SESSION 2023

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

---

1. Calcul de $\sigma(1)$

1) On note D_σ le domaine de définition de la fonction σ. On pose ensuite $a_0 = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{1}{k^2}$.

Pour x réel donné, la série numérique de terme général $a_k x^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge si $x = 1$ et diverge grossièrement si $x > 1$. Donc, $R_a = 1$. On sait que $]-1,1[\subset D_\sigma \subset [-1,1]$. De plus, les séries numériques de termes généraux respectifs $\dfrac{(-1)^k}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $\dfrac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont convergentes. Donc,

$$D_\sigma = [-1,1].$$

Puisque la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, on sait déjà que la fonction σ est continue sur $]-1,1[$. Vérifions que la fonction σ est continue sur $[-1,1]$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, posons $\sigma_k(x) = \dfrac{x^k}{k^2}$ de sorte que $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-1,1]$, $|\sigma_k(x)| = \dfrac{|x|^k}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ avec égalité effectivement obtenue pour $x = 1$.

Donc, $\|\sigma_k\|_{\infty,[-1,1]} = \dfrac{1}{k^2}$. La série numérique de terme général $\dfrac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge et donc la série de fonctions de terme général σ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[-1,1]$.

Ainsi,

- la série de fonctions de terme général σ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément vers la fonction σ sur $[-1,1]$,
- chaque fonction σ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[-1,1]$.

On en déduit que

la fonction σ est continue sur $[-1,1]$.

2) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $t \mapsto \alpha t^2 + \beta t$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\ dt &= \left[\left(\alpha t^2 + \beta t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2\alpha t + \beta)\frac{\sin(nt)}{n}\ dt \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi (2\alpha t + \beta)\sin(nt)\ dt.\end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\ dt &= -\frac{1}{n}\left(\left[(2\alpha t + \beta)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{2\alpha}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\ dt\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left((2\alpha\pi + \beta)(-1)^n - \beta\right).\end{aligned}$$

On choisit alors α et β tels que $-\beta = 1$ et $2\alpha\pi + \beta = 0$ ou encore on prend $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$ et $\beta = -1$. On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{n^2}.$$

Soient $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right)$$
$$= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)t\right) \text{ (somme télescopique)}$$
$$= \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Ensuite, puisque $t \in]0, \pi]$, on a $\frac{t}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis $2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ et donc, après division des membres par $2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3) Soit $x > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto \varphi(t)$ et $t \mapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, \pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\ dt = \left[\varphi(t)\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\varphi'(t)\frac{-\cos(xt)}{x}\ dt = \frac{1}{x}\left(-\varphi(\pi)\cos(\pi x) + \varphi(0) + \int_0^{\pi}\varphi'(t)\cos(xt)\ dt\right)$$

et donc

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\ dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^{\pi}|\varphi'(t)|\ dt\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^{\pi}|\varphi'(t)|\ dt\right) = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\ dt = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\ dt + \int_0^{\pi}\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ dt.$$

Ensuite, $-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\ dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ dt.$$

Pour $t \in]0, \pi]$, posons $\varphi(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. φ est de classe C^1 sur $]0, \pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0, \pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, \pi]$. Ensuite,

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t}{2\times\frac{t}{2}} = -1.$$

La fonction φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = -1$ (on note encore φ le prolongement obtenu). Vérifions que φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Pour $t \in]0, \pi]$,

$$\varphi'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

puis

$$\varphi'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{\left(-1 + \frac{t}{\pi}\right)\left(\frac{t}{2} + o\left(t^2\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)(1 + o(t))}{2\frac{t^2}{4} + o\left(t^2\right)} \underset{t\to 0}{=} \frac{\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}\right)t^2 + o\left(t^2\right)}{\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2\pi} + o(1).$$

En résumé, $\varphi \in C^0([0,\pi],\mathbb{R}) \cap C^1(]0,\pi],\mathbb{R})$ et de plus la fonction φ' a une limite réel en 0. D'après un théorème classique d'analyse. $\varphi \in C^1([0,\pi],\mathbb{R})$. Mais alors, d'après la question 3),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = 0.$$

On en déduit que

$$\sigma(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Equivalents

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est continue et positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $(\sin(t))^x \underset{t\to 0}{\sim} t^x$. On en déduit que l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente si et seulement si $x > -1$.

