SESSION 2023

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PSI

---

1. Nombre de points fixes d'une permutation

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{card}\left(\mathscr{S}_n\right) = n!$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris pour $n = 0$ car $d_0 = 1$),

$$0 \leqslant \frac{d_n}{n!} \leqslant 1.$$

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, on sait que $R_a = 1$ et donc $R \geqslant R_a = 1$.

2) Le nombre de permutations ayant 0 point fixe est $d_n = \binom{0}{n} d_{n-0}$. Il n'y a qu'une permutation ayant n point fixe, à savoir $\text{Id}_{[\![1,n]\!]}$. Il y a donc $1 = \binom{n}{n} d_{n-n}$ permutation ayant n points fixes.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ (pour $n \geqslant 2$). Soit $(a_1, \ldots, a_k) \in [\![1, n]\!]^k$ tel que $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$ ayant a_1, ..., a_k pour points fixes et n'ayant pas d'autres points fixes.
Alors, par injectivité de σ, $\sigma\left([\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}\right) \subset [\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$). σ induit donc une application σ' de $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$) dans lui-même. De plus, σ' est injective de l'ensemble fini $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$) dans lui-même et donc σ' est une permutation de $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$). Enfin, σ ayant déjà k points fixes, σ' n'a pas de point fixe et est donc un dérangement de $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$).
Réciproquement, une permutation ainsi construite admet exactement a_1, ..., a_k pour points fixes. Le nombre de permutations σ ayant a_1, ..., a_k pour points fixes et pas d'autres points fixes, est donc le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$), à savoir d_{n-k}.

Puisqu'il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de $\{a_1, \ldots, a_k\}$, le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\binom{n}{k} d_{n-k}$.

Enfin, puisque P_n est la loi uniforme sur $\mathscr{S}_n$,

$$P_n\left(X_n = k\right) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

3) Puisque $R \geqslant 1$, on peut effectuer sur $]-1, 1[$ le produit de Cauchy des séries entières de sommes respectives s et $\exp$ et pour $x \in]-1, 1[$, on obtient

$$\begin{aligned}
s(x) \times e^x &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P_n\left(X_n = k\right)\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ (car } \left(X_n = k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est un système complet d'événements).}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, $s(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ puis $\lim\limits_{x \to 1,\ x<1} s(x) = +\infty$. La somme d'une série entière étant continue sur son intervalle ouvert de convergence, ceci impose $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

4) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1-x)s(x) = e^{-x}$. Or, pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned}
(1-x)s(x) &= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^n = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\right) x^n
\end{aligned}$$

puis, par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x)s(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

On obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d_n}{n!} = d_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$ car $d_0 = 1$.

5) Soit alors $k \in [\![0, n]\!]$.

$$P_n(X_n = k) = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

6) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Notons $\mathscr{S}_n^i$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ fixant i. Une permutation σ fixant i induit une permutation σ_i de $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. Ensuite, l'application $\sigma \mapsto \sigma_i$ est une bijection de $\mathscr{S}_n^i$ sur $\mathscr{S}([\![1, n]\!] \setminus \{i\})$, l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. Donc, $\operatorname{card}\left(\mathscr{S}_n^i\right) = (n-1)!$ puis

$$\mathbb{P}(U_i = 1) = \frac{\operatorname{card}\left(\mathscr{S}_n^i\right)}{\operatorname{card}\left(\mathscr{S}_n\right)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Donc, puisque U_i prend les valeurs 0 et 1, U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $U_iU_j(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma(i) = i$ et $\sigma(j) = j$ et $U_iU_j(\sigma) = 0$ sinon.
On note $\mathscr{S}_n^{i,j}$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ fixant i et j. Comme précédemment,

$$\mathbb{P}(U_iU_j = 1) = \frac{\operatorname{card}\left(\mathscr{S}_n^{i,j}\right)}{\operatorname{card}\left(\mathscr{S}_n\right)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Donc, U_iU_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n(n-1)}$.

7) Puisque chaque U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$, on sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(U_i) = \dfrac{1}{n}$.

