Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Etude d'une norme sur $\mathscr{L}(E)$

1) On pose $A = \left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$ et $B = \{\|u(x)\|,\ x \in E,\ \|x\| = 1\}$.

L'application u est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ car u est linéaire sur l'espace de dimension finie E. Donc, il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$.
Puisque $E \neq \{0\}$, A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par M. On en déduit que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Ensuite, $B \subset A$ car si x est un élément de E de norme 1, alors $x \neq 0$ et $\|u(x)\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. D'autre part, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \in B$$

car $\left\|\dfrac{1}{\|x\|}x\right\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$. Ceci montre que $A \subset B$ puis que $A = B$. En particulier, $\mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Sup}(B)$.

2) • D'après la question précédente, $|||\ |||$ est une application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. $|||u||| \geqslant \dfrac{\|u(x_0)\|}{\|x_0\|} \geqslant 0$.
On a montré que : $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $|||u||| \geqslant 0$ (positivité).

• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned}|||u||| = 0 &\Rightarrow \forall x \in E \setminus \{0\},\ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant 0 \Rightarrow \forall x \in E \setminus \{0\},\ \|u(x)\| = 0 \Rightarrow \forall x \in E \setminus \{0\},\ u(x) = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in E,\ u(x) = 0 \text{ (car } u \text{ linéaire)}\\ &\Rightarrow u = 0.\end{aligned}$$

On a montré que : $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $(|||u||| = 0 \Rightarrow u = 0)$ (axiome de séparation).

• Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|(\lambda u)(x)\|}{\|x\|} = |\lambda|\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant |\lambda|\ |||u|||$. Donc, $|\lambda|\ |||u|||$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|(\lambda u)(x)\|}{\|x\|},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$. Puisque $|||\lambda u|||$ est le plus petit de ces majorants, on a montré que $|||\lambda u||| \leqslant |\lambda|\ |||u|||$.

On suppose de plus $\lambda \neq 0$. On applique ce qui précède à $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda}$ et $u' = \lambda u$. On obtient $|||u||| = |||\lambda' u'||| \leqslant |\lambda'|\ |||u'||| = \dfrac{1}{|\lambda|}|||\lambda u|||$ et donc $|\lambda|\ |||u||| \leqslant |||\lambda u|||$ puis $|||\lambda u||| = |\lambda|\ |||u|||$.

Cette dernière égalité reste vraie quand $\lambda = 0$ car dans ce cas les deux membres de l'égalité sont nuls. On a montré que

$$\forall\ u \in \mathscr{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ |||\lambda u||| = |\lambda\ |||u||| \text{ (homogénéité)}.$$

• Soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|} \leqslant \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} + \dfrac{\|v(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u||| + |||v|||$. Donc, $|||u||| + |||v|||$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|},\ x \neq 0\right\}$. Puisque $|||u+v|||$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $|||u+v||| \leqslant |||u||| + |||v|||$.

On a montré que : $\forall (u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $|||u + v||| \leqslant |||u||| + |||v|||$ (inégalité triangulaire).

Finalement, $|||\ |||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

3) Par définition de $|||\ |||$, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant |||u|||\ \|x\|$.

Soit $(u,v) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\|uv(x)\| = \|u(v(x))\| \leqslant |||u|||\, \|v(x)\| \leqslant |||u|||\, |||v|||\, \|x\|$$

et donc (puisque $\|x\| > 0$) $\dfrac{\|uv(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u|||\, |||v|||$. Ainsi, $|||u|||\, |||v|||$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|uv(x)\|}{\|x\|},\ x \neq 0\right\}$. Puisque $|||uv|||$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $|||uv||| \leqslant |||u|||\, |||v|||$. On a montré que $|||\ |||$ est une norme sous-multiplicative.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. $|||u^0||| = |||Id||| = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|x\|}{\|x\|},\ x \neq 0\right\} = 1 \leqslant |||u|||^0$.
D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $|||u^k||| \leqslant \underbrace{|||u||| \times \ldots \times |||u|||}_{\text{k facteurs}} = |||u|||^k$. Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |||u^k||| \leqslant |||u|||^k.$$

B. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

4) Posons $\chi_a = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ où $r \in \mathbb{N}^*$, les λ_i sont des complexes deux à deux distincts et les m_i sont des entiers naturels non nuls de somme n.

