SESSION 2016

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Un exemple

1) Soit $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$. Alors, $M_{\sigma_0} = J$ et donc J est une matrice de permutation.

En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_J = \det(XI_n - J) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & X & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix}$$
$$= X \times X^{n-1} + (-1)^{n+1} \times (-1) \times (-1)^{n-1} = X^n - 1.$$

Donc, $\mathrm{Sp}(J) = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$. Les valeurs propres de J sont simples et donc J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On note que si n est pair, les valeurs propres réelles de J sont 1 et -1 et sin n est impair, J admet une valeur propre réelle et une seule à savoir 1.

2) Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $\lambda_k = \omega_k$ de sorte que $\mathrm{Sp}(J) = (\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. La valeur propre λ_k est simple et donc le sous-espace propre associé $E_J(\lambda_k)$ est une droite. Soit $C_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$.

$$JC_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \omega_k C_k.$$

Puisque $C_k \neq 0$, C_k est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k.

Une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J est $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1})$ où $C_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$.

3) $C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $m \geqslant 0$. Puisque n est supérieur ou égal à 3, les événements $X_m = k-1$ modulo n et $X_m = k-1$ modulo n sont disjoints. D'après la formule des probabilités totales, pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$,

$$P(X_{m+1}=k)=P(X_{m+1}=k\cap X_m=k-1)+P(X_{m+1}=k\cap X_m=k+1)=\frac{1}{2}P(X_m=k-1)+\frac{1}{2}P(X_m=k+1)$$

puis $P(X_{m+1}=0)=P(X_{m+1}=n-1)=\frac{1}{2}P(X_m=1)+\frac{1}{2}P(X_m=n-1)$.

Donc, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $U_{m+1}=AU_m$ où $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0&1\\1&0&\ddots&\ddots&&0\\0&1&\ddots&&&\\\vdots&\ddots&\ddots&&&\\0&&&&0&1\\1&0&\dots&0&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(J+{}^tJ)$.

D'autre part, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $J^n=I_n$ et donc $J^{-1}=J^{n-1}$. Mais J est une matrice orthogonale (car les vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique) et donc $J^{-1}={}^tJ$. Finalement,

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\left(J+J^{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(J+J^{-1}\right)=\frac{1}{2}(J+{}^tJ).}$$

4) Soit $P=\frac{1}{2}\left(X+X^{n-1}\right)$ de sorte que $A=P(J)$. On sait que

$$\mathrm{Sp}(A)=(P(\lambda_k))_{0\leqslant k\leqslant n-1}=\left(\frac{\lambda_k+\overline{\lambda_k}}{2}\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}=\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}.$$

Pour $0\leqslant n-1$, $0\leqslant\frac{2k\pi}{n}\leqslant\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi$. Donc, $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=1\Leftrightarrow k=0$. D'autre part, puisque n est impair, $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\neq-1$. Finalement, A admet une et une seule valeur propre de module maximum à savoir 1.

C_0 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre 1 de J et donc

$$AC_0=\frac{1}{2}\left(JC_0+J^{n-1}C_0\right)=\frac{1}{2}(C_0+C_0)=C_0.$$

$C_0=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est une vecteur propre de A associé à la valeur propre de module maximum 1 puis $U=\frac{1}{\sqrt{n}}C_0$ est une vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre de module maximum 1.

5) Pour tout entier naturel m, $U_{m+1}=AU_m$ et donc pour tout entier naturel m, $U_m=A^mU_0$.

A est symétrique réelle et donc A est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D=\mathrm{diag}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

Soit $P\in O_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est U telle que $A=PD{}^tP$. Alors, pour tout entier naturel m, $A^m=PD^m{}^tP$.

