Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

Partie I : Calcul d'une intégrale

1 ▷ Soit $x \in]0,1[$. Soit $(t,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. Alors,

$$1 + te^{i\theta} = 0 \Leftrightarrow 1 + t\cos(\theta) = t\sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ et } 1 + t = 0.$$

Mais pour $t > 0$, $1 + t \neq 0$. Donc, pour tout $(t,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$, $1 + te^{i\theta} \neq 0$.

La fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[$. De plus, la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

Ensuite, $|f(t)| \underset{t\to 0,\ t>0}{\sim} t^{x-1}$ avec $x - 1 > -1$. Donc la fonction f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

Ensuite, $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^{x-1}}{|te^{i\theta}|} = \dfrac{1}{t^{2-x}}$ avec $2 - x > 1$. Donc la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2 ▷ Soit $x \in]0,1[$. Soit $\beta \in]0,\pi[$. Soit $(t,\theta) \in [0,+\infty[\times[-\beta,\beta]$. Alors, $\cos(\theta) \geqslant \cos(\beta)$ puis $2t\cos(\theta) \geqslant 2t\cos(\beta)$ et donc

$$\left|1 + te^{i\theta}\right|^2 = (1 + t\cos(\theta))^2 + (t\sin(\theta))^2 = t^2 + 2t\cos(\theta) + 1 \geqslant t^2 + 2t\cos(\beta) + 1 = \left|1 + te^{i\beta}\right|^2.$$

Ensuite, posons $\Phi \begin{array}{ccc} [-\beta,\beta]\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ (\theta,t) & \mapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \end{array}$ de sorte que pour tout $\theta \in [-\beta,\beta]$, $r(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(\theta,t)\, dt$.

• Pour chaque $\theta \in [-\beta,\beta]$, la fonction $t \mapsto \Phi(\theta,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente.

• La fonction Φ admet sur $[-\beta,\beta]\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable θ définie par

$$\forall(\theta,t) \in [-\beta,\beta]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta,t) = -ie^{i\theta} \times \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}.$$

De plus,

- pour tout $\theta \in [-\beta,\beta]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta,t)$ est continue sur $[-\beta,\beta]$,
- pour tout $(\theta,t) \in [-\beta,\beta]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta,t)\right| = \dfrac{t^x}{|1+te^{i\theta}|^2} \leqslant \dfrac{t^x}{|1+te^{i\beta}|^2} = \varphi(t)$.

  La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente, prolongeable par continuité en 0 (car $x > 0$) et donc intégrable sur un voisinage de 0. De plus, $|\varphi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^x}{t^2} = \dfrac{1}{t^{2-x}}$ avec $2 - x > 1$. La fonction φ est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et finalement sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction r est de classe C^1 sur $[-\beta,\beta]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $\beta \in]0,\pi[$, on a montré que la fonction r est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et de plus,

$$\forall\theta \in]-\pi,\pi[,\ r'(\theta) = -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\, dt.$$

3 ▷ Soit $x \in]0,1[$. La fonction g est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$. Pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$,

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= ixe^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,dt + e^{ix\theta}\times\left(-ie^{i\theta}\right)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{\left(1+te^{i\theta}\right)^2}\,dt = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\frac{xt^{x-1}\left(1+te^{i\theta}\right)-e^{i\theta}t^x}{\left(1+te^{i\theta}\right)^2}\,dt\\ &= ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{t^x}{1+te^{i\theta}}\right)\,dt = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty}h'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Or, $h(0) = \dfrac{0^x}{1+0\times e^{i\theta}} = 0$ D'autre part, $|h(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^x}{t} = t^{x-1}$ avec $x-1<0$. On en déduit que pour tout réel $\theta \in]-\pi,\pi[$,

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta}\left(\lim_{t\to+\infty}h(t)-h(0)\right) = 0.$$

La fonction g est donc constante sur $]-\pi,\pi[$ puis, pour tout réel $\theta \in]-\pi,\pi[$,

$$g(\theta) = g(0) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt.$$

4 ▷ Soit $x \in]0,1[$. Soit $\theta \in]0,\pi[$. Puisque la fonction g est constante sur $]-\pi,\pi[$, $g(-\theta) = g(\theta)$ puis

$$\begin{aligned}g(\theta)\sin(x\theta) &= g(\theta)\times\frac{1}{2i}\left(e^{ix\theta}-e^{-ix\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta}-g(\theta)e^{-ix\theta}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix\theta}e^{-ix\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+te^{-i\theta}}\,dt - e^{-ix\theta}e^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,dt\right)\\ &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\left(1+te^{i\theta}\right)-\left(1+te^{-i\theta}\right)\right)t^{x-1}}{\left(1+te^{i\theta}\right)\left(1+te^{-i\theta}\right)}\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{t\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)t^{x-1}}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,dt\\ &= \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2-2t\cos(x)+1}\,dt\end{aligned}$$