Puisque les polynômes $(X - \lambda_i)^{m_i}$ sont deux à deux premiers entre eux car deux à deux sans racine commune dans $\mathbb{C}$, le théorème de décomposition des noyaux permet d'affirmer que $\text{Ker}\,(\chi_A(a)) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \text{Ker}\left((a - \lambda_i Id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}\right)$. Mais $\chi_a(a) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \text{Ker}\,(a - \lambda_i Id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}.$$

5) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Soit $u \in \mathscr{L}(E_i)$. $q_i u p_i$ est une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans lui-même ou encore un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, $q_i u p_i(x) = q_i u(x_i) = u(x_i)$ car $u(x_i) \in E_i$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|q_i u p_i(x)\| = \|u(x_i)\| \leqslant |||u|||_i\, \|x_i\| = \|q_i p_i(x)\|\ \ |||u|||_i \leqslant |||q_i p_i|||_c |||u|||_i \|x\|.$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|q_i u p_i(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||q_i p_i|||_c |||u|||_i$ et donc $|||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i$ où $C_i = |||q_i p_i|||_c$.

6) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Deux polynômes en a commutent et en particulier a et $(a - \lambda_i Id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$ commutent. On sait alors que a laisse stable $\text{Ker}\,(a - \lambda_i Id_{\mathbb{C}^n})^{m_i} = E_i$.

7) Soit $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$.

$p_i q_j \in \mathscr{L}(E_j, E_i)$. Si $j \neq i$, pour tout $x_j \in E_j$, $p_i(q_j(x_j)) = p_i(x_j) = 0$ (car les E_k sont supplémentaires). Donc, si $j \neq i$, $p_i q_j$ est l'application nulle de E_j dans E_i.
Si $i = j$, pour tout $x_j \in E_j$, $p_j(q_j(x_j)) = p_j(x_j) = x_j$ et donc $p_j q_j = Id_{E_j}$.

Ensuite, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $q_i p_i$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ puis, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $q_i p_i(x) = q_i(x_i) = x_i$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} q_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i = x$. Par suite, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} q_i p_i = Id_{\mathbb{C}^n}$.

8) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. $q_i a_i p_i$ est bien défini et est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$q_i a_i p_i(x) = q_i p_i a q_i p_i(x) = q_i p_i(a(x_i)) = a(x_i)$$

car E_i est stable par a. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} a(x_i) = a\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = a(x).$$

On a montré que $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k = \sum_{i=1}^{r} q_i a^k p_i$.

- $\sum_{i=1}^{r} q_i a_i^0 p_i = \sum_{i=1}^{r} q_i p_i = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} = a^0$ d'après la question 7). L'égalité est vraie quand $k = 0$.

- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $a^k = \sum_{i=1}^{r} q_i a^k p_i$. Alors

$$\begin{aligned}
a^{k+1} = a^k a &= \left(\sum_{i=1}^{r} p_i a_i^k q_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} q_j a_j p_j\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} q_i a_i^k p_i q_j a_j p_j = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k a_i p_i \text{ (d'après la question 7))}\\
&= \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^{k+1} p_i.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta)^k = \sum_{i=1}^{r} q_i \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta_i)^k\right) p_i.$$

Maintenant, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, l'application $\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_i) & \to & \mathscr{L}(\mathbb{C}^n) \\ h & \mapsto & q_i h p_i \end{array}$ est continue sur $\mathscr{L}(E_i)$ car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{L}(E_i)$. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{ta} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta)^k &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{r} \varphi_i\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta_i)^k\right)\\
&= \sum_{i=1}^{r} \varphi_i\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta_i)^k\right) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i\left(e^{ta_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.
\end{aligned}$$

10) Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Les endomorphismes $t(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i})$ et $t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$ (de E_i) commutent. Donc

$$\begin{aligned}
e^{ta_i} &= e^{t\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right) + t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}} = e^{t\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right)} e^{t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}}\\
&= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(t\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right)\right)^k\\
&= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!}\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right)^k \text{ (car } E_i = \mathrm{Ker}\left(\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{m_i}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $|||\ |||_i$ est une norme, sous-multiplicative, sur $\mathscr{L}(E_i)$,

$$|||e^{ta_i}|||_i \leqslant \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}|||_i^k.$$