$$f \text{ est définie sur } I =]-1, +\infty[.$$

Soit $x > -1$. Les deux fonctions $t \mapsto (\sin(t))^{x+1}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x+2}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x+1} \times \sin(t)\ dt \\
&= \left[(\sin(t))^{x+1} \times (-\cos(t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos(t)(\sin(t))^x \times (-\cos(t))\ dt \\
&= (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)(\sin(t))^x\ dt = (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(t)\right)(\sin(t))^x\ dt \\
&= (x+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x+2}\ dt\right) = (x+1)(f(x) - f(x+2))
\end{aligned}$$

et donc $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$. On a montré que

$$\forall x > -1,\ (x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$$

5) Soit $a > -1$. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times\left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & (\sin(t))^x \end{array}$ de sorte que pour tout réel $x \geqslant a$, $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(x,t)\ dt$.

Pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\left[0\frac{\pi}{2}\right]$. Ensuite, la fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ des dérivées partielles première et seconde par rapport à sa première variable x définies par

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = \ln(\sin(t))(\sin(t))^x \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = (\ln(\sin(t)))^2(\sin(t))^x.$$

Ensuite,

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,
- pour tout $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$,
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln(\sin(t))|(\sin(t))^a = \varphi_1(t)$ et $\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant (\ln(\sin(t)))^2(\sin(t))^a = \varphi_2(t)$.

Vérifions que la fonction φ_2 est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. La fonction φ_2 est continue par morceaux et positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, d'après un théorème de croissances comparées, puisque $\frac{1+a}{2} > 0$,

$$t^{\frac{1-a}{2}}\varphi_2(t) = (\ln(\sin(t))^2 t^{\frac{1+a}{2}} \underset{t\to 0}{\sim} (\ln(t))^2 t^{\frac{1+a}{2}} \underset{t\to 0}{=} o(1)$$

et donc $\varphi_2(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{\frac{-1+a}{2}}\right)$ avec $\frac{-1+a}{2} > \frac{-1-1}{2} = -1$. Ceci montre que la fonction φ_2 est intégrable sur un voisinage de 0 à droite et donc est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Mais alors, la fonction φ_1 est également intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ car négligeable devant φ_2 en 0.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > -1$, on a montré que la fonction f est de classe C^2 sur $]-1,+\infty[$ et que

$$\forall x > -1,\ f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))(\sin(t))^x \, dt \text{ et } f''(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t))^2(\sin(t))^x \, dt.$$

Soit $x > -1$. Pour tout réel $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0 < \sin(t) \leqslant 1$ puis $\ln(\sin(t))(\sin(t))^x \leqslant 0$. Par croissance de l'intégration, $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))(\sin(t))^x \, dt \leqslant 0$. Ainsi, la fonction f' est négative sur $]-1,+\infty[$ et donc la fonction f est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

Soit $x > -1$. Pour tout réel $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $(\ln(\sin(t)))^2(\sin(t))^x \geqslant 0$. Par positivité de l'intégration, $f''(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)))^2(\sin(t))^x \, dt \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f'' est positive sur $]-1,+\infty[$ et donc la fonction f est convexe sur $]-1,+\infty[$.

6) f étant continue sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 1,

$$(x+1)f(x+1) = (x+2)f(x+2) \underset{x\to -1}{\sim} f(1) = 1$$

et donc

$$f(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

7) Pour $n \in \mathbb{N}$ (de sorte que $n > -1$), l'égalité $(n+2)f(n+2) = (n+1)f(n)$ fournit encore $(n+2)f(n+1)f(n+2) = (n+1)f(n)f(n+1)$.
La suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1) = f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Vérifions maintenant que $f(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle). De plus, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car la fonction f est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n+2) \leqslant f(n+1) \leqslant f(n)$ puis que

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{f(n+2)}{f(n)} \leqslant \frac{f(n+1)}{f(n)} \leqslant 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ et donc que $f(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$. On en déduit que (en tenant compte de $f(n) > 0$)

$$f(n) = \sqrt{(f(n))^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{f(n)f(n+1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