5 ▷ Soit $x \in]0,1[$. Soit $\theta \in]0,\pi[$. Alors, $\sin(\theta)>0$. Donc, la fonction $t\mapsto \dfrac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, strictement monotone sur cet intervalle, bijective de $]0,+\infty[$ sur $]\operatorname{cotan}(\theta),+\infty[$. En posant $u = \dfrac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et donc $t = u\sin(\theta)-\cos(\theta)$ et $dt = \sin(\theta)du$, on obtient

$$\begin{aligned}g(\theta)\sin(x\theta) &= \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,dt\\ &= \sin(\theta)\int_{\operatorname{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^2+2(u\sin(\theta)-\cos(\theta))\cos(\theta)+1}\,\sin(\theta)du\\ &= \int_{\operatorname{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{\sin^2(\theta)(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{u^2\sin^2(\theta)+\sin^2(\theta)}\,du = \int_{\operatorname{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{u^2+1}\,du\end{aligned}$$

6 ▷ Soit $x \in]0,1[$. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $]0,\pi[$ convergeant vers π. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $u\in\mathbb{R}$, posons

$$\psi_n(u) = \begin{cases}\dfrac{(u\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n))^x}{u^2+1} \text{ si } u \geqslant \operatorname{cotan}(\theta_n)\\ 0 \text{ si } u < \operatorname{cotan}(\theta_n)\end{cases},$$

de sorte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(u)\,du$.

- Chaque fonction ψ_n est continue par morceaux sur $]-\infty,+\infty[$.
- Soit $u \in]-\infty,+\infty[$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{cotan}(\theta_n) = -\infty$, il existe n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $\operatorname{cotan}(\theta_n) < u$ puis $\psi_n(u) = \dfrac{(u\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n))^x}{u^2+1}$. Mais alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}\psi_n(u) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(u\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n))^x}{u^2+1} = \dfrac{(0-(-1))^x}{u^2+1} = \dfrac{1}{u^2+1}$.

La suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-\infty,+\infty[$ vers la fonction $\psi\ :\ u\mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$. De plus, la fonction ψ est continue par morceaux sur $]-\infty,+\infty[$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $u\in[\text{cotan}\,(\theta_n)\,,+\infty[$, $u\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n)=|u\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n)|\leqslant|u|\,|\sin(\theta_n)|+|\cos(\theta_n)|\leqslant|u|+1$ puis $|\psi_n(u)|\leqslant\dfrac{(|u|+1)^x}{u^2+1}$. Cette inégalité reste vraie quand $u<\text{cotan}\,(\theta_n)$ et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall u\in]-\infty,+\infty[,\ |\psi_n(u)|\leqslant\varphi(u)\text{ où }\forall u\in]-\infty,+\infty[,\ \varphi(u)=\frac{(|u|+1)^x}{u^2+1}.$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]-\infty,+\infty[$, positive et intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ car équivalente en $\pm\infty$ à $\dfrac{1}{|u|^{2-x}}$ avec $2-x>1$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- (chaque fonction ψ_n est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$)
- (la fonction ψ est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$),
- la suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(u)\ du\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(u)\ du=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u)\ du.$

Plus explicitement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}g(\theta_n)\sin(x\theta_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\ du.$

Ainsi, pour toute suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels de $]0,\pi[$ convergeant vers π, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}g(\theta_n)\sin(x\theta_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\ du$. On sait alors que

$$\lim_{\theta\to\pi^-}g(\theta)\sin(x\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\ du=[\text{Arctan}(u)]_{-\infty}^{+\infty}=\pi.$$

7 ▷ D'autre part, pour tout réel $\theta\in]0,\pi[$, $g(\theta)\sin(x\theta)=\sin(x\theta)\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt$ et donc $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi^-}g(\theta)\sin(x\theta)=\sin(\pi x)\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt$. On en déduit que pour tout $x\in]0,1[$, $\sin(\pi x)\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt=\pi$ puis, en tenant compte de $\sin(\pi x)\neq0$,

$$\forall x\in]0,1[,\ \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8 ▷ Soit $x\in]0,1[$. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt$ puis, en posant $u=\dfrac{1}{t}$,