Puisque n est impair, $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\left|\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right|<1$ et donc $\lim\limits_{m\to+\infty}D^m=\mathrm{diag}(1,0,\dots,0)=\Delta$. L'application $M\mapsto PM{}^tP$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. Donc,

$$\lim_{m\to+\infty}A^m=PD^m{}^tP=P\lim_{m\to+\infty}D^m{}^tP=P\Delta{}^tP.$$

De même, l'application $M\mapsto MU_0$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}$ et donc

$$\lim_{m\to+\infty}(U_m)=\lim_{m\to+\infty}(A^mU_0)=\lim_{m\to+\infty}(A^m)U_0=P\Delta{}^tPU_0.$$

Notons alors que puisque $U_0=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $P\Delta{}^tPU_0$ est la première colonne de la matrice carrée $P\Delta{}^tP$. En calculant en colonnes

$$P\Delta = (U \ \times \ \dots \ \times)\,\mathrm{diag}(1,0\dots,0) = (U\ 0\ \dots\ 0)$$

et donc

$$P\Delta{}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \times & \dots & \times \\ \times & \dots & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots \\ \times & \dots & \dots & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \times & \dots & \times \\ \frac{1}{n} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \times & \dots & \times \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty} U_m = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

B. Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6) • Soient $(A,B)\in(\mathcal{B}_n)^2$ et $\lambda\in[0,1]$. Alors $\lambda A+(1-\lambda)B = (\lambda A_{i,j}+(1-\lambda)B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]$, $\lambda A_{i,j}+(1-\lambda)B_{i,j}\geqslant 0$.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\lambda A_{i,j}+(1-\lambda)B_{i,j}) = \lambda\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}+(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}B_{i,j} = \lambda+1-\lambda = 1$ et

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\lambda A_{j,i}+(1-\lambda)B_{j,i}) = \lambda\sum_{j=1}^{n}A_{j,i}+(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}B_{j,i} = \lambda+1-\lambda = 1$.
Donc, $\mathcal{B}_n$ est convexe.

• Pour tout $A\in\mathcal{B}_n$, $\|A\|_\infty\leqslant 1$ et donc $\mathcal{B}_n$ est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\varphi_{i,j}\ :\ A\mapsto A_{i,j}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, l'ensemble $E_{i,j}=\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ A_{i,j}\geqslant 0\} = \varphi_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

De même, l'application $\psi_i\ :\ A\mapsto\displaystyle\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}$ (resp. $\psi'_i\ :\ A\mapsto\displaystyle\sum_{j=1}^{n}A_{j,i}$) est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc l'ensemble

$F_i = \left\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}=1\right\} = \psi_i^{-1}(\{1\})$ (resp. $F'_i = \left\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}A_{j,i}=1\right\} = \psi_i^{-1}(\{1\})$) est un fermé de

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, $\mathcal{B}_n = \left(\displaystyle\bigcap_{i,j}E_{i,j}\right)\cap\left(\displaystyle\bigcap_{i}F_i\right)\cap\left(\displaystyle\bigcap_{i}F'_i\right)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés.

En résumé, $\mathcal{B}_n$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, $\mathcal{B}_n$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est un compact convexe de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

La matrice J est un élément de $\mathcal{B}_n$ mais $-J$ n'est pas un élément de $\mathcal{B}_n$. Donc $\mathcal{B}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7) • Soit $\sigma\in S_n$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice P_σ est $\delta_{i,\sigma(j)}$.

Ces coefficients sont tous positifs. De plus, pour $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,\sigma(i)} = 1$ et pour $j\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{j,\sigma(j)} = 1$. Donc, $P_\sigma\in\mathcal{B}_n$. On a montré que $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{B}_n$.'

