SESSION 2023

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PC

Préliminaires

1) Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$.

$$AU = U \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} 1 \times A[i,j] = 1 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} A[i,j] = 1 \Leftrightarrow A \text{ vérifie } (M_2).$$

Soient A et B deux noyaux de Markov. Tout d'abord, les coefficients de AB sont des réels positifs en tant que sommes de produits de réels positifs. Ensuite $ABU = AU = U$ et donc AB vérifie (M_2).

On a montré que le produit de deux noyaux de Markov est un noyau de Markov.

2) Soit $K \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ un noyau de Markov. $K^0 = I_N$ est un noyau de Markov et si pour $n \geqslant 0$, K^n est un noyau de Markov, alors $K^{n+1} = K^n \times K$ est un noyau de Markov.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3) Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant K^n[i,j] \leqslant 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{t^n K^n[i,j]}{n!}\right| \leqslant \frac{|t|^n}{n!}.$$

La série numérique de terme général $\dfrac{|t|^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et donc la série numérique de terme général $\dfrac{t^n K^n[i,j]}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier converge.

4) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Déjà, puisque les matrices K^n, $n \in \mathbb{N}$, sont des noyaux de Markov, les coefficients de H_t sont des réels positifs. Soit alors $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} K^n[i,j]\right) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = e^{-t} \times e^t = 1.$$

Donc, pour tout réel positif t, H_t est un noyau de Marlov.

5) Soit $(t,s) \in [0,+\infty[^2$. Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
(H_t H_s)[i,j] &= \sum_{k=1}^{N} H_t[i,k] H_s[k,j] = e^{-(t+s)} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,k]}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n K^n[k,j]}{n!}\right) \\
&= e^{-(t+s)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{t^p K^p[i,k]}{p!} \frac{s^{n-p} K^{n-p}[k,j]}{(n-p)!}\right) \\
&\quad \text{(produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p s^{n-p} \left(\sum_{k=1}^{N} K^p[i,k] K^{n-p}[k,j]\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p s^{n-p} K^{p+n-p}[i,j]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p s^{n-p}\right) K^n[i,j] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} K^n[i,j] = H_{t+s}[i,j].
\end{aligned}$$

Donc, $H_t H_s = H_{t+s}$.

Partie 1 - Modélisation probabiliste

6) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(Z_k = i) \neq 0$, l'application $P_{/Z_k=i}$ est une probabilité et donc

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} P_{/Z_K=i}(Z_{k+1} = j) = 1 \quad (*).$$

L'énoncé ne dit pas ce que valent les $p_{i,j}$, $j \in [\![1, n]\!]$, quand pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Z_k = i) = 0$. Nous supposerons par la suite que l'égalité $(*)$ reste conventionnellement vraie dans ce cas, pour pouvoir continuer le problème. Nous ne nous poserons plus de questions sur le fait que $P(Z_k = i)$ soit nul ou pas.

« On a montré que » K est un noyau de MARKOV.

7) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, $P(Z_n = j) = K^n[1, j]$.

- Pour $j \in [\![1, N]\!]$, $P(Z_0 = j) = \delta_{1,j} = I_n[1, j] = K^0[1, j]$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, $P(Z_n = j) = K^n[1, j]$. Soit $j \in [\![1, N]\!]$. $(Z_n = i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est un système complet d'événements.

$$\begin{aligned}
P(Z_{n+1} = j) &= \sum_{i=1}^{N} P((Z_{n+1} = j) \cap (Z_n = i)) = \sum_{i=1}^{N} p_{i,j} P(Z_n = i) \text{ (d'après la formule des probabilités totales)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} K^n[1, i] K[i, j] \text{ par hypothèse de récurrence)} \\
&= K^{n+1}[1, j].
\end{aligned}$$

Le résultat est « démontré » par récurrence.

8) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. $Y_t(\Omega) = \mathbb{N}$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y_t = k) = \dfrac{t^k e^{-t}}{k!}$. Soit $j \in [\![1, N]\!]$. En supposant de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variables Y_t et Z_n indépendantes,

$$\begin{aligned}
P(A_{t,j}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y_t = n) \cap (Z_n = j)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_t = n) \times P(Z_n = j) \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} K^n[1, j] \\
&= H_t[1, j] \text{ d'après la question 3).}
\end{aligned}$$

Partie 2 - Etude d'un endomorphisme autoadjoint

9) Puisque u est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(E, (\,|\,))$, χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ puis il existe une base orthonormée de $(E, (\,|\,))$ constituée de vecteurs propres de u.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u puis x un vecteur propre associé.