11) On pose $C = \mathrm{Max}\{C_i,\ I \in [\![1,r]\!]\}$ et $M = \mathrm{Max}\left\{|||a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}|||_i^k,\ 1 \leqslant i \leqslant r,\ 0 \leqslant k \leqslant m_i - 1\right\}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|||e^{ta}|||_c &\leqslant \sum_{i=1}^{r} |||q_i e^{ta_i} p_i|||_c \leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i |||e^{ta_i}|||_i \text{ (d'après la question 5)}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}|||_i^k\\
&\leqslant CM \sum_{i=1}^{r} e^{\mathrm{Re}(t\lambda_i)} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!}\\
&\leqslant CM \sum_{k=0}^{n} \frac{|t|^k}{k!} \sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}.
\end{aligned}$$

Le polynôme $P = CM \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ est un polynôme tel que pour tout réel t,

$$|||e^{ta}|||_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}.$$

12) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|e^{tu_A}(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|e^{tv_a}(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||e^{tv_A}|||_c.$$

$|||e^{tv_A}|||_c$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|e^{tu_A}(x)\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$. Puisque $|||e^{tu_A}|||_r$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $|||e^{tu_A}|||_r \leqslant |||e^{tv_A}|||_c$. On a montré que

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall t \in \mathbb{R},\ |||e^{tu_A}|||_r \leqslant |||e^{tv_A}|||_c.$$

13) On note que $u = u_A$.

On sait que pour tout réel t, $g_{x_0}(t) = e^{tu}(x_0)$.

• Supposons que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$. Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ puis $Z \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On note encore z le vecteur de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à Z et on pose $z = x_0 + ix_1$ où x_0 et x_1 sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

On sait que, pour tout réel t, $e^{tv_A}(z) = e^{\lambda t}z$. On en déduit que pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\lambda t}z\right\| &= \left\|e^{tv_A}(z)\right\| = \left\|e^{tv_A}(x_0) + ie^{tv_A}(x_1)\right\| = \left\|e^{tu}(x_0) + ie^{tu}(x_1)\right\| = \|g_{x_0}(t) + ig_{x_1}(t)\|\\
&\leqslant \|g_{x_0}(t)\| + |i|\,\|g_{x_1}(t)\| = \|g_{x_0}(t)\| + \|g_{x_1}(t)\|.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout réel t, $\left\|e^{\lambda t}z\right\| = \left|e^{\lambda t}\right| \|z\| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda)}\|z\|$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} (\|g_{x_0}(t)\| + \|g_{x_1}(t)\|) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{Re}(\lambda)}\|z\| = 0$ puis que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} = 0$ car $\|z\| \neq 0$ et enfin on en déduit que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Ainsi, si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.

• Supposons que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, les valeurs propres deux à deux distinctes de A dans $\mathbb{C}$. D'après la question 11, il existe un polynôme P tel que pour tout réel t, $|||e^{tv_A}|||_c \leqslant P(|t|) \displaystyle\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
\|g_{x_0}(t)\| = \left\|e^{tu}(x_0)\right\| &\leqslant |||e^{tu}|||_r\, \|x_0\|\\
&\leqslant |||e^{tv_A}|||_c\, \|x_0\| \text{ (d'après la question 12)}\\
&\leqslant \|x_0\|\, P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}.
\end{aligned}$$

Puisque pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \|x_0\| P(|t|) \sum\limits_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$.

Ainsi, si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$.