• Soit $(\sigma,\sigma')\in S_n^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de $P_\sigma\times P_{\sigma'}$ est

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$$

et donc $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$. De plus, $P_{Id} = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = I_n$. On en déduit que pour $\sigma \in S_n$, $P_\sigma \times P_{\sigma^{-1}} = I_n$ et donc $P_\sigma \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.
Ainsi, $\mathcal{P}_n \subset GL_n(\mathbb{R})$, $I_n \in \mathcal{P}_n$ et pour $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times (P_{\sigma'})^{-1} = P_{\sigma\circ\sigma'^{-1}} \in \mathcal{P}_n$. Donc,

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}, \times).}$$

• $(\mathcal{P}_n, \times)$ est un groupe fini d'ordre $n!$. On sait que tout élément de $\mathcal{P}_n$ est d'ordre fini. Soit $\sigma \in S_n$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de P_σ. Le polynôme $X^k - 1$ est un polynôme annulateur de P_σ (scindé) à racines simples dans $\mathbb{C}$ et on sait que P_σ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{P}_n \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}.}$$

• Soient $A = E_{1,2} + E_{2,1} + E_{3,3} + \ldots + E_{n,n} = P_{\tau_{1,2}}$ et $B = E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3} + \ldots + E_{n,n} = I_n$. A et B sont deux éléments de $\mathcal{P}_n$.
Mais $\dfrac{1}{2}(A + B) = \dfrac{1}{2}(E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,1} + E_{2,2}) + E_{3,3} + \ldots + E_{n,n}$ n'est pas un élément de $\mathcal{P}_n$ car le coefficient ligne 1, colonne 1, est égal à 1. Donc,

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ n'est pas convexe.}}$$

8) Soit $\sigma \in S_n$. Soient $(A, B) \in \mathcal{B}_n^2$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $P_\sigma = \lambda A + (1 - \lambda)B$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $\lambda A_{i,j} + (1 - \lambda)B_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.
- Supposons $\delta_{i,\sigma(j)} = 0$. Si par l'absurde $A_{i,j} > 0$ ou $B_{i,j} > 0$, alors puisque $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$, on a

$$\lambda A_{i,j} + (1 - \lambda)B_{i,j} > 0 = \delta_{i,\sigma(j)}$$

ce qui n'est pas. Donc, $A_{i,j} = B_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.
- Supposons $\delta_{i,\sigma(j)} = 1$. Si par l'absurde $A_{i,j} < 1$ ou $B_{i,j} < 1$, alors puisque $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$, on a

$$\lambda A_{i,j} + (1 - \lambda)B_{i,j} < \lambda + 1 - \lambda 1 = \delta_{i,\sigma(j)}$$

ce qui n'est pas. Donc, $A_{i,j} = B_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. Ceci montre que nécessairement $A = B = P_\sigma$.

On a montré que

$$\boxed{\text{tout élément de } \mathcal{P}_n \text{ est un point extrémal de } \mathcal{B}_n.}$$

9) (Erreur d'énoncé : au vu de la question suivante, il est essentiel que $r \geqslant 2$) (solution médiocre).

La matrice A n'est pas une matrice de permutation. Donc, il existe $(i_1, j_1) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $A_{i_1,j_1} \in]0, 1[$.
Les coefficients de la ligne i_1 sont positifs et de somme 1. Donc, il existe $j_2 \in [\![1, n]\!]$ tel que $A_{i_1,j_2} \in]0, 1[$.

Les coefficients de la colonne j_2 sont positifs et de somme 1. Donc, il existe $i_2 \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_1\}$ tel que $A_{i_2,j_2} \in]0, 1[$. Si $A_{i_2,j_1} \in]0, 1[$, c'est fini. Sinon, $A_{i_2,j_1} = 0$. Dans ce cas, il existe $j_3 \in [\![1, n]\!] \setminus \{j_1, j_2\}$ tel que $A_{i_2,j_3} \in]0, 1[$.
Si $A_{i_1,j_3} \in]0, 1[$, c'est fini car on a trouvé un « cycle » d'éléments de $]0, 1[$: A_{i_1,j_2} A_{i_1,j_3} A_{i_2,j_3} A_{i_2,j_2} quite à renuméroter.
Sinon, $A_{i_1,j_3} = 0$ et il existe $i_3 \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_1, i_2\}$ tel que $A_{i_3,j_3} \in]0, 1[$. Si $A_{i_3,j_1} \in]0, 1[$, c'est fini. Sinon, $A_{i_3,j_1} = 0$

