SESSION 2023

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE PC

Partie 1 : questions préliminaires

1) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, χ_S est scindé sur $\mathbb{R}$ puis S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (réelle).

• Supposons que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S puis X un vecteur propre associé.

$$\langle SX, X\rangle = X^T SX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda\|X\|^2.$$

Puisque $X \neq 0$, on a $\|X\|^2 > 0$ et on en déduit que $\lambda = \dfrac{\langle SX, X\rangle}{\|X\|^2} \geqslant 0$. Ainsi, si $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, toutes les valeurs propres de S sont des réels positifs.

• Supposons que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$. Soient $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $S = PDP^T$.
Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X' = P^T X = (x_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$\langle SX, X\rangle = X^T SX = X^T PDP^T X = \left(P^T X\right) D \left(P^T X\right) = X'^T DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$, alors pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle SX, X\rangle \geqslant 0$ et donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2) • Soient $(S, S') \in \left(S_n^+(\mathbb{R})\right)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle((1-\lambda)S + \lambda S')X, X\rangle = (1-\lambda)\langle SX, X\rangle + \lambda\langle S'X, X\rangle \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout $(S, S') \in \left(S_n^+(\mathbb{R})\right)^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1-\lambda)S + \lambda S' \in S_n^+(\mathbb{R})$. Donc, $S_n^+(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient $(S, S') \in \left(S_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, l'un des deux réels $(1-\lambda)\langle SX, X\rangle$ ou $\lambda\langle S'X, X\rangle$ est strictement positif et l'autre est positif. Donc, $\langle((1-\lambda)S + \lambda S')X, X\rangle$ est strictement positif.

Ainsi, pour tout $(S, S') \in \left(S_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1-\lambda)S + \lambda S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• I_n est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc dans $S_n^+(\mathbb{R})$. Mais $-I_n$ n'est ni dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, ni dans $S_n^+(\mathbb{R})$ car I_n admet $-1 < 0$ pour valeur propre. Donc, $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$ telles que $A = PDP^T$.

Soient $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis $S = P\Delta P^T$. S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale et donc S est symétrique réelle. Les valeurs propres de S, à savoir les $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels strictement positifs et donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Enfin,

$$S^2 = \left(P\Delta P^T\right)^2 = P\Delta^2 P^T = PDP^T = A.$$

4) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Le résultat de l'énoncé est immédiat quand $p = 1$.

Montrons par récurrence que pour tout $p \geqslant 2$, pour tout $(x_1, \ldots, x_p)^p \in I^p$, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, on a : $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$ $\quad(\mathscr{P}_p)$.

• $(\mathscr{P}_2)$ est vraie par définition d'une fonction convexe.

• Soit $p \geqslant 2$. Supposons $(\mathscr{P}_p)$. Soient $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in I^{p+1}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{p+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{p+1} = 1$, alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ (réels positifs de somme nulle) et l'inégalité est immédiate.

Sinon, on peut écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i = (1-\lambda_{p+1})\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}x_i + \lambda_{p+1}x_{p+1}$.

Les réels $\lambda_i' = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont positifs et de plus $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i' = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1$.

D'après le résultat admis par l'énoncé, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i' x_i$ est un élément de I puis

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\right) &= f\left((1-\lambda_{p+1})\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}x_i + \lambda_{p+1}x_{p+1}\right) \\ &\leqslant (1-\lambda_{p+1})\, f\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}x_i\right) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) \text{ (par convexité de f sur I)} \\ &\leqslant (1-\lambda_{p+1})\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} f(x_i) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Partie 2 : une première inégalité de convexité

5) La fonction $f : x \mapsto -\ln(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée seconde, à savoir $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, est positive sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction f est convexe sur $]0,+\infty[$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n$. Puisque f est convexe sur $]0,+\infty[$, pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, on a

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \ln(x_i).$$

On applique ce résultat au cas particulier $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$. On obtient pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n$,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \ln(x_i) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Par croissance du logarithme sur $]0,+\infty[$, on obtient finalement $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}$. Cette dernière inégalité reste valable si l'un des x_i est nul et on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in [0,+\infty[^n,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Soit alors $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. On sait que la trace (resp. le déterminant) de M est égale à la somme (resp. le produit) des valeurs propres de M, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Donc, en posant $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,+\infty[^n$,