14) On suppose que la numérotation des valeurs propres de A a été effectuée de sorte que $\mathrm{Re}(\lambda_1) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}(\lambda_r) < 0$. On pose $\alpha = -\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\lambda_r)$ de sorte que $\alpha > 0$. Pour tout réel t,

$$e^{\alpha t}|||e^{tu}|||_r \leqslant e^{\alpha t}|||e^{t\nu_A}|||_c \leqslant P(|t|)e^{\alpha t}\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)} \leqslant rP(|t|)e^{t\alpha}e^{t\mathrm{Re}(\lambda_r)} = rP(|t|)e^{\frac{t\mathrm{Re}(\lambda_r)t}{2}}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} rP(|t|)e^{\frac{t\mathrm{Re}(\lambda_r)t}{2}} = 0$. Puisque d'autre part, la fonction $t \mapsto rP(|t|)e^{\frac{t\mathrm{Re}(\lambda_r)t}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, cette fonction est en particulier bornée sur $[0, +\infty[$. Donc, il existe $C_2 > 0$ tel que, pour tout réel positif t, $rP(|t|)e^{\frac{t\mathrm{Re}(\lambda_r)t}{2}} \leqslant C_2$ puis pour tout réel t, $e^{\alpha t}|||e^{tu}|||_r \leqslant C_2$ et finalement, pour tout réel t, $|||e^{tu}|||_r \leqslant C_2e^{-\alpha t}$.

On a montré que si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative, il existe deux réels strictement positifs C_2 et α tels que

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ |||e^{tu}|||_r \leqslant C_2e^{-\alpha t}.$$

Soit alors $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour tout réel positif t, $\|g_{x_0}(t)\| = \|e^{tu}(x_0)\| \leqslant |||e^{tu}|||_r \|x_0\| \leqslant C_2 \|x_0\| e^{-\alpha t}$.

C. Démonstration du théorème de Liapounov

15) • Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Avec les notations de la partie précédente, pour tout réel t, $e^{ta}(x) = g_x(t)$ et donc la fonction $t \mapsto e^{ta}(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on sait que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est continue sur $(\mathbb{R}^n)^2$. Finalement, l'application $t \mapsto \langle e^{ta}(x), e^{ta}(y)\rangle$ est continue sur $[0, +\infty[$.

D'après la question 14), il existe $C_2 > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $t \geqslant 0$, $|||e^{ta}|||_r \leqslant C_2e^{-\alpha t}$. Pour $t \geqslant 0$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\langle e^{ta}(x), e^{ta}(y)\rangle\right| \leqslant \left\|e^{ta}(x)\right\| \left\|e^{ta}(y)\right\| \leqslant \|x\|\|y\||||e^{ta}|||_r^2 \leqslant \|x\|\|y\|C_2^2e^{-2\alpha t}.$$

Puisque $\alpha > 0$, on en déduit que $|\langle e^{ta}(x), e^{ta}(y)\rangle| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. La fonction $t \mapsto \langle e^{ta}(x), e^{ta}(y)\rangle$ est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ puis $b(x, y)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, b est bien une application de $(\mathbb{R}^n)^2$ dans $\mathbb{R}$.

• b est symétrique, linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de $x \mapsto e^{ta}(x)$ et bilinéarité de $\langle\ ,\ \rangle$, puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $b(x, x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\|e^{ta}(x)\right\|^2\ dt \geqslant 0$ (par positivité de l'intégration) puis

$$\begin{aligned}
b(x, x) = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left\|e^{ta}(x)\right\|^2\ dt \\
&\Rightarrow \forall t \geqslant 0,\ \left\|e^{ta}(x)\right\|^2 = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Rightarrow \forall t \geqslant 0,\ e^{ta}(x) = 0 \\
&\Rightarrow e^{0a}(x) = 0 \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x) = 0 \Rightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, b est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\mathbb{R}^n$ et donc, b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x + h) = b(x + h, x + h) = b(x, x) + 2b(x, h) + b(h, h) = q(x) + 2b(x, h) + q(h).$$

Ensuite, puisque b est bilinéaire en dimension finie, on sait qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $(h,k) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|b(h,k)| \leqslant C\|h\|\|k\|$ et en particulier, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $|q(h)| \leqslant C\|h\|^2$ (on peut aussi utiliser le fait que $\sqrt{q}$ est une norme, équivalente à $\|\ \|$). On en déduit que $q(h) \underset{h\to 0}{=} o(h)$. Mais alors

$$q(x+h) \underset{h\to 0}{=} q(x) + 2b(x,h) + o(h).$$

Puisque l'application $h \mapsto 2b(x,h)$ est linéaire, ceci montre que q est différentiable en x et que la différentielle de q en x est l'application $h \mapsto 2b(x,h)$. En particulier, (en notant dq_x plutôt que $dq(x)$ la différentielle de q en x),