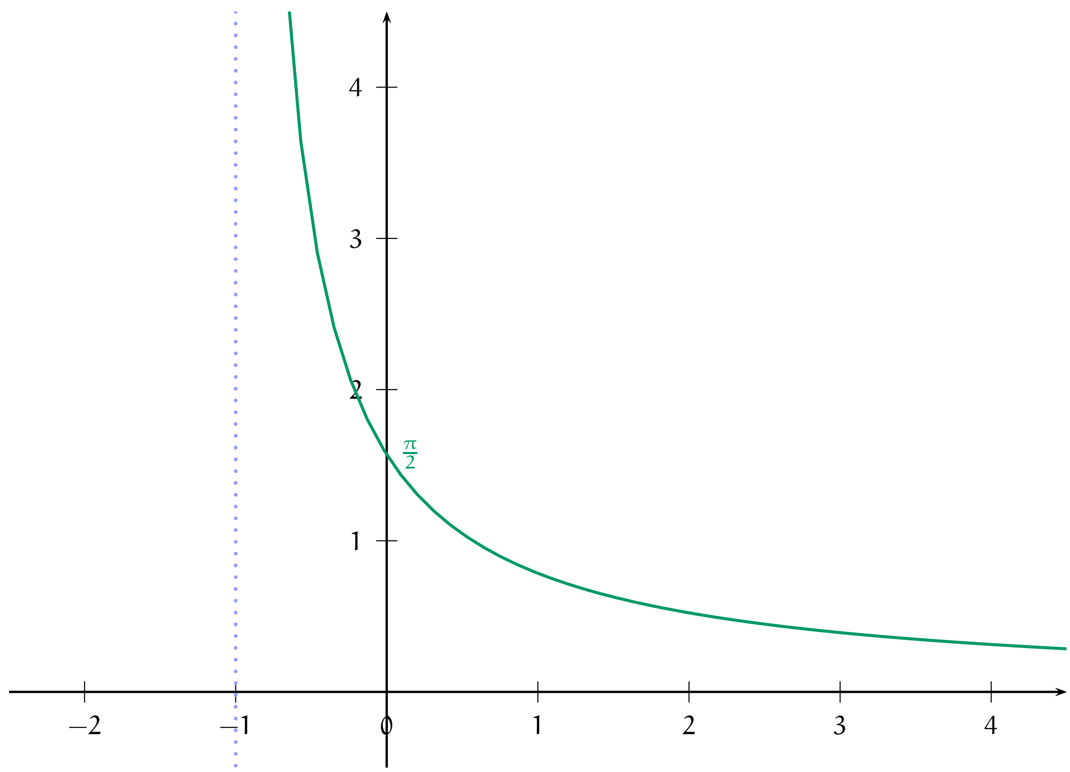
Enfin, la fonction f est décroissante et positive sur $]-1,+\infty[$ et donc pour $x > 0$,

$$\sqrt{\frac{2\lfloor x\rfloor}{\pi}} f(\lfloor x\rfloor + 1) \leqslant \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(x) \leqslant \sqrt{\frac{2(\lfloor x\rfloor + 1)}{\pi}} f(\lfloor x\rfloor).$$

Les membres extrêmes de cet encadrement sont équivalents en $+\infty$ à $\sqrt{\dfrac{2\lfloor x\rfloor}{\pi}} f(\lfloor x\rfloor)$ et donc à 1. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(x) = 1$ et donc que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

8) Allure du graphe de f.



3. Développement en série entière

9) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t))^n$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, d'après un théorème de croissances comparées,

$$(\ln(\sin(t)))^n \underset{t\to0}{\sim} (\ln(t))^n \underset{t\to0}{=} o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

avec $-\dfrac{1}{2} > -1$. On en déduit l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, on obtient

$$D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right) \times -du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt.$$

10) $f'(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = D_1$ puis d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}2D_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\,dt \\ &= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,dt = -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,du.\end{aligned}$$

De plus, en posant $v = \pi - u$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\,du = D_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\pi - v))\,(-dv) \\ &= D_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v))\,dv = 2D_1,\end{aligned}$$

et donc $2D1 = -\dfrac{\pi\ln(2)}{2} + D_1$ puis $D_1 = -\dfrac{\pi\ln(2)}{2}$. Par suite,

$$f'(0) = -\frac{\pi\ln(2)}{2}.$$

Ensuite, $f'(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ln(\sin(t))\,dt$. Une intégration par parties, licite, fournit (en prenant pour primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)$, la fonction $t \mapsto 1 - \cos(t)$ de sorte que $(1-\cos(t))\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2\ln(t)}{2} \underset{t\to 0}{=} o(1)$),

$$\begin{aligned}f'(1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ln(\sin(t))\,dt = [(1-\cos(t))\ln(\sin(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos(t))\cos(t)}{\sin(t)}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(t)-\cos(t)}{\sin(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)\,dt \\ &= \left[\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| + \cos(t) - \ln|\sin(t)|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \left[\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin(t)}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

Ensuite, $\dfrac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t/2}{t} = \dfrac{1}{2}$ puis $\displaystyle\lim_{t\to 0} \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin(t)}\right| = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin(t)}\right| = \ln(1) = 0$.