Puisque X_n est le nombre de points fixes d'une permutation, $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ et donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} U_iU_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(U_i^2\right) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(U_iU_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) + \left(n^2 - n\right) \times \frac{1}{n(n-1)} \text{ (car } U_i^2 = U_i) \\
&= \mathbb{E}(X_n) + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Mais alors, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) - (\mathbb{E}(X_n))^2 = 1.$$

8) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant k$, $P_n\left(X_n = k\right) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\dfrac{(-1)^i}{i!}$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} P_n\left(X_n = k\right) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \dfrac{1^k}{k!}e^{-1}$. Donc, Y suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda = 1$.

9) Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
G_{X_n}(s) &= \sum_{k=0}^{n} P\left(X_n = k\right)s^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right)\frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=0}^{n-i}\frac{s^k}{k!}\right)\ (i \leqslant n-k \Leftrightarrow k \leqslant n-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right) - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right) = e^s\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right) \\
&= e^s\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!} - e^s\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right) \\
&= e^{s-1} - e^s\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right).
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}$ est le reste à l'ordre n de la série convergente de terme général $\dfrac{(-1)^i}{i}$, $i \in \mathbb{N}$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = 0$.

De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{e}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\times\frac{\varepsilon}{e} \leqslant \frac{\varepsilon}{e}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!} = \varepsilon.$$

Ceci montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\left(\sum_{k=n-i+1}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\right) = 0$. Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = e^{s-1}.$$

D'autre part,

$$G_Y(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)s^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{n!}s^n = e^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s^n}{n!} = e^{s-1}.$$

On a montré que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s)$.

2. Convergence en variation totale

10) • $d_{VT}(x,y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k) - y(k)| \leqslant \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(|x(k)| + |y(k)|) = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(x(k) + \sum_{k=0}^{+\infty}y(k)\right) = 1$. Donc, $d_{VT}(x,y) \leqslant 1$.

• $d_{VT}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k) - y(k)| = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |x(k) - y(k)| = 0$ (réels positifs de somme nulle). Mais alors, $d_{VT}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ x(k) = y(k) \Leftrightarrow x = y$.

- $d_{VT}(x,y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-y(k)| = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|y(k)-x(k)| = d_{VT}(y,x)$.

- $d_{VT}(x,z) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-y(k)+y(k)-z(k)| \leqslant \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-y(k)| + \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|y(k)-z(k)| = d_{VT}(x,y)+d_{VT}(y,z)$.

11) Soit X (resp. Y) une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0,1[$ (resp. $\mu \in]0,1[$).

$$d_{VT}(p_X,p_Y) = \frac{1}{2}\left(|p_X(0)-p_Y(0)|+|p_X(1)-p_Y(1)|\right) = \frac{1}{2}(|(1-\lambda)-(1-\mu)|+|\lambda-\mu|) = |\lambda-\mu|.$$

Donc, $d_{VT}(p_X,p_Y) = |\lambda-\mu|$.

12) $d_{VT}(p_X,\pi_\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(|P_X(0)-\pi_\lambda(0)|+|P_X(1)-\pi_\lambda(1)|+\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\pi_\lambda(k)\right)$ puis

$$\begin{aligned}d_{VT}(p_X,\pi_\lambda) &= \frac{1}{2}\left(\left|(1-\lambda)-e^{-\lambda}\right|+\left|\lambda-\lambda e^{-\lambda}\right|+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(\left|(1-\lambda)-e^{-\lambda}\right|+\lambda\left(1-e^{-\lambda}\right)+e^{-\lambda}\left(e^\lambda-1-\lambda\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left|1-\lambda-e^{-\lambda}\right|+1+\lambda-e^{-\lambda}-2\lambda e^{-\lambda}\right)\end{aligned}$$

On sait que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1+x$ (inégalité de convexité). Donc, $e^{-\lambda} \geqslant 1-\lambda$ puis $1-\lambda-e^{-\lambda} \leqslant 0$. Par suite,

$$\begin{aligned}d_{VT}(p_X,\pi_\lambda) &= \frac{1}{2}\left(e^{-\lambda}-1+\lambda+1+\lambda-e^{-\lambda}-2\lambda e^{-\lambda}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\lambda-2\lambda e^{-\lambda}\right) = \lambda\left(1-e^{-\lambda}\right).\end{aligned}$$