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt=\int_1^0\frac{u^{1-x}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{du}{u^2}\right)=\int_0^1\frac{u^{-x}}{1+u}\ du=\int_0^1\frac{t^{-x}}{1+t}\ dt.$$

Finalement,

$$\forall x\in]0,1[,\ \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\ dt=\int_0^1\left(\frac{t^{x-1}}{1+t}+\frac{t^{-x}}{1+t}\right)\ dt.$$

9 ▷ Soit $x\in]0,1[$. Pour $N\in\mathbb{N}$ fixé,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^n + (-1)^{N+1}\frac{t^{N+1}}{1+t}\right)dt\\ &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 t^{n+x-1}\,dt + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,dt \text{ (toutes les intégrales convergent)}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{x+n} + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,dt \quad (*).\end{aligned}$$

De plus, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{x+N}\,dt = \frac{1}{x+N+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{x+N+1} = 0$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{N\to+\infty}(-1)^{N+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,dt = 0$. Quand N tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et de plus,

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}.$$

10 ▷ Soit $x \in]0,1[$. Alors, $1-x \in]0,1[$ puis

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-x)-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-x+n},$$

puis, d'après la question **Q8**,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

11 ▷ Soit $x \in]0,1[$. D'après la question **Q7**,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x}.\\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right)\\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}.\end{aligned}$$

12 ▷ Soit $y \in]0,\pi[$. Alors, $x = \dfrac{y}{\pi} \in]0,1[$ puis d'après la question précédente,

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{y} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n y}{n^2 - \frac{y^2}{\pi^2}}$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n y}{n^2\pi^2 - y^2} = \frac{1}{\sin(y)} - \frac{1}{y}$$

et finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n y\sin(y)}{n^2\pi^2 - y^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}.$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 ▷ Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Ensuite, $f(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)^{2p+1}}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{1-\left(1-\frac{(2p+1)t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{2p+1}{2}+o(1)$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur un voisinage de 0.

Enfin, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La fonction f est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$ puis sur $]0,+\infty[$. On en déduit l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt$.

Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0<\varepsilon<A$. Les deux fonctions $t\mapsto 1-(\cos(t))^{2p+1}$ et $t\mapsto -\dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt &= \left[-\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{-(2p+1)(-\sin(t))(\cos(t))^{2p}}{t}\,dt \\ &= \frac{1-(\cos(\varepsilon))^{2p+1}}{\varepsilon} - \frac{1-(\cos(A))^{2p+1}}{A} + (2p+1)\int_\varepsilon^A (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

$\dfrac{1-(\cos(\varepsilon))^{2p+1}}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{=} \dfrac{(2p+1)\varepsilon}{2}+o(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$. D'autre part, $\left|\dfrac{1-(\cos(A))^{2p+1}}{A}\right| \leqslant \dfrac{2}{A}$ et donc $\dfrac{1-(\cos(A))^{2p+1}}{A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$.

Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et de plus

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt = (2p+1)\int_0^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

14 ▷ Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt &= \int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{n\pi}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \int_{n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos(n\pi-u))^{2p}\frac{\sin(n\pi-u)}{n\pi-u}\,(-du) + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(n\pi+u))^{2p}\frac{\sin(n\pi+u)}{n\pi+u}\,du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}-(-1)^n(\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{n\pi-u}\,du + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n(\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{n\pi+u}\,du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n(\cos(u))^{2p}\sin(u)\left(\frac{1}{n\pi+u}-\frac{1}{n\pi-u}\right)\,du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,dt.\end{aligned}$$

15 ▷ Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}(\cos(t))^{2p+1}\frac{\sin(t)}{t}\,dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,dt.\end{aligned}$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t) = (\cos(t))^{2p}\dfrac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

$$|f_n(t)| = \frac{2t\sin(t)}{n^2\pi^2-t^2} \leqslant \frac{\pi}{n^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}$$

puis $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\pi}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}}$. On en déduit que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Mais alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p+1} \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} \right) dt.$$

16 ▷ Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} \right) dt \text{ (d'après la question } \textbf{Q15}\text{)} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \text{ (d'après la question } \textbf{Q12}\text{)} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \, dt.
\end{aligned}$$