Finalement,

$$f'(1) = -1 + \ln(2).$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, bijective de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, +\infty[$.

Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $u = -\ln(\sin(t))$ de sorte que $du = -\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}\,dt$ puis

$$dt = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,du = -\frac{e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}}\,du = -\frac{1}{\sqrt{e^{2u}\left(1-e^{-2u}\right)}}\,du = -\frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du.$$

On obtient

$$(-1)^n D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\ln(\sin(t))^n\,dt = \int_{+\infty}^0 -\frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du.$$

Ensuite, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du = n!$ (fonction Γ d'Euler).

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e^{2u}}} = e^{-u}$, il existe $A > 0$ tel que, pour $u \geqslant A$,

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-u} \leqslant \frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}} \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-u}.$$

A est ainsi dorénavant fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_A^{+\infty} u^n e^{-u}\,du \leqslant \int_A^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_A^{+\infty} u^n e^{-u}\,du.$$

avec $\displaystyle\int_A^{+\infty} u^n e^{-u}\,du = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du - \int_0^{A} u^n e^{-u}\,du = n! - \int_0^{A} u^n e^{-u}\,du$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{n!}\int_0^A u^n e^{-u}\,du + \frac{1}{n!}\int_0^A \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du &\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \\ &\leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{n!}\int_0^A u^n e^{-u}\,du + \frac{1}{n!}\int_0^A \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du,\end{aligned}$$

ce qui fournit plus simplement

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{n!}\int_0^A u^n e^{-u}\,du \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{n!}\int_0^A \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du,$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^A u^n e^{-u}\,du \leqslant \int_0^A u^n\,du \leqslant A \times A^n$ puis

$$0 \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^A u^n e^{-u}\,du \leqslant A \times \frac{A^n}{n!}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A \times \frac{A^n}{n!} = 0$ et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{n!}\int_0^A u^n e^{-u}\,du = 0$. Par suite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $-\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^A u^n e^{-u}\,du \geqslant -\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_1$, on a alors

$$\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1-\varepsilon.$$

Ensuite, la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{\sqrt{e^{2u}-1}}$ est continue sur $]0,A]$ et prolongeable par continuité en 0 (en prenant $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pour valeur en 0). Cette fonction est donc bornée sur $]0,A]$. On note M un majorant de cette fonction sur $]0,A]$. Pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^A \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du = \frac{1}{n!}\int_0^A u^{n-1}\frac{u}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \leqslant M\frac{A^n}{n!}.$$

De nouveau, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^A \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du = 0$ et donc, il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^A \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_2$, on a

$$\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 1+\varepsilon.$$

Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, $1-\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \leqslant 1+\varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 1-\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du \leqslant 1+\varepsilon\right)$.

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n D_n}{n!} = 1$ ou encore

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!.$$

12) Soit $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Pour tout réel $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$(\sin(t))^x = e^{x\ln(\sin(t))} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n.$$

Pour tout réel $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $g(t) = (\sin(t))^x$ puis pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $g_n(t) = \dfrac{(\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n$ de sorte que $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$.

La série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction g sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et la fonction g est continue par morceaux sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_n(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\ln(\sin(t)|^n}{n!} |x|^n\,dt = (-1)^n \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t))^n\,dt = \frac{(-1)^n D_n}{n!} |x|^n.$$

D'après la question précédente, $\dfrac{(-1)^n D_n}{n!}|x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$ (car $x \neq 0$) et donc, puisque $|x| < 1$, la série de terme général $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_n(t)|\,dt$ converge, ce qui reste vrai quand $x = 0$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)\,dt$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- (la fonction g est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$),
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)\,dt$.

Ceci fournit explicitement pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)))^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n.$$

On a montré que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

4. Convergence de suites de fonctions

On note que, puisque $a > 0$ et $b > 0$, on a $-1 = \dfrac{-b-a}{b+a} < \dfrac{b-a}{b+a} = \rho < \dfrac{b+a}{b+a} = 1$ puis $|\rho| < 1$.

13) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $a^2\cos^2(x) = b^2\sin^2(x) = 0$ ou encore $\cos(x) = \sin(x) = 0$. Puisque les fonctions sin et cos ne s'annulent pas simultanément, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x) > 0.$$

Mais alors, la fonction Ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= \frac{-2a^2\cos(x)\sin(x) + 2b^2\sin(x)\cos(x)}{a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)} = \frac{\left(b^2 - a^2\right)\sin(2x)}{a^2\dfrac{1+\cos(2x)}{2} + b^2\dfrac{1-\cos(2x)}{2}} \\ &= \frac{2\left(b^2 - a^2\right)\sin(2x)}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos(2x)}\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $|\rho| < 1$, pour tout réel x, $\left|\rho e^{2ix}\right| < 1$ puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\rho e^{2ix}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\rho e^{2ix}}{1-\rho e^{2ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\rho e^{2ix}\left(1-\rho e^{-2ix}\right)}{\left(1-\rho e^{2ix}\right)\left(1-\rho e^{-2ix}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\rho e^{2ix}-\rho^2}{1-2\rho\cos(2x)+\rho^2}\right) \\
&= \frac{\rho \sin(2x)}{1-2\rho\cos(2x)+\rho^2} = \frac{\dfrac{b-a}{b+a}\sin(2x)}{1-2\dfrac{b-a}{b+a}\cos(2x)+\dfrac{(b-a)^2}{(b+a)^2}} = \frac{(b-a)(b+a)\sin(2x)}{(b-a)^2+(b+a)^2-2(b-a)(b+a)\cos(2x)} \\
&= \frac{\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{2\left(a^2+b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos(2x)\right)}
\end{aligned}$$

et donc

$$4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{2\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{a^2+b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos(2x)} = \Psi'(x).$$

14) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\Phi(x) = 2\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$.

Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k} = 2\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) + \ln(1-\rho)\right) = 2\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) + \ln\left(\frac{2a}{b+a}\right)\right) \\
&= 2\ln(a) = \ln\left(a^2\right) = \Psi(0).
\end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi_k(x) = \dfrac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$. Chaque fonction φ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k'(x) = -2\sin(2kx)\rho^k.$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|\varphi_k'\|_\infty = 2|\rho|^k$ avec $|\rho| < 1$, la série de fonctions de terme général φ_k', $k \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\Phi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \Psi'(x).$$

Ainsi, pour tout réel x, $\Phi(x) = \Phi(0) + \displaystyle\int_0^x \Phi'(t)\, dt = \Psi(0) + \int_0^x \Psi'(t)\, dt = \Psi(x)$. On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k.$$

15) Pour tout réel x de $[0,\pi]$,

$$\Psi(x)^2 = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\Psi(x) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos(2kx)\Psi(x).$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout x de $[0,\pi]$, $\left|\dfrac{\rho^k}{k}\cos(2kx)\Psi(x)\right| \leqslant \dfrac{|\rho|^k}{k}\|\Psi\|_{\infty,\ [0,\pi]}$ et que la série numérique de terme général $\dfrac{|\rho|^k}{k}\|\Psi\|_{\infty,\ [0,\pi]}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{\rho^k}{k}\cos(2kx)\Psi(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $[0,\pi]$. On peut intégrer une première fois terme à terme sur ce segment et on obtient,

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2\ dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^{\pi} \Psi(x)\ dx - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k}\int_0^{\pi} \Psi(x)\cos(2kx)\ dx.$$

Ensuite, de nouveau on peut intégrer terme à terme pour obtenir

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)\ dx = 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\rho^\ell}{\ell}\int_0^{\pi} \cos(2\ell x)\ dx = 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

De même, pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, on peut intégrer terme pour obtenir

$$\int_0^{\pi} \cos(2kx)\Psi(x)\ dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^{\pi} \cos(2kx)\ dx - 2\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\rho^\ell}{\ell}\int_0^{\pi} \cos(2kx)\cos(2\ell x)\ dx.$$

Puisque $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2kx)\ dx = 0$ et d'autre part, pour $\ell \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(2kx)\cos(2\ell x)\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(2(k-\ell)x) + \cos(2(k+\ell)x)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(2(k-\ell)x)\ dx \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq \ell \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } k = \ell \end{cases}.\end{aligned}$$

Il reste $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2kx)\Psi(x)\ dx = -2\frac{\rho^k}{k} \times \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi\rho^k}{k}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \Psi(x)^2\ dx &= 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \times 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \times \left(-\frac{\pi\rho^k}{k}\right) \\ &= 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2k}}{k^2} = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right).\end{aligned}$$

16) $f''(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t))^2\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\ln(\sin(t))^2\ dt$ (par symétrie).