Supposons avoir construit $i_1, \ldots, i_q$, $(q \geqslant 2)$ deux à deux distincts et $j_1, \ldots, j_q$ deux à deux distincts tels que $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $A_{i_k,j_k} \in]0, 1[$ et $\forall k \in [\![1, q - 1]\!]$, $A_{i_k,j_{k+1}} \in]0, 1[$ et et que le processus ne se soit pas arrêté, on a alors $A_{i_2,j_1} = A_{i_3,j_1} = \ldots = A_{i_q,j_1} = 0$. Ceci est impossible si $q = n - 1$ car dans le cas contraire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{i,j_1} = A_{i_1,j_1} + 0 < 1$. Donc, le processus s'arrête ce qui résout la question.

10) Montrons qu'il existe deux éléments distincts M et N de $\mathcal{B}_n$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que $A = \lambda M + (1 - \lambda)N$.

Soit r le plus petit coefficient strictement positif de la matrice A. Soient $M = A + rB$ et $N = A - rB$.

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
  - Si $a_{i,j} = 0$, alors $a_{i,j} + rb_{i,j} = a_{i,j} - rb_{i,j} = 0$.
  - Si $a_{i,j} > 0$, alors $a_{i,j} + rb_{i,j} \geqslant a_{i,j} - r \geqslant 0$ et $a_{i,j} - rb_{i,j} \geqslant a_{i,j} - r \geqslant 0$.

  Dans tous les cas, $a_{i,j} + rb_{i,j} \geqslant 0$ et $a_{i,j} - rb_{i,j} \geqslant 0$.
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Si i n'est pas l'un des i_k, alors

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j}+rb_{i,j})=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$$

et si il existe $k\in[\![1,r]\!]$ tel que $i=i_k$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j}+rb_{i,j})=\sum_{j\notin\{j_k,j_{k+1}\}}a_{i_k,j}+a_{i_k,j_k}+r+a_{i_k,j_{k+1}}-r=1+r-r=1.$$

De même, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}=1$.

- $A=\lambda M+(1-\lambda)N$ avec $\lambda=\dfrac{1}{2}\in]0,1[$.

Ainsi, M et N sont deux éléments distincts de $\mathcal{B}_n$ tel que $A=\dfrac{1}{2}M+\dfrac{1}{2}N$ avec $M\neq A$ et (ou) $N\neq A$. On a montré que A n'est pas un point extrémal et finalement que

$$\boxed{\text{les points extrémaux du convexe } \mathcal{B}_n \text{ sont les matrices de permutation.}}$$

11) Supposons par l'absurde qu'il existe $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$ et une matrice B extraite de A à p lignes et q colonnes avec $p+q=n+1$ et $B=0$. On peut supposer sans perte de généralité que $B=(A_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q}$.

Par construction, $\forall i\in[\![1,p]\!]$,

$$\sum_{j=q+1}^{n}A_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}=1.$$

Mais alors, en commençant par additionner les p premières lignes de A,

$$\begin{aligned}p=\sum_{i=1}^{p}1&=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=q+1}^{n}A_{i,j}\right)=\sum_{j=q+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p}A_{i,j}\right)\\&=\sum_{j=q+1}^{n}\left(1-\sum_{i=p+1}^{n}A_{i,j}\right)\\&\leqslant\sum_{j=q+1}^{n}1\ (\text{car }\forall i,j,\ A_{i,j}\geqslant 0)\\&=n-q,\end{aligned}$$

et donc $p+q\leqslant n$ ce qui est une contradiction. Donc, toute matrice extraite de A de format (p,q) avec $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$ et $p+q=n+1$, est nulle. D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\boxed{A \text{ admet un chemin strictement positif.}}$$

12) • Si $\lambda_0=1$, alors $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $A_{\sigma(j),j}=1$. Mais alors, pour $j\in[\![1,n]\!]$ et $i\neq\sigma(j)$, $A_{i,j}=0$. Finalement, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $A_{i,j}=\delta_{i\sigma(j)}$ et A est la matrice de permutation P_σ. Ceci est une contradiction et donc $\lambda_0\in[0,1[$ (et même $]0,1[$). Donc, la matrice A_0 est bien définie. Posons $A_0=(\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

- Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Alors, $\alpha_{i,j}=\dfrac{A_{i,j}-\lambda_0\delta_{i,\sigma(j)}}{1-\lambda_0}$.