Enfin, encore une fois, $e^{-\lambda} \geqslant 1-\lambda$ et donc $0 < 1-e^{-\lambda} \leqslant \lambda$ puis

$$d_{VT}(p_X,\pi_\lambda) \leqslant \lambda^2.$$

13) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}2d_{VT}(p_{X_n},\pi_1) &= \sum_{k=0}^{n}|p_{X_n}(k)-\pi_1(k)|+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\pi_1(k) = \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}-\frac{e^{-1}}{k!}\right|+e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}-\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right|+e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right|+e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\end{aligned}$$

14) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \geqslant n+2$, $k! = (n+1)! \times (n+2) \times \ldots \times k \geqslant (n+1)!(n+2)^{k-(n+1)}$ ce qui reste vrai quand $k = n+1$. On en déduit que

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k}.$$

Puisque $0 \leqslant \dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$,

$$r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)\times(n+1)!}.$$

D'autre part, $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \geqslant \frac{1}{(n+1)!}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant (n+1)!r_n \leqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

Les deux membres extrêmes de l'encadrement ci-dessus tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)!r_n = 1$ puis

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}.$$

15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{1}{i!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{r_{n-k}}{k!}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n-k+2}{n-k+1}\times\frac{1}{(n-k+1)!} \text{ (d'après la question précédente)}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{n-k+1}\right)\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{n-n+1}\right)\binom{n+1}{k}\\
&\leqslant \frac{2}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{2}{(n+1)!}(1+1)^{n+1}\\
&= 4\times\frac{2^n}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Par suite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$. Mais alors, en tenant compte de $r_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{(n+1)!}+o\left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)$ d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
d_{VT}\left(p_{X_n},\pi_1\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right) + \frac{e^{-1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right).
\end{aligned}$$

3. Autres estimations de distances en variation totale

16) Soient x et y deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$. $x*y$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ et de plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} x*y(k) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,k]\!]^2\\ i+j=k}} x(i)y(j)\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{+\infty}x(i)\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}y(j)\right) \text{ (produit de CAUCHY de deux séries absolument convergentes)}\\
&= 1\times 1 = 1.
\end{aligned}$$

Donc, $x*y$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$.

17) $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ puis, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
p_{X+Y}(k) = \mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,k]\!]^2 \\ i+j=k}} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,k]\!]^2 \\ i+j=k}} \mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j) \text{ (car les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,k]\!]^2 \\ i+j=k}} p_X(i)\times p_Y(j) = p_X * p_Y(k).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $p_{X+Y}(k) = (p_X * p_Y)(k)$ et finalement, $p_{X+Y} = p_X * p_Y$.

18) Soit $(x,y,u,v)\in(\mathcal{D}_{\mathbb{N}})^4$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
|(x*y)(k)-(u*v)(k)| &= \left|\sum_{i+j=k} x(i)y(j) - \sum_{i+j=k} u(i)v(j)\right| \\
&= \left|\sum_{i+j=k} x(i)y(j) - \sum_{i+j=k} u(i)y(j) + \sum_{i+j=k} u(i)y(j) - \sum_{i+j=k} u(i)v(j)\right| \\
&= \left|\sum_{i+j=k} (x(i)-u(i))y(j) + \sum_{i+j=k} u(i)(y(j)-v(j))\right| \\
&\leqslant \sum_{i+j=k} y(j)|x(i)-u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j)-v(j)|
\end{aligned}$$

19)

$$\begin{aligned}
d_{VT}(x*y-u*v) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|(x*y)(k)-(u*v)(k)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k} y(j)|x(i)-u(i)|\right) + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k} u(i)|y(j)-v(j)|\right)\right) \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=0}^{+\infty}|x(i)-u(i)|\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}y(j)\right) + \left(\sum_{i=0}^{+\infty}u(i)\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|y(j)-v(j)|\right)\right) \\
&\text{(produits de Cauchy de séries absolument convergentes)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}|x(i)-u(i)| + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{+\infty}|y(j)-v(j)| \text{ (car } (y,u)\ ((\mathcal{D}_{\mathbb{N}})^2) \text{)} \\
&= d_{VT}(x,u) + d_{VT}(y,v).
\end{aligned}$$

20) Soit U une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre $n\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda\in]0,1[$. On sait qu'il existe des variables aléatoires indépendantes $X_1,\ldots,X_n$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre λ telles que $U = X_1+\ldots+X_n$. Soit V une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. On sait qu'il existe des variables aléatoires indépendantes $Y_1,\ldots,Y_n$, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ telles que $V = Y_1+\ldots+Y_n$.