Soit $t \in]0,\pi[$. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \Psi_n(t) = \ln\left(0 \times \cos^2(t) + 1 \times \sin^2(t)\right) = 2\ln(\sin(t))$. La suite de fonction $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,\pi[$ vers la fonction $t \mapsto 2\ln(\sin(t))$ puis la suite de fonction $\left(\Psi_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,\pi[$ vers la fonction $t \mapsto 4(\ln(\sin(t)))^2$. De plus, la fonction $t \mapsto 4(\ln(\sin(t)))^2$ est continue par morceaux sur $]0,\pi[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,\pi[$,

$$1 = \cos^2(t) + \sin^2(t) \geqslant a_n^2\cos^2(t) + b_n^2\sin^2(t) \geqslant b_n^2\sin^2(t) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\sin^2(t) \geqslant \frac{1}{4}\sin^2(t)$$

puis $0 \geqslant \Psi_n(t) \geqslant \ln\left(\dfrac{\sin^2(t)}{4}\right)$ et donc $(\Psi_n(t))^2 \leqslant \ln^2\left(\dfrac{\sin^2(t)}{4}\right) = \varphi(t)$. La fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,\pi[$ car équivalente à $4\ln^2(t)$ en 0 et à $4\ln^2(\pi - t)$ en π.

D'après le théorème de convergence dominée, puisque $\rho_n = \dfrac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = \dfrac{n-1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\ln(\sin(t))^2\ dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi}4(\ln(\sin(t))^2\ dt = \frac{1}{8}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}(\Psi_n(t))^2\ dt\\
&= \frac{1}{8}\lim_{n\to+\infty}\left(4\pi\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho_n^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(4\pi\ln^2(2)+2\pi\rho(1)\right)\ \text{(car } \rho_n^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \text{ et par continuité de } \sigma \text{ en } 1 \text{ d'après la question 1)}\\
&= \frac{1}{8}\left(4\pi\ln^2(2)+2\pi\times\frac{\pi^2}{6}\right)\ \text{(d'après la question 3)}\\
&= \frac{2\pi\ln^2(2)+\pi^3}{24}.
\end{aligned}$$

5. Convexité logarithmique

17) Posons $g = \ln\circ f$. On a vu que la fonction f est définie, strictement positive et de classe C^2 sur $]-1,+\infty[$. Pour $x > -1$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ puis

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{1}{(f(x))^2}\left(f''(x)f(x) - (f'(x))^2\right)\\
&= \frac{1}{(f(x))^2}\left(\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^x\ dt\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\sin(t))^2(\sin(t))^x\ dt\right) - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\sin(t))(\sin(t))^x\ dt\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\sin(t))(\sin(t))^x\ dt\right)^2 &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\sin(t))^{\frac{x}{2}}\times(\ln(\sin(t))(\sin(t))^{\frac{x}{2}}\ dt\right)^2\\
&\leqslant \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((\sin(t))^{\frac{x}{2}}\right)^2\ dt\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln(\sin(t)(\sin(t))^{\frac{x}{2}}\right)^2\ dt\right)\\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^x\ dt\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\sin(t))^2(\sin(t))^x\ dt\right).
\end{aligned}$$

La fonction g'' est donc positive sur $]-1,+\infty[$ puis la fonction f est ln-convexe sur $]-1,+\infty[$.

18) Soit f une application ln-convexe sur $]-1,+\infty[$ quelconque telle que pour tout $x > -1$, $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$. Pour $x \geqslant 0$, on a$(2x+1)f(2x) = (2x+2)f(2x+2)$ puis $\ln(2x+1) + \ln(f(2x)) = \ln(2x+2) + \ln(f(2x+2))$ et donc

$$\widetilde{f}(x+1) - \widetilde{f}(x) = \ln(f(2x+2)) - \ln(f(2x)) = \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right).$$

Soient alors $x \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x+p) - \widetilde{f}(x) &= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\widetilde{f}(x+k+1) - \widetilde{f}(x+k)\right)\ \text{(somme télescopique)}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).
\end{aligned}$$