Si $i\neq\sigma(j)$, alors $\alpha_{i,j}=\dfrac{A_{i,j}}{1-\lambda_0}\geqslant 0$. Si $i=\sigma(j)$, alors $\alpha_{i,j}=\dfrac{A_{\sigma(j),j}-\lambda_0}{1-\lambda_0}\geqslant 0$ par définition de λ_0.

- Soit $j\in[\![1,n]\!]$.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,j}=\sum_{i\neq\sigma(j)}\frac{A_{i,j}}{1-\lambda_0}+\frac{A_{\sigma(j),j}-\lambda_0}{1-\lambda_0}=\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}A_{i,j}\right)-\lambda_0}{1-\lambda_0}=\frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_0}=1.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = \sum_{j \neq \sigma^{-1}(i)} \frac{A_{i,j}}{1-\lambda_0} + \frac{A_{i,\sigma^{-1}(i)} - \lambda_0}{1-\lambda_0} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\right) - \lambda_0}{1-\lambda_0} = \frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_0} = 1.$$

• Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$tel que $A_{i,j} = 0$, on a nécessairement $i \neq \sigma(j)$ (car tous les $A_{\sigma(j),j}$ sont strictement positifs) et donc $\alpha_{i,j} = 0$. Ainsi, les coefficients nuls dans A restent nuls dans A_0.
Soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$ un numéro tel que $\lambda_0 = A_{\sigma(j_0),j_0}$. Alors,

$$\alpha_{\sigma(j_0),j_0} = \frac{A_{\sigma(j_0),j_0} - A_{\sigma(j_0),j_0}}{1-\lambda_0} = 0$$

et donc, A_0 a au moins un élément nul de plus que A.

13) La question 13 permet d'écrire A sous la forme $A = \lambda_0 M_0 + \lambda'_1 A_0$ où M_0 est une matrice de permutation, λ_0 et λ'_1 sont deux réels de $]0,1[$ tels que $\lambda_0 + \lambda'_1 = 1$ et A_0 est une matrice bistochastique qui a au moins un coefficient nul de plus que la matrice A.

Si A_0 est une matrice de permutation, c'est fini. Sinon, A_0 est une matrice bistochastique et donc peut s'écrire $A_0 = \lambda'_1 M_1 + \lambda'_2 A_1$ où M_1 est une matrice de permutation, A_1 est une matrice bistochastique qui a au moins deux coefficients nuls de plus que la matrice A et λ'_1 et λ'_2 sont deux réels strictement positifs de somme 1. Ceci fournit

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \lambda'_2 A_1$$

où λ_0, λ_1 et λ'_2 sont trois réels strictement positifs de somme 1. Plus généralement, par récurrence, A peut s'écrire sous la forme

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_{k-1} M_{k-1} + \lambda'_k A_{k-1},\ k \geqslant 1$$

où les M_i sont des matrices de permutations, les λ sont des réels strictement positifs de somme 1 et A_{k-1} est une matrice bistochastique qui a au moins k coefficients nuls de plus que la matrice A et ce processus ($A_k = \lambda''_k M_k + \lambda''_{k+1} A_k$) se poursuit tant que la matrice A_{k-1} est une matrice bistochastique qui n'est pas une matrice de permutation. Ce processus s'arrête nécessairement avant n^2 étapes car sinon $A_{n^2-1} = 0$ ce qui est impossible.