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda(x|x) = (\lambda x|x) = (u(x)|x) = q_u(x).$$

Puisque $x \neq 0$, on a $\|x\|^2 > 0$ puis $\lambda = \dfrac{q_u(x)}{\|x\|^2} \geqslant 0$. Les valeurs propres de u sont donc des réels positifs.

10) Puisque 0 est valeur propre simple et que u est diagonalisable, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 0, à savoir $\mathrm{Ker}(u)$, est de dimension 1.

Posons $\mathrm{Sp}(u) = (0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_2 > 0$ et $\forall k \in [\![2, N]\!]$, $\lambda_k \geqslant \lambda_2$. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$ une base orthonormée de vecteurs propres associée.

Soit $x \in E$. Le vecteur $y = x - p(x)$ est un élément de $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$. On peut poser $y = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} y_i e_i$.

$$\begin{aligned}
q_u(x-p(x)) = q_u(y) = (u(y)|y) &= \left(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i y_i e_i | \sum_{j=2}^{n} y_j e_j\right)\\
&= \sum_{i=2}^{n}\lambda_i y_i^2 \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée)}\\
&\geqslant \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} y_i^2 = \lambda_2\|y\|^2 \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée)}\\
&= \lambda_2\|x-p(x)\|^2
\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $x \in E$, $q_u(x-p(x)) \geqslant \lambda_2\|x-p(x)\|^2$.

Partie 3 - Convergence de $H_t[i,j]$

11) Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Puisque K est π-réversible,

$$(\pi K)[i] = \sum_{j=1}^{N}\pi(j)K[j,i] = \sum_{j=1}^{N}\pi(i)K[i,j] = \pi[i]\sum_{j=1}^{N}K[i,j] = \pi[i].$$

Ceci montre que $\pi K = \pi$.

12) • $\langle\ ,\ \rangle$ est une application de $(\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R}))^2$ dans $\mathbb{R}$.

• $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique, linéaire par rapport à chacune de ses variables.

• Pour tout $X \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, $\langle X,X\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\pi[i](X[i])^2$ et donc $\langle X,X\rangle \geqslant 0$ et de plus,

$$\begin{aligned}
\langle X,X\rangle = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\pi[i](X[i])^2 = 0\\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1,N]\!],\ \pi[i](X[i])^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)}\\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1,N]\!],\ X[i] = 0 \text{ (car } \forall i \in [\![1,N]\!],\ \pi[i] \neq 0)\\
&\Rightarrow X = 0.
\end{aligned}$$

On a montré que $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

13) Soit $X \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow (I_N - K)X = 0 \Leftrightarrow KX = X \Leftrightarrow X \in E_1(K)$ (où $E_1(K)$ est le sous-espace propre de K associé à la valeur propre 1). Puisque 1 est valeur propre simple de K, on sait que $E_1(K)$ est de dimension 1. Puisque $KU = U$ avec $U \neq 0$, U est un vecteur non nul de la droite $E_1(K)$ et donc $\text{Ker}(u) = E_1(K) = \text{Vect}(U)$.

Soient alors $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle u(X),Y\rangle + \langle X,Y\rangle = -\langle KX,Y\rangle &= -\sum_{i=1}^{N}(KX)[i]Y[i]\pi[i]\\
&= -\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}K[i,j]X[j]\right)Y[i]\pi[i] = -\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}K[i,j]\pi[i]X[j]Y[i]\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}K[j,i]\pi[j]X[j]Y[i]\right) \text{ (car } K \text{ est } \pi-\text{réversible)}\\
&= -\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}K[j,i]Y[i]\right)X[j]\pi[j] = -\sum_{j=1}^{N}X[j](KY)[j]\pi[j]\\
&= \langle X,u(Y)\rangle + \langle X,Y\rangle,
\end{aligned}$$

et donc $\langle u(X), Y\rangle = \langle X, u(Y)\rangle$. Par suite, u est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$.

14) Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

$\langle X, X\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}(X[i])^2\pi(i) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}K[i,j]\right)(X[i])^2\pi[i] = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}(X[i])^2K[i,j]]\pi[i]$ puis, K étant π-réversible, on a aussi $\langle X, X\rangle = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}(X[j])^2K[j,i]]\pi[j] = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}(X[j])^2K[i,j]]\pi[i]$ et donc

$$\langle X, X\rangle = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}\left((X[i])^2 + (X[j])^2\right)K[i,j]\pi[i].$$

Ensuite, d'après la question précédente, $\langle KX, X\rangle = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}K[i,j]X[i]X[j]\pi[i]$ et donc

$$\begin{aligned}
q_u(X) &= \langle X, X\rangle - \langle KX, X\rangle\\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}\left((X[i])^2 + (X[j])^2\right)K[i,j]\pi[i] - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}K[i,j]\pi[i]X[i]X[j]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}\left((X[i])^2 + (X[j])^2 - 2X[i]X[j]\right)K[i,j]\pi[i] = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}(X[i] - X[j])^2\,K[i,j]\pi[i].
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $X \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, $q_u(X) \geqslant 0$. D'après la question 9, les valeurs propres de u sont des réels positifs ou nuls.