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \geqslant (\lambda_1\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}} = (\det(M))^{\frac{1}{n}}.$$

6) Posons $M = PDP^T$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n([0,+\infty[)$.

$$\|M\|_2^2 = \mathrm{Tr}\left(M^TM\right) = \mathrm{Tr}\left(PD^TP^TPDP^T\right) = \mathrm{Tr}\left(PD^2P^T\right) = \mathrm{Tr}\left(P^TPD^2\right) = \mathrm{Tr}\left(D^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2,$$

et donc $\|M\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$. On note que cette égalité reste valable si les λ_i sont réels mais pas nécessairement tous positifs c'est-à-dire si plus généralement $M \in S_n(\mathbb{R})$.

7) On pose $d = \det(M) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. Alors, $\text{Sp}\left(M - d^{\frac{1}{n}} I_n\right) = \left(\lambda_1 - d^{\frac{1}{n}}, \ldots, \lambda_n - d^{\frac{1}{n}}\right)$ puis, d'après l'inégalité admise par l'énoncé, les λ_i étant des réels positifs,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left\|M - d^{\frac{1}{n}} I_n\right\|_2^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - d^{\frac{1}{n}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{n}}\right) 2\text{Max}\{\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \\ &= \left(\frac{1}{n}\text{Tr}(M) - (\det(M))^{\frac{1}{n}}\right) 2\text{Max}\{\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.\end{aligned}$$

Enfin, si i_0 est un indice tel que $\lambda_{i_0} = \text{Max}\{\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, puisque λ_{i_0} est positif,

$$\lambda_{i_0} = \sqrt{\lambda_{i_0}^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2} = \|M\|_2.$$

On a montré que $\dfrac{1}{n}\left\|M - d^{\frac{1}{n}} I_n\right\|_2^2 \leqslant 2\|M\|_2\left(\dfrac{1}{n}\text{Tr}(M) - (\det(M))^{\frac{1}{n}}\right)$. Maintenant, $M \neq 0$ puis $\|M\|_2 > 0$ et finalement

$$\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{\left\|M - d^{\frac{1}{n}} I_n\right\|_2^2}{2n\|M\|_2}.$$

Partie 3 : on continue avec de la convexité

8) Puisque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$,d'après la question 3, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$. Puisque S n'admet pas 0 pour valeur propre, la matrice S est inversible.

La matrice $S^{-1}BS^{-1}$ est symétrique réelle (car $\left(S^{-1}BS^{-1}\right)^T = S^{-1}BS^{-1}$). D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $S^{-1}BS^{-1} = PDP^T$ et donc telles que $B = SPDP^TS = (SP)\,D\,(SP)^T$. Posons $Q = SP$. Q est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles. Ainsi, Q est une matrice inversible, D est une matrice diagonale et $B = QDQ^T$.

Enfin, $QQ^T = (SP)(SP)^T = SPP^TS = SI_nS = S^2 = A$. Les matrices Q et D conviennent.

Supposons de plus $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}\langle DX, X\rangle &= X^TDX = X^T\left(Q^{-1}\right)^T B\left(Q^{-1}\right)^T X = \left(Q^{-1}X\right)^T B\left(\left(Q^{-1}\right)^T\right)X \\ &= \langle BX', X'\rangle\end{aligned}$$

où $X' = Q^{-1}X$. Puisque $X \neq 0$ et que Q^{-1} est inversible, on a $X' \neq 0$ et donc $\langle BX', X'\rangle > 0$ puis $\langle DX, X\rangle > 0$. La matrice diagonale D est donc dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on en déduit que les coefficients diagonaux de D sont des réels strictement positifs.

9) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = \ln\left(1 + e^t\right)$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (car pour tout réel t, $1 + e^t > 0$) puis pour tout réel t, $f'(t) = \dfrac{e^t}{1 + e^t} = 1 - \dfrac{1}{1 + e^t}$ puis $f''(t) = \dfrac{1}{\left(1 + e^t\right)^2}$. La dérivée seconde de f est positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