17 ▷ Soient $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(\cos(t))^{2p} = \left(\frac{1}{2} \left(e^{it} + e^{-t} \right) \right)^{2p} &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{i(2p-k)t} e^{-ikt} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)t} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)t} \right) \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)t} + \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{2p}{2p-\ell} e^{2i(p-(2p-\ell))t} \right) \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)t} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{-2i(p-k)t} \right) \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \left(e^{2i(p-k)t} + e^{-2i(p-k)t} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos((p-k)t) \right).
\end{aligned}$$

18 ▷ Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \, dt &= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((p-k)t) \, dt \right) \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \left[\frac{\sin((p-k)t)}{p-k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.
\end{aligned}$$

Mais alors, d'après les questions **Q13** et **Q16**,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \, dt = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

19 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $E(X_1) = (-1) \times P(X_1 = -1) + 1 \times P(X_1 = 1) = 0$ puis, par linéarité de l'espérance

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = nE(X_1) = 0.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1) = 1 - 0 = 1$ puis, les variables X_k étant indépendantes et en particulier deux à deux indépendantes,

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = nV(X_1) = n.$$

20 ▷ Les variables S et T sont indépendantes et il en est de même des variables $\cos(S)$ et $\cos(T)$ et des variables $\sin(S)$ et $\sin(T)$. Donc,

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)) = E(\cos(S))E(\cos(T) - E(\sin(S))E(\sin(T)).$$

Ensuite, puisque les variables T et $-T$ suivent la même loi, il en est de même des variables $\sin(T)$ et $\sin(-T)$. On en déduit que

$$E(\sin(T)) = E(\sin(-T)) = -E(\sin(T))$$

et donc $E(\sin(T)) = 0$. On a montré que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

21 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$.

- D'après la formule de transfert,

$$E(\cos(tS_1)) = E(\cos(tX_1)) = \frac{1}{2}\cos(-t) + \frac{1}{2}\cos(t) = \cos(t).$$

L'égalité est vraie quand $n = 1$

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $E(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$. Alors $E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n + tX_{n+1}))$. D'après le lemme des coalitions, les variables tS_n et tX_{n+1} sont indépendantes. Mais alors, d'après la question précédente,

$$E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n)) \times E(\cos(tX_{n+1})) = (\cos(t))^n \times \cos(t) = (\cos(t))^{n+1}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$.

22 ▷ Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $|b| \leqslant |a|$.
Si $a > 0$, $a + b \geqslant a - |b| \geqslant 0$ et donc $|a+b| = a+b = |a|+b$.
Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et $|-b| \leqslant |-a|$. Donc, $|a+b| = |-a-b| = |-a| + (-b) = |a| - b$.
Dans les deux cas, $|a+b| = |a| + \text{sgn}(a)b$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $2n-1$ est impair, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $|S_{2n-1}(\omega)| \geqslant 1 = |X_n(\omega)| > 0$. D'après ce qui précède,

$$|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{sgn}(S_{2n-1})X_{2n}.$$

Ensuite, d'après le lemme des coalitions, les variables $\text{sgn}(S_{2n-1})$ et X_{2n} sont indépendantes. Donc,

$$E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|) + E(\text{sgn}(S_{2n-1})X_{2n}) = E(|S_{2n-1}|) + E(\text{sgn}(S_{2n-1}))E(X_{2n}) = E(|S_{2n-1}|).$$

23 ▷ D'après la question **Q18**, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Soit $s \in \mathbb{R}$.

Si $s > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{\left(\frac{u}{s}\right)^2}\frac{du}{s} = \frac{\pi}{2}s = \frac{\pi}{2}|s|$.

Si $s < 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos((-s)t)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|-s| = \frac{\pi}{2}|s|$.

Si $s = 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = 0 = \frac{\pi}{2}|s|$. Finalement,

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|s|.$$

24 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(|S_n|\right) &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} |s| \mathrm{P}\left(S_n = s\right) \\
&= \sum_{s \in S_n(\Omega)} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt\right) \mathrm{P}\left(S_n = s\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{s \in S_n(\Omega)} \mathrm{P}\left(S_n = s\right) - \sum_{s \in S_n(\Omega)} \cos(st)\mathrm{P}\left(S_n = s\right)}{t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right)}{t^2}\,dt \text{ (d'après la formule de transfert)} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^n}{t^2}\,dt \text{ (d'après la question } \mathbf{Q21}\text{).}
\end{aligned}$$

25 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions **Q24**, **Q22** et **Q18**,

$$\mathrm{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathrm{E}\left(|S_{2n-1}|\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.$$