19) La fonction $\widetilde{f}$ est convexe sur $]-1,+\infty[$ et puisque $n-1 < n < n+x \leqslant n+p$, par croissance de la fonction pente en n, $\dfrac{\widetilde{f}(n)-\widetilde{f}(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \dfrac{\widetilde{f}(n+x)-\widetilde{f}(n)}{(n+x)-n} \leqslant \dfrac{\widetilde{f}(n+p)-\widetilde{f}(n)}{(n+p)-n}$ ou encore

$$\widetilde{f}(n) - \widetilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\widetilde{f}(n+x)-\widetilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\widetilde{f}(n+p)-\widetilde{f}(n)}{p}.$$

D'après la question précédente, $\widetilde{f}(n)-\widetilde{f}(n-1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\ln\left(\frac{2(n-1)+2k+1}{2(n-1)+2k+2}\right)=\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\widetilde{f}(n)-\widetilde{f}(n-1)\right)=0$.

De même, $\widetilde{f}(n+p)-\widetilde{f}(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2}\right)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\widetilde{f}(n+p)-\widetilde{f}(n)\right)=\sum_{k=0}^{p-1}0=0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\widetilde{f}(n+x)-\widetilde{f}(n)}{x}\right)=0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\widetilde{f}(n+x)-\widetilde{f}(n)\right)=0$.

20) On suppose de plus que $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$. Alors, pour $x\geqslant 0$ et $p\in\mathbb{N}^*$, $\widetilde{f}(x+p)-\widetilde{f}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$. En particulier, $\widetilde{f}(p)-\widetilde{f}(0)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)$.
Soit $x\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x)&=\widetilde{f}(x+p)-\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)=\widetilde{f}(x+p)-\widetilde{f}(p)+\widetilde{f}(p)-\widetilde{f}(0)+\widetilde{f}(0)-\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)\\&=\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)-\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)+\widetilde{f}(x+p)-\widetilde{f}(p)\\&=\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sum_{k=0}^{p-1}\ln\left(\frac{1+\dfrac{2x}{2k+1}}{1+\dfrac{2x}{2k+2}}\right)+\widetilde{f}(x+p)-\widetilde{f}(p)\end{aligned}$$

Le fait que $\widetilde{f}(x+p)-\widetilde{f}(p)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ montre la convergence de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{1+\dfrac{2x}{2k+1}}{1+\dfrac{2x}{2k+2}}\right)$ (ce qui peut se montrer directement). Quand p tend vers $+\infty$, on obtient

$$\widetilde{f}(x)=\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(\frac{1+\dfrac{2x}{2k+1}}{1+\dfrac{2x}{2k+2}}\right).$$

Ceci montre que $\widetilde{f}$ est uniquement définie sur $[0,+\infty[$ puis f est uniquement définie sur $[0,+\infty[$. Enfin, pour $x\in]-1,0[$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}f(x+2)$ où $x+2\in]1,+\infty[$ et donc f est uniquement définie sur $]-1,0[$ puis sur $]-1,+\infty[$.

21) On a $g(0)>0$. Pour $u>-1$, on pose $f(u)=\dfrac{\pi}{2g(0)}g(Tu)$. En particulier, $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$. La fonction f est ln-convexe sur $]-1,+\infty[$ car pour tout $u>-1$, $(\ln\circ f)'(u)=\dfrac{\pi T}{2g(0)}\dfrac{g'(Tu)}{g(Tu)}$ puis

$$(\ln\circ f)''(u)=\frac{\pi T^2}{2g(0)}\frac{g''(Tu)g(Tu)-(g'(Tu))^2}{(g(Tu))^2}\geqslant 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\forall t>-T,\ (t+T)g(t)=(t+2T)g(t+2T)&\Leftrightarrow\left(\frac{t}{T}+1\right)g\left(T\times\frac{t}{T}\right)=\left(\frac{t}{T}+2\right)g\left(T\left(\frac{t}{T}+2\right)\right)\\&\Leftrightarrow\forall u>-1,\ (u+1)g(Tu)=(u+2)g(T(u+2))\\&\Leftrightarrow\forall u>-1,\ (u+1)f(u)=(u+2)f(u+2).\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout $u>-1$, $f(u)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^u\,dt$ et donc

$$\forall x > -T,\ g(x) = \frac{2g(0)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{\frac{x}{T}}\ dt.$$

22) Si h existe, en particulier, $0 = (-T + 2T)h(-T + 2T)$ puis $h(T) = 0$ ce qui contredit le fait que la fonction h est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, le problème n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