Soit s l'instant d'arrêt, la matrice A_{s-1} est nécessairement une matrice de permutation M_s et on a écrit A sous la forme

$$A = \lambda_0 M_0 + \ldots + \lambda_s M_s,$$

où $s \geqslant 1$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_s$ sont $s+1$ réels strictement positifs de somme 1 et $M_0, \ldots, M_s$ sont des matrices de permutations.

Remarque. $\mathcal{B}_n$ est donc l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}_n$ et les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ sont les éléments de $\mathcal{P}_n$.

14) φ est une forme linéaire sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. On sait que φ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (pour tout choix d'une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

$\mathcal{B}_n$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après la question 7 et donc φ admet un minimum sur $\mathcal{B}_n$. $\mathcal{P}_n$ est également un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{P}_n$ est un sous-ensemble fini de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, φ admet un minimum sur $\mathcal{P}_n$ atteint en une certaine matrice P de $\mathcal{P}_n$.

$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ d'après la question 7 et donc

$$\operatorname*{Inf}_{\mathcal{B}_n} \varphi \leqslant \operatorname*{Inf}_{\mathcal{P}_n} \varphi = \operatorname*{Min}_{\mathcal{P}_n} \varphi = \varphi(P).$$

Inversement, soit $A \in \mathcal{B}_n$. Si $A \in \mathcal{P}_n$, alors $\varphi(A) \geqslant \varphi(P)$.
Si $A \notin \mathcal{P}_n$, d'après la question 13, il existe $s \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant s} \in]0,1[^s$ et $M_0, \ldots, M_s$ des matrices de permutations telles que $A = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i M_i$ et $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \varphi(M_i) \\ &\geqslant \left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i\right) \varphi(P) \text{ (car les } \lambda_i \text{ sont positifs)} \\ &= \varphi(P).\end{aligned}$$

En résumé, pour tout $A \in \mathcal{B}_n$, $\varphi(A) \geqslant \varphi(P)$ avec égalité effectivement obtenue pour $A = P \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$. On a montré que $\underset{\mathcal{B}_n}{\text{Inf}}\ \varphi$ existe dans $\mathbb{R}$ et est atteint en une matrice de permutation.

C. Inégalité de Hoffman-Wielandt

15) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(P, Q) \in (O_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}\|PAQ\|^2 &= \text{Tr}\left({}^tQ{}^tA{}^tPPAQ\right) = \text{Tr}\left({}^tQ{}^tAAQ\right) \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R})) \\ &= \text{Tr}\left({}^tAA\right) \text{ (car } {}^tQ = Q^{-1} \text{ et car deux matrices semblables ont même trace)} \\ &= \|A\|^2,\end{aligned}$$

et donc $\|PAQ\| = \|A\|$.

16) Les matrices A et B sont symétriques réelles et donc orthogonalement semblables à une matrice diagonale réelle. Soient $(P_A, P_B) \in (O_n(\mathbb{R}))^2$ et $(D_A, D_B) \in (\mathscr{D}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $A = P_A D_A {}^tP_A$ et $B = P_B D_B {}^tP_B$.

$$\begin{aligned}\|A - B\|^2 &= \left\|P_A D_A {}^tP_A - P_B D_B {}^tP_B\right\| \\ &= \left\|{}^tP_A \left(P_A D_A {}^tP_A - P_B D_B {}^tP_B\right) P_B\right\| \text{ (d'après la question 15)} \\ &= \left\|D_A {}^tP_A P_B - {}^tP_A P_B D_B\right\| \\ &= \|D_A P - P D_B\| \text{ (en posant } P = {}^tP_A P_B \in O_n(\mathbb{R})).\end{aligned}$$

17) • Les coefficients de la matrice R sont positifs. En notant $C_1, \ldots, C_n$ (resp. $L_1, \ldots, L_n$) les colonnes (resp. les lignes) de la matrice P, on a

$$\text{pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} R_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (P_{i,j})^2 = \|L_i\|^2 = 1,$$

et

$$\text{pour tout } j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} R_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (P_{i,j})^2 = \|C_j\|^2 = 1.$$

Donc, la matrice R est bistochastique.