Soit $n\geqslant 2$. D'après le lemme des coalitions, les variables $X_1+\ldots+X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes. D'après la question 17, $p_U = p_{X_1+\ldots+X_{n-1}} * p_{X_n}$ et de même $p_V = p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}} * p_{Y_n}$ puis, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
d_{VT}(p_U,p_V) &= d_{VT}\left(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}} * p_{X_n}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}} * p_{Y_n}\right) \\
&\leqslant d_{VT}\left(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}\right) + d_{VT}\left(p_{X_n}, p_{Y_n}\right) \\
&\leqslant d_{VT}\left(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}\right) + \lambda^2 \text{ (d'après la question 12).}
\end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{VT}\left(p_{X_1+\ldots+X_n}, p_{Y_1+\ldots+Y_n}\right) \leqslant n\lambda^2$ (où les X_i sont des variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre λ et les Y_j sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ).

- Le résultat est vrai pour $n = 1$ d'après la question 12.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat pour n. Alors,

$$d_{VT}\left(p_{X_1+\ldots+X_{n+1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n+1}}\right) \leqslant d_{VT}\left(p_{X_1+\ldots+X_n}, p_{Y_1+\ldots+Y_n}\right) + \lambda^2 \leqslant n\lambda^2 + \lambda^2 = (n+1)\lambda^2.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

21) D'après la question précédente, pour $n > \lfloor\alpha\rfloor$,

$$d_{VT}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) = d_{VT}\left(p_{B_n}, \pi_{n\times\frac{\alpha}{n}}\right) \leqslant n\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{n}.$$

Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant \text{Max}\{k, \lfloor\alpha\rfloor\}$,

$$\left|\mathbb{P}\left(B_n = k\right) - \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}\right| = \left|p_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)\right| \leqslant 2d_{VT}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) \leqslant \frac{2\alpha^2}{n},$$

où de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\alpha^2}{n} = 0$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n = k\right) = \pi_\alpha(k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$.

22) Soit U (resp. V) une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre α (resp. β).

Soit $n > \text{Max}\{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\beta\rfloor\}$.
Soient $X_1, \ldots, X_n$, (resp. $Y_1, \ldots, Y_n$) n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\alpha}{n}$ (resp. $\frac{\beta}{n}$) puis $U_n = X_1 + \ldots + X_n$ (resp. $V_n = Y_1 + \ldots + Y_n$). Donc, U_n (resp. V_n) suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\alpha}{n}$ (resp. n et $\frac{\beta}{n}$). D'après la question 21,

$$d_{VT}\left(p_{U_n}, \pi_\alpha\right) \leqslant \frac{\alpha^2}{n} \text{ et } d_{VT}\left(p_{V_n}, \pi_\beta\right) \leqslant \frac{\beta^2}{n}.$$

Mais alors, pour $n > \text{Max}\{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\beta\rfloor\}$, d'après la question 10,

$$d_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant d_{VT}\left(\pi_\alpha, p_{U_n}\right) + d_{VT}\left(p_{U_n}, p_{V_n}\right) + d_{VT}\left(p_{V_n}, \pi_\beta\right) \leqslant d_{VT}\left(p_{U_n}, p_{V_n}\right) + \frac{\alpha^2+\beta^2}{n}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
d_{VT}\left(p_{U_n}, p_{V_n}\right) &= d_{VT}\left(p_{X_1+\ldots+X_n}, p_{Y_1+\ldots+Y_n}\right) \\
&= d_{VT}\left(p_{X_1} * \ldots * p_{X_n}, p_{Y_1} * \ldots * p_{Y_n}\right) \text{ (d'après la question 17 et par récurrence)} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} d_{VT}\left(p_{X_k}, p_{Y_k}\right) \text{ (d'après la question 19 et par récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right| \text{ (d'après la question 11)} \\
&= |\alpha - \beta|.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n > \text{Max}\{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\beta\rfloor\}$, $d_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant |\alpha-\beta| + \frac{\alpha^2+\beta^2}{n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant |\alpha - \beta|.$$

