après la question 22) et leur somme tend vers 0. Donc, la suite $\left(\|(u_n, v_n)\|_1\right)$ tend vers 0 puis chacune des suites (u_n) et (v_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{V\left(X_n^0\right)}{\left(E\left(X_N^0\right)\right)^2} = 0.$$

26 ▷ D'après les questions 25 et 12, si $n^{-\omega_0} \underset{n \to +\infty}{=} o(p_n)$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(X_n^0 = 0\right) = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n > 0) = 1$. D'autre part, d'après la question 20, si $p_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(n^{-\omega_0}\right)$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n > 0) = 0$.

Donc, la suite $(k^{-\omega_0})_{k\geqslant 2}$ est une fonction seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$: « contenir une copie de G_0 ».

27 ▷ • On se place d'abord dans le cas particulier où G_0 est un graphe à deux sommets et une arête. Le nombre de copies de G_0 contenu dans un graphe G est alors le nombre d'arêtes de G ou encore $A_n = X_n^0$ (A_n ayant été définie à la question 13). Le seul graphe contenu dans G_0 possédant au moins une arête est G_0 lui-même. Donc iici $\omega_0 = 2$. On retrouve donc le fait que la suite $\left(\dfrac{1}{k^2}\right)_{k\geqslant 2}$ est une fonction de seuil de la propriété « $A_n > 0$ ».

• On se place maintenant dans le cas particulier où G_0 est l'étoile à d branches de sommet 1 et d'arêtes $\{1,2\}, \ldots, \{1, d+1\}$. Dans ce cas, si H est un sous-graphe de G_0 ne contenant pas 1, $a_H = 0$, et si H contient 1,

$$\frac{s_H}{a_H} = \frac{s_H}{s_H - 1} = 1 + \frac{1}{s_H - 1} \geqslant 1 + \frac{1}{d-1} = \frac{d}{d-1}$$

avec égalité obtenue si $H = G_0$. Donc, $\omega_0 = \dfrac{d}{d-1}$ puis une fonction seuil est la suite $\left(\dfrac{1}{k^{\frac{d}{d-1}}}\right)_{k\geqslant 2}$.