10) Soit $(A, B) \in \left(S_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$. Soient $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}\left(\lambda_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in D_n(]0, +\infty[)$ telles que $A = QQ^T$ et $B = QDQ^T$. On note que $\det\left(QQ^T\right) = (\det(Q))^2 > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow \left(\det\left(QQ^T + QDQ^T\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\det\left(QQ^T\right)\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\det\left(QDQ^T\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\Leftrightarrow \left(\det\left(QQ^T\right)\right)^{\frac{1}{n}}\left(\det\left(I_n + D\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\det\left(QQ^T\right)\right)^{\frac{1}{n}}\left(1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\det\left(I_n + D\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \lambda_i\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Ensuite, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0,+\infty[$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+e^{\ln(\lambda_i)}\right) \geqslant \ln\left(1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda_i)}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\ln\left(\lambda_i\right)\right) \geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\lambda_i\right)\right).$$

où f est la fonction de la question précédente. Cette dernière inégalité est vraie par convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et d'après la question 4.

11) Soit $t \in [0,1]$. D'après la question 2, si $(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$ (resp. $(S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$), alors $(1-t)A+tB \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$).

L'inégalité à démontrer est immédiate quand $t=0$ ou $t=1$. Dorénavant, on suppose que $t \in]0,1[$. Les matrices $(1-t)A$ et tB sont dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $\mathrm{Sp}((1-t)A) = \{(1-t)\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} \subset]0,+\infty[$ et $\mathrm{Sp}(tB) = \{t\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(B)\} \subset]0,+\infty[$). D'après la question précédente,

$$(\det((1-t)A+tB))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det((1-t)A))^{\frac{1}{n}} + (\det(tB))^{\frac{1}{n}} = (1-t)(\det(A))^{\frac{1}{n}} + t(\det(B))^{\frac{1}{n}},$$

puis, tous les nombres considérés étant positifs, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$,

$$\det((1-t)A+tB) \geqslant \left((1-t)(\det(A))^{\frac{1}{n}} + t(\det(B))^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Ensuite, la fonction $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$ et donc, pour tous réels strictement positifs α et β, $\ln((1-t)\alpha+t\beta) \geqslant (1-t)\ln(\alpha)+t\ln(\beta)$. En particulier,

$$\ln\left((1-t)(\det(A))^{\frac{1}{n}} + t(\det(B))^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant (1-t)\ln\left(\det(A))^{\frac{1}{n}}\right) + t\ln\left(\det(B))^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left((\det(A))^{\frac{1-t}{n}}(\det(B))^{\frac{t}{n}}\right)$$

puis $(1-t)(\det(A))^{\frac{1}{n}} + t(\det(B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1-t}{n}}(\det(B))^{\frac{t}{n}}$ et finalement

$$\left((1-t)(\det(A))^{\frac{1}{n}} + t(\det(B))^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left((\det(A))^{\frac{1-t}{n}}(\det(B))^{\frac{t}{n}}\right)^n = (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t.$$

On a montré que

$$\forall (A,B) \in \left(S_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2,\ \det((1-t)A+tB) \geqslant (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t.$$

Si on suppose $(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$, l'inégalité reste vraie pour $t \in]0,1[$ car le premier membre de l'inégalité est positif et le second membre est nul.

12) On rappelle que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A,B) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$. Alors, $\det(A) > 0$ et $\det(B) > 0$ puis, d'après la question précédente,

$$\forall t \in [0,1],\ \ln\circ\det((1-t)A+tB) \geqslant (1-t)\ln\circ\det(A) + t\ln\circ\det(B).$$

La fonction $ł \circ \det$ est donc concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Partie 4 : encore de la convexité

13) Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. Soient $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n(]0,+\infty[)$ telles que $A = PDP^T$. Les matrices I_n+tA et I_n+tD sont semblables car

$$P\left(I_n+tD\right)P^{-1} = P\left(I_n+tD\right)P^T = I_n + tPDP^T = I_n+tA.$$

Donc, $g(t) = \det\left(I_n+tA\right) = \det\left(I_n+tD\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+t\lambda_i)$.

On en déduit que la fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.

14) Pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + t\lambda_i)$. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ étant concave sur $]-1, +\infty[$ (car de dérivée seconde négative), on sait que son graphe est en-dessous de sa tangente en son point d'abscisse 0. Ceci fournit explicitement : $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Mais alors, pour tout réel positif t,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + t\lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i = t\mathrm{Tr}(A).$$

Partie 5 : et pour finir ... de la convexité !

15) f_A est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.