15) Soit $X \in E$. Soit $[i,j] \in [\![1,N]\!]^2$. D'après la question 3), pour tout réel t, la série de terme général $\dfrac{t^nK^n[i,j]}{n!}$ converge ou encore la série entière associée à la suite $\left(\dfrac{K^n[i,j]}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence infini. On sait alors que la somme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Donc, la fonction $t \mapsto H_t[i,j]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
(H_t[i,j])'(t) &= -e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,j]}{n!} + e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}K^n[i,j]}{(n-1)!} = -e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,j]}{n!} + e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^{n+1}[i,j]}{n!}\\
&= -H_t[i,j] + e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^{n+1}[i,j]}{n!}.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^{n+1}[i,j]}{n!} &= e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{N}K[i,k]K^n[k,j]\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N}K[i,k]\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}K^n[k,j]\right)\ \text{(combinaison linéaire de séries convergentes)}\\
&= \sum_{k=1}^{N}K[i,k]H_t[k,j] = (KH_t)[i,j].
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout réel t,

$$(H_t[i,j])'(t) = -H_t[i,j] + (KH_t)[i,j]. = (-(I_N - K)H_t)[i,j].$$

On en déduit encore que la fonction $t \mapsto H_t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction ψ_X puis pour tout réel t, $\psi_X'(t) = (H_t)'(t)X$. Soit alors $i \in [\![1,N]\!]$. Pour tout réel t,

$$\psi_X'(t)[i] = \sum_{j=1}^{N} \left(H_t[i,j]\right)'(t)X[j] = \sum_{j=1}^{N} \left(-\left(I_N - K\right)H_t\right)[i,j]X[j] = \left(-\left(I_N - K\right)H_tX\right)[i].$$

Ceci montre que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi'(t) = -\left(I_N - K\right)H_tX.$$

16) Soit $X \in E$. Pour tout réel t, $\varphi_X(t) = \langle \psi_X(t), \psi_X(t)\rangle$. Puisque la fonction ψ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction φ_X et pour tout réel t,

$$\varphi_Y'(t) = 2\left\langle \psi_X'(t), \psi_X(t)\right\rangle = -2\left\langle \left(I_N - K\right)H_tX, H_tX\right\rangle = -2q_u\left(H_tX\right).$$

17) Soient $X \in E$ et $t \in \mathbb{R}^+$. On a vu à la question 13 que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(U)$. Vérifions que $H_tX - X \in (\mathrm{Ker}(u))^{\perp} = U^{\perp}$.

$$\begin{aligned}
\langle H_tX, U\rangle &= \sum_{i=1}^{N} \left(H_tX\right)[i]U[i]\pi[i] = \sum_{i=1}^{N} \left(H_tX\right)[i]\pi[i] \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} H_t[i,j]X[j]\pi[i] = \sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} H_t[j,i]X[j]\pi[j] \text{ (car } H_t \text{ est } \pi-\text{réversible)} \\
&= \sum_{j=1}^{N} X[j]\pi[j]\left(\sum_{i=1}^{N} H_t[j,i]\right) = \sum_{j=1}^{N} X[j]\pi[j] \text{ (car } H_t \text{ est un noyau de Markov)} \\
&= \langle X, U\rangle.
\end{aligned}$$

Mais alors, $\langle H_tX - X, U\rangle = 0$ puis $H_tX - X \in (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$ puis $p\left(H_tX - X\right) = 0$ et finalement $p\left(H_tX\right) = p(X)$.