$$dq_x(a(x)) = 2b(x, a(x)).$$

Ensuite, $2b(x,a(x)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2\langle e^{ta}(x), e^{ta}(a(x))\rangle\, dt$. On sait que l'application $\varphi\ : t \mapsto e^{ta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que si f est une application dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, l'application $t \mapsto \|f(t)\|^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée l'application $t \mapsto 2\langle f(t), f'(t)\rangle$. Donc, l'application $t \mapsto \langle e^{ta}(x), e^{ta}(x)\rangle$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction $t \mapsto 2\langle e^{ta}(x), e^{ta}(a(x))\rangle$. Par suite,

$$\begin{aligned}
2b(x,a(x)) &= \int_0^{+\infty} 2\langle e^{ta}(x), e^{ta}(a(x))\rangle\, dt = \left[\langle e^{ta}(x), e^{ta}(x)\rangle\right]_0^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left\|e^{ta}(x)\right\|^2 - \|\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x)\|^2 = \lim_{t\to+\infty} \|g_x(t)\|^2 - \|x\|^2 \\
&= -\|x\|^2 \text{ (d'après la question 14)}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ dq_x(a(x)) = 2b(x,a(x)) = -\|x\|^2.$$

17) Pour tout réel positif t, $q\left(f_{x_0}(t)\right) = b\left(f_{x_0}(t), f_{x_0}(t)\right)$. Puisque f_{x_0} est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$, il en est de même de la fonction $t \mapsto q\left(f_{x_0}(t)\right)$ et pour $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\left(q \circ f_{x_0}\right)'(t) &= 2b\left(f_{x_0}(t), f'_{x_0}(t)\right) = 2b\left(f_{x_0}(t), \varphi\left(f_{x_0}(t)\right)\right) = 2b\left(f_{x_0}(t), a\left(f_{x_0}(t)\right) + \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right) \\
&= 2b\left(f_{x_0}(t), a\left(f_{x_0}(t)\right)\right) + 2b\left(\varepsilon\left(f_{x_0}(t), f_{x_0}(t)\right)\right) \\
&= -\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right) \text{ (d'après la question précédente)}.
\end{aligned}$$

18) Puisque b est un produit scalaire, l'application $x \mapsto \sqrt{q(x), q(x)}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, cette norme est équivalente à la norme $\|\ \|$ et il existe donc deux réels strictement positifs γ et δ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\gamma\|x\| \leqslant \sqrt{q(x,x)} \leqslant \delta\|x\|$.

On a déjà pour tout réel t, $-\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 \leqslant -\dfrac{1}{\delta^2} q\left(f_{x_0}(t)\right)$. Ensuite, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right)\right| \leqslant 2\sqrt{q\left(f_{x_0}(t)\right)}\sqrt{q\left(\varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right)}.$$

Pour tout réel positif t, $\varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right) = \varphi\left(f_{x_0}(t)\right) - a\left(f_{x_0}(t)\right) = \varphi\left(f_{x_0}(t)\right) - \varphi(0) - d\varphi_0\left(f_{x_0}(t)\right)$. Puisque φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$,

$$\varepsilon(y) = \varphi(y) - \varphi(0) - d\varphi_0(y) \underset{y\to 0}{=} o(y).$$

Donc, puisque $\sqrt{q}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, il existe $\alpha' > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, si $\sqrt{q(y)} \leqslant \alpha'$, alors $\sqrt{q(\varepsilon(y))} \leqslant \dfrac{1}{4\delta^2}\sqrt{q(y)}$. Soit $\alpha = \alpha'^2 > 0$.

Soit t un réel positif tel que $q\left(f_{x_0}(t)\right) \leqslant \alpha$. Alors, $\sqrt{q\left(f_{x_0}(t)\right)} \leqslant \alpha'$ puis $\sqrt{q\left(\varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right)} \leqslant \dfrac{1}{4\delta^2}\sqrt{q\left(f_{x_0}(t)\right)}$ et donc

$$\begin{aligned}
-\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right) &\leqslant -\frac{1}{\delta^2} q\left(f_{x_0}(t)\right) + \frac{1}{2\delta^2}\left|b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right)\right| \\
&= -\frac{1}{2\delta^2} q\left(f_{x_0}(t)\right).
\end{aligned}$$

Le réel $\beta = \dfrac{1}{2\delta^2} > 0$ convient.