16) Soit $t \in \mathbb{R}$. La matrice $A + tM$ est symétrique car $S_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\langle (A+tM)X, X\rangle}{\langle AX, X\rangle} = 1 + t\dfrac{\langle MX, X\rangle}{\langle AX, X\rangle}$.
Maintenant, l'application $(X, Y) \mapsto \langle AX, Y\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note N la norme associée. N est équivalente à $\|\ \|$ et donc, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\alpha\|X\| \leqslant N(X) \leqslant \beta\|X\|.$$

D'autre part, l'application linéaire $X \mapsto MX$ est continue sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc il existe $K > 0$ tel que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\| \leqslant K\|X\|$.

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\frac{\langle (A+tM)X, X\rangle}{\langle AX, X\rangle} - 1\right| = |t|\frac{|\langle MX, X\rangle|}{(N(X))^2} \leqslant |t|\frac{\|MX\|\|X\|}{(N(X))^2} \leqslant \frac{|t|K\|X\|^2}{\alpha^2\|X\|^2} = \frac{|t|K}{\alpha^2}.$$

Soit alors $\varepsilon_0 = \dfrac{\alpha^2}{K} > 0$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$,

$$\left|\frac{\langle (A+tM)X, X\rangle}{\langle AX, X\rangle} - 1\right| < \frac{\varepsilon_0 K}{\alpha^2} = 1$$

et en particulier, $\dfrac{\langle (A+tM)X, X\rangle}{\langle AX, X\rangle} > 1 - 1 = 0$ puis $\langle (A+tM)X, X\rangle > 0$.

On a montré qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $A + tM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

17) Posons $\mathrm{Sp}(M) = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout réel t,

$$f_{I_n}(t) = \det(I_n + tM) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i).$$

Par suite,

$$f_{I_n}(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) + o(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\mathrm{Tr}(M) + o(t).$$

Passons au cas général. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$. La matrice $S^{-1}MS^{-1}$ est symétrique puis, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
f_A(t) = \det(A + tM) &= \det(A) \times \det\left(I_n + tA^{-1}M\right) = \det(A) \times \det\left(I_n + tS^{-1}S^{-1}M\right) \\
&= \det(A) \times \det\left(S^{-1}\left(S + tS^{-1}M\right)\right) = \det(A) \times \det\left(\left(S + tS^{-1}M\right)S^{-1}\right) \\
&= \det(A) \times \det\left(I_n + tS^{-1}MS^{-1}\right).
\end{aligned}$$

D'après le début de la question, on a

$$\begin{aligned}
f_A(t) &\underset{t\to 0}{=} \det(A)\left(1 + \mathrm{Tr}\left(S^{-1}MS^{-1}\right)t + o(t)\right) \underset{t\to 0}{=} \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}\left(S^{-1}S^{-1}M\right)t + o(t) \\
&\underset{t\to 0}{=} \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)t + o(t).
\end{aligned}$$

18) Soit $t_0 \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. On a donc $A + t_0M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question 16 puis

$$\begin{aligned}f_A(t_0+h) &= \det(A+t_0M+hM) = f_{A+t_0M}(h)\\ &\underset{h\to 0}{=} \det(A+t_0M)+\det(A+t_0M)\,\mathrm{Tr}\left((A+t_0M)^{-1}M\right)h+o(h).\end{aligned}$$

Mais alors, $f'_A(t_0)=\det(A+t_0M)\,\mathrm{Tr}\left((A+t_0M)^{-1}M\right)$. On a montré que

$$\forall t\in\,]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[,\ f'_A(t)=\det(A+tM)\,\mathrm{Tr}\left((A+tM)^{-1}M\right).$$

19) La fonction Φ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$ et en particulier admet un développement limité d'ordre 1 en 0. Posons $\Phi(t)=A_1+tB_1+o(t)$ où A_1 et B_1 sont deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}I_n=\Phi(t)\times(A+tM) &\underset{t\to 0}{=} (A_1+tB_1+o(t))(A+tM)\\ &\underset{t\to 0}{=} A_1A+t(B_1A+A_1M)+o(t).\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, $A_1A=I_n$ et $B_1A+A_1M=0_n$ puis $A_1=A^{-1}$ et $B_1=-A^{-1}MA^{-1}$. Donc,