18) D'après la question 10, $q_u(Y) \geqslant \lambda\|Y\|^2$. Mais alors, pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ (en tenant compte de $\lambda > 0$ d'après la question 14),

$$\varphi_Y'(t) = -2q_u\left(H_yY\right) \leqslant -2\lambda\left\|H_tY\right\|^2 = -2\lambda\varphi_Y(t).$$

Ainsi, pour tout réel t, $\varphi_Y'(t) + 2\lambda\varphi_Y(t) \leqslant 0$ puis $e^{2\lambda t}\varphi_Y'(t) + 2\lambda e^{2\lambda t}\varphi_Y(t) \leqslant 0$ ou encore $\left(e^{2\lambda t}\varphi_Y\right)'(t) \leqslant 0$. La fonction $t \mapsto e^{2\lambda t}\varphi_Y(t)$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour $t \geqslant 0$,

$$e^{2\lambda t}\left\|H_tY\right\|^2 = e^{2\lambda t}\varphi_Y(t) \leqslant e^0\varphi_Y(0) = \left\|H_0Y\right\|^2.$$

Maintenant, pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, $H_0[i,j] = K^0[i,j] = I_N[i,j]$ et donc $H_0 = I_N$ puis $\left\|H_0Y\right\|^2 = \|X - p(X)\|^2$. Il vient alors pour $t \geqslant 0$, $e^{2\lambda t}\left\|H_t\left(X - p(X)\right)\right\|^2 \leqslant \|X - p(X)\|^2$ ou encore $\left\|H_t\left(X - p(X)\right)\right\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$.

Vérifions alors que $H_tp(X) = p\left(H_tX\right)$. Le vecteur U est unitaire pour $\langle\ ,\ \rangle$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(U[i])^2\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}\pi[i] = 1$. On sait alors que $p(X) = \langle X, U\rangle U$ et $p\left(H_tX\right) = \langle H_tX, U\rangle U$. Puisque H_t est un noyau de Markov, $H_tU = U$ d'après la question 1 et donc

$$H_tp(X) = \langle H_tX, U\rangle H_tU = \langle H_tX, U\rangle U = p\left(H_tX\right).$$

Finalement, $\left\|H_t\left(X - p(X)\right)\right\|^2 = \left\|H_tX - H_tp(X)\right\|^2 = \left\|H_tX - p\left(H_tX\right)\right\|^2 = \left\|H_tX - p(X)\right\|^2$ d'après la question précédente. On a montré que

$$\forall X \in E,\ \forall t \geqslant 0,\ \left\|H_tX - p(X)\right\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2.$$

19) Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $t \geqslant 0$.

$$p\left(E_i\right) = \langle E_i, U\rangle U = \left(\sum_{j=1}^{N}\delta_{i,j}U[j]\pi[j]\right)U = \pi[i]U$$

et donc $\left\|H_tE_i - p\left(E_i\right)\right\| = \left\|H_tE_i - \pi[i]U\right\|$. D'autre part, d'après le théorème de Pythagore, $\left\|p\left(E_i\right)\right\|^2 + \left\|E_i - p\left(E_i\right)\right\|^2 = \left\|E_i\right\|^2$ et donc

$$\|E_i - p(E_i)\|^2 = \|E_i\|^2 - \|\pi[i]U\|^2 = \pi[i] - (\pi[i])^2.$$

D'après la question précédente, $\|H_tE_i - \pi[i]U\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|E_i - p(E_i)\|^2 = e^{-2\lambda t}\left(\pi[i] - (\pi[i])^2\right) \leqslant e^{-2\lambda t}\pi[i]$ puis, en prenant la racine carrée des deux membres,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \|H_tE_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}.$$

20) Soit $t \geqslant 0$. Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\left(H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \pi[k]\right)\left(H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]\right) &= \sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k]H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]\sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[k,j]\pi[k] + \pi[j]\sum_{k=1}^{N}\pi[k]\\ &= H_{\frac{t}{2}+\frac{t}{2}}[i,j] - \pi[j]\times 1 - \sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[j,k]\pi[j] + \pi[j] \text{ (d'après la question 5)}\\ &= H_t[i,j] - 2\pi[j] + \pi[j] = H_t[i,j] - \pi[j].\end{aligned}$$

21) Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$. Soit $t \geqslant 0$. $H_t[i,j] = H_tE_i[j]$ puis

$$\|H_tE_j - \pi[j]U\|^2 = \sum_{k=1}^{N}(H_tE_j[k] - \pi[j])^2\pi[k] \geqslant (H_tE_j[i] - \pi[j])^2\pi[i] = (H_tE_j[i] - \pi[j])^2\pi[i] = (H_t[i,j] - \pi[j])^2\pi[i].$$

De la question 19, on déduit que

$$\sqrt{\pi[i]}\,|H_t[i,j] - \pi[j]| \leqslant \|H_tE_j - \pi[j]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[j]}$$

et donc $|H_t[i,j] - \pi[j]| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\dfrac{\pi[i]}{\pi[j]}}$. Puisque $\lambda > 0$, quand t tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2,\ \lim_{t\to+\infty} H_t[i,j] = \pi[j].$$