19) Montrons que si $q(f_{x_0}(0)) = q(x_0) < \alpha$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha$.

$\mathscr{E} = \{t \in [0,+\infty[/\ \forall u \in [0,t],\ q(f_{x_0}(u)) \leqslant \alpha\}$ est une partie non vide $[0,+\infty[$ (car $0 \in \mathscr{E}$) et admet donc une borne supérieure T dans $\overline{\mathbb{R}}$. Supposons par l'absurde que $T \in [0,+\infty[$.

Déjà, puisque $q(f_{x_0}(0)) = q(x_0) < \alpha$, par continuité de $q \circ f_{x_0}$ en 0, il existe $t > 0$ tel que pour tout $u \in [0,t]$, $q(f_{x_0}(u)) \leqslant \alpha$. On a alors $T \geqslant t > 0$.

Ensuite, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{E}$, convergente de limite T. Par continuité de $q \circ f_{x_0}$ en T, $q(f_{x_0}(T)) = \lim\limits_{n\to+\infty} q(f_{x_0}(t_n))$ et donc $q(f_{x_0}(T)) \leqslant \alpha$ ou encore $T = \mathrm{Max}(\mathscr{E})$.
Ensuite, pour tout réel $t \in [0,T]$, d'après les deux questions précédentes, $(q\circ f_{x_0})'(t) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)) \leqslant 0$.
Si $q\circ f_{x_0}(T) = 0 < \alpha$, par continuité de $q\circ f_{x_0}$ en T, pour t au voisinage de T à droite, on a $q\circ f_{x_0}(t) \leqslant \alpha$, ce qui contredit la définition de T.
Sinon, $q\circ f_{x_0}(T) > 0$ puis $(q\circ f_{x_0})'(T) < 0$. Par continuité de $(q\circ f_{x_0})'$ en T, $(q\circ f_{x_0})'$ est strictement négative sur un voisinage de T à droite puis $q\circ f_{x_0}$ est décroissante sur un voisinage de T à droite. Mais alors, encore une fois pour t au voisinage de T à droite, on a $q\circ f_{x_0}(t) \leqslant \alpha$, ce qui contredit la définition de T.

Donc, $T = +\infty$ ou encore, $\forall t \in [0,+\infty[$, $q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha$. D'après les deux questions précédentes, on a alors

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ (q\circ f_{x_0})'(t) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On en déduit que pour tout $t \in [0,+\infty[$, $e^{\beta t}(q\circ f_{x_0})'(t) + \beta e^{\beta t} q(f_{x_0}(t)) \leqslant 0$ ou encore, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\left(e^{\beta t} q\circ f_{x_0}\right)'(t) \leqslant 0$. La fonction $t \mapsto e^{\beta t} q(f_{x_0}(t))$ est donc décroissante sur $[0,+\infty[$.
Par suite, pour tout réel $t \in [0,+\infty[$, $e^{\beta t} q(f_{x_0}(t)) \leqslant e^0 q(f_{x_0}(0))$ ou encore $q(f_{x_0}(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0)$.

20) La fonction q est continue en 0 et $q(0) = 0$. Donc, il existe $\widetilde{\alpha} > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in B(0,\widetilde{\alpha})$, $q(x_0) < \alpha$. On a alors pour tout $t \geqslant 0$, $q(f_{x_0}(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0)$ puis $\sqrt{q(f_{x_0}(t))} \leqslant \sqrt{e^{-\beta t} q(x_0)} = e^{-\frac{\beta}{2}t}\sqrt{q(x_0)}$.

Avec les notations du début de la question 18, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\|f_{x_0}(t)\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\sqrt{q(f_{x_0}(t))} \leqslant \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\beta}{2}t}\sqrt{q(x_0)} \leqslant \frac{\delta}{\gamma} e^{-\frac{\beta}{2}t}\|x_0\|.$$

Le nombre $C = \dfrac{\delta}{\gamma} > 0$ convient.