$$\Phi(t)\underset{t\to 0}{=}A^{-1}-tA^{-1}MA^{-1}+o(t).$$

20) $\varphi_\alpha=\dfrac{1}{\alpha}f_A^{-\alpha}$. Pour tout $t\in\,]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$, $A+tM\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et en particulier, pour tout $t\in\,]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$, $f_A(t)=\det(A+tM)>0$. Ainsi, la fonction f_A est dérivable sur $]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$ et strictement positive. On en déduit que la fonction φ_α est dérivable sur $]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$ et pour tout $t\in\,]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$,

$$\begin{aligned}\varphi'_\alpha(t) &= \frac{1}{\alpha}\times(-\alpha)f'_A(t)f_A^{-\alpha-1}(t) = -\det(A+tM)\,\mathrm{Tr}\left((A+tM)^{-1}M\right)(\det(A+tM))^{-\alpha-1}\\ &= -\mathrm{Tr}\left((A+tM)^{-1}M\right)(\det(A+tM))^{-\alpha}.\end{aligned}$$

21) Tout d'abord la trace est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que forme linéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que

$$\frac{1}{t}\mathrm{Tr}(o(t)M)\underset{t\to 0}{=}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{t}o(t)M\right)\underset{t\to 0}{=}\mathrm{Tr}(o(1)M)\underset{t\to 0}{=}o(1)$$

et donc $\mathrm{Tr}(o(t)M)\underset{t\to 0}{=}o(t)$.

D'après les questions 17 et 19,

$$\begin{aligned}\varphi'_\alpha(t) &\underset{t\to 0}{=} -\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}-tA^{-1}MA^{-1}+o(t)\right)M\right)\left(\det(A)+\det(A)\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)t+o(t)\right)^{-\alpha}\\ &\underset{t\to 0}{=} -(\det(A))^{-\alpha}\left(\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)-t\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right)+o(t)\right)\left(1+\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)t+o(t)\right)^{-\alpha}\\ &\underset{t\to 0}{=} -(\det(A))^{-\alpha}\left(\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)-t\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right)+o(t)\right)\left(1-\alpha\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)t+o(t)\right)\\ &\underset{t\to 0}{=} -(\det(A))^{-\alpha}\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)+t(\det(A))^{-\alpha}\left(\alpha\left(\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)\right)^2+\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right)\right)+o(t)\end{aligned}$$

$\varphi''_\alpha(0)$ est le coefficient de t dans le développement précédent et donc

$$\varphi''_\alpha(0)=(\det(A))^{-\alpha}\left(\alpha\left(\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)\right)^2+\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right)\right)$$

22) Soit $S\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A=S^2$. La matrice S^{-1} est inversible et

$$\left(S^{-1}\right)^{-1}\left(A^{-1}M\right)S^{-1}=SS^{-2}MS^{-1}=S^{-1}MS^{-1}.$$

La matrice $A^{-1}M$ est donc semblable à la matrice symétrique réelle $S^{-1}MS^{-1}$ ($\left(S^{-1}MS^{-1}\right)^T=\left(S^T\right)^{-1}M^T\left(S^T\right)^{-1}=S^{-1}MS^{-1}$). On pose $B=S^{-1}MS^{-1}$

23) On a déjà $(\det(A))^{-\alpha} > 0$. Posons $\mathrm{Sp}(B) = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Puisque deux matrices semblables ont même trace.

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_\alpha''(0)}{(\det(A))^{-\alpha}} &= \alpha \mathrm{Tr}(B))^2 + \mathrm{Tr}\left(B^2\right) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \\
&= \alpha\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right) \\
&\geqslant \alpha\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \times 1\right)^2 \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)^2 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

24) Supposons de plus que $\varphi_\alpha''(0) > 0$. Par continuité de φ_α'' en 0 (f_A étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur un voisinage de 0), il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$, $\varphi_\alpha''(t) \geqslant 0$. La fonction φ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) est alors convexe sur $]-\eta,\eta[$. En particulier, son graphe sur $]-\eta,\eta[$ est au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0. Ceci fournit plus explicitement pour tout $t \in]-\eta,\eta[$,

$$\varphi_\alpha(t) \geqslant \varphi_\alpha(0) + t\varphi_\alpha'(0)$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha}(\det(A + tM))^{-\alpha} \geqslant \frac{1}{\alpha}(\det(A))^{-\alpha} - \mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)(\det(A))^{-\alpha}t.$$