• On sait que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}$,

$$\|M\|^2 = \text{Tr}\left({}^tMM\right) = \sum_{i,j} M_{i,j}^2.$$

Posons $D_A = \text{diag}\left(\lambda_i(A)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $D_B = \text{diag}\left(\lambda_i(B)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

$$\begin{aligned}\|A - B\|^2 &= \|D_A P - P D_B\|^2 \\ &= \left\|\left((\lambda_i(A) - \lambda_j(B))P_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right\|^2 \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left((\lambda_i(A) - \lambda_j(B))P_{i,j}\right)^2 \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} R_{i,j} \left(\lambda_i(A) - \lambda_j(B)\right)^2.\end{aligned}$$

18) Pour $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi(M) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\lambda_i(A) - \lambda_j(B)\right)^2 M_{i,j},$$

de sorte que $\|A - B\|^2 = \varphi(R)$ (avec $R \in \mathcal{B}_n$). φ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 14, φ admet un minimum sur $\mathcal{B}_n$ atteint en une certaine matrice P_{σ_0} de $\mathcal{P}_n$.

$$\begin{aligned}\|A-B\|^2 &= \varphi(R)\\ &\geqslant \varphi\left(P_{\sigma_0}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (\lambda_i(A)-\lambda_j(B))^2\,\delta_{i,\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{\sigma_0(j)}(A)-\lambda_j(B)\right)^2\\ &\geqslant \underset{\sigma\in S_n}{\mathrm{Min}} \sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{\sigma(j)}(A)-\lambda_j(B)\right)^2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (A,B)\in (S_n)^2,\ \underset{\sigma\in S_n}{\mathrm{Min}} \sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{\sigma(j)}(A)-\lambda_j(B)\right)^2 \leqslant \|A-B\|^2.}$$

19) Soient X et Y deux éléments de V telles que X suit P_1 et Y suit P_2. $X(\Omega)=\{a_1,\dots,a_n\}$ et $Y(\Omega)=\{b_1,\dots,b_n\}$ et de plus, $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]$, $P\left(X=a_i\right)=P\left(Y=b_j\right)=\dfrac{1}{n}$. Ensuite, $|X-Y|^2(\Omega)=\left\{|a_i-b_j|^2,\ (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\right\}$. D'après le théorème de transfert,

$$E\left(|X-Y|^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}\,|a_i-b_j|^2 \text{ où } p_{i,j} = P\left(X=a_i\cap Y=b_j\right).$$

Soit R la matrice dont le coefficient général ligne i, colonne j, est $R_{i,j}=np_{i,j}$. R est à coefficients positifs et de plus, pour $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} R_{i,j} = n\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = nP\left(X=a_i\right) = n\times\frac{1}{n} = 1,$$

et pour $j\in[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n} R_{i,j} = n\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = nP\left(Y=b_j\right) = n\times\frac{1}{n} = 1.$$

Donc, $R\in\mathcal{B}_n$. D'après la question 18,

$$nE\left(|X-Y|^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} R_{i,j}\,|a_i-b_j| \geqslant \underset{\sigma\in S_n}{\mathrm{Min}} \sum_{j=1}^{n}\left(a_{\sigma(j)}-b_j\right)^2.$$

Soit $\sigma\in S_n$. En réordonnant, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{\sigma(j)}-b_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_j + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_j + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2$$

et donc,

$$nE\left(|X-Y|^2\right) \geqslant \underset{\sigma\in S_n}{\mathrm{Min}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_j + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2\right).$$

En réordonnant encore, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_j = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(\sigma'(j))}b_{(j)}$ où σ' est la permutation telle que pour tout j, « $\sigma'(j)=(j)$ ». Maintenant, σ décrit S_n si et seulement si $\sigma\circ\sigma'$ décrit S_n et finalement

$$nE\left(|X-Y|^2\right) \geqslant \underset{\sigma\in S_n}{\mathrm{Min}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_{(j)} + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2\right).$$

Montrons alors que pour tout $\sigma\in S_n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_{(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{(j)}b_{(j)}$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $\left(\left(a_1,\dots,a_n\right),\left(b_1,\dots,b_n\right)\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^2$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j b_{(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{(j)}b_{(j)}$, ce que l'on fait par récurrence sur n.

- Soit $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$. $a_1 b_{(1)} = a_{(1)} b_{(1)}$ et donc la propriété est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat acquis pour l'entier n. Soit $((a_1, \dots, a_{n+1}), (b_1, \dots, b_{n+1})) \in \left(\mathbb{R}^{n+1}\right)^2$
  - Si $a_{n+1} = a_{(n+1)}$, Alors, par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j b_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{(j)} + a_{(n+1)} b_{(n+1)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{(j)} b_{(j)} + a_{(n+1)} b_{(n+1)} \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} a_{(j)} b_{(j)}.$$

  - Sinon, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i = a_{(n+1)}$.

$$\left(a_i b_{(n+1)} + a_{n+1} b_{(i)}\right) - \left(a_i b_{(i)} + a_{n+1} b_{(n+1)}\right) = (a_i - a_{n+1})\left(b_{(n+1)} - b_{(i)}\right) \geqslant 0.$$

Par suite, en posant $a'_j = a_j$ pour $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ et $a'_i = a_{n+1}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} a_j b_{(j)} &= \sum_{j \notin \{i, n+1\}} a_j b_{(j)} + a_i b_{(i)} + a_{n+1} b_{(n+1)} \\
&\leqslant \sum_{j \notin \{i, n+1\}} a_j b_{(j)} + a_{n+1} b_{(i)} + a_{(n+1)} b_{(n+1)} \text{ (d'après ce qui précède)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a'_j b_{(j)} + a_{(n+1)} b_{(n+1)} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} a'_{(j)} b_{(j)} + a_{(n+1)} b_{(n+1)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_{(j)} b_{(j)}.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence et donc

$$\begin{aligned}
nE\left(|X - Y|^2\right) &\geqslant \operatorname*{Min}_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)} b_{(j)} + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{(j)} b_{(j)} + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left|a_{(i)} - b_{(i)}\right|^2.
\end{aligned}$$

On a montré que pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires suivant P_1 et P_2 respectivement, $E\left(|X - Y|^2\right) \geqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|a_{(i)} - b_{(i)}\right|^2$.

D'autre part, si on choisit les variables X et Y suivant respectivement les lois P_1 et P_2 telles que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!],\ p_{i,j} = \frac{\delta_{i,j}}{n},$$

(qui est bien une loi de couple) on a $E\left(|X - Y|^2\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|a_{(i)} - b_{(i)}\right|^2$. Donc, la borne inférieure cherchée est un minimum, égal à $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|a_{(i)} - b_{(i)}\right|^2$.

Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $\mathrm{Sp}(A) = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{b_1, \dots, b_n\}$. Il s'agit de montrer que $\|A - B\|^2 \geqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|a_{(i)} - b_{(j)}\right|^2$ (ce qui est une amélioration du résultat de la question 18 et ne peut donc être déduit de la question 18 et de ce qui précède).

On reprend la matrice R de la question 17 et on considère deux variables aléatoires X et Y suivant P_1 et P_2 respectivement telles que pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \dfrac{R_{i,j}}{n}$ (il s'agit bien d'une loi de couple car R est bistochastique). Alors

$$d^2(P_1, P_2) \leqslant E\left(|X - Y|^2\right) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{R_{i,j}}{n} |a_i - b_j| = \frac{1}{n} \|A - B\|^2$$

et donc $nd^2(P_1, P_2) \leqslant \|A - B\|^2$.

