SESSION 2015

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Norme d'opérateur d'une matrice

1) Pour tout x de S^{n-1}, $\|x\| = 1$. Donc, S^{n-1} est borné. On sait que l'application $N: \begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n, \|\ \|) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & \|x\|\end{array}$ est continue. Puisque $S^{n-1} = N^{-1}(\{1\})$, S^{n-1} est un fermé de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

S^{n-1} est un fermé, borné de $\mathbb{R}^n$ et donc un compact de $\mathbb{R}^n$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $x \mapsto Mx$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie. Donc, l'application $x \mapsto Mx$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Puisque l'application $y \mapsto \|y\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto \|Mx\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait alors que l'application $x \mapsto \|Mx\|$ admet un maximum sur le compact S^{n-1}. On en déduit l'existence de $\|M\|_{op}$.

2) • $\|\ \|_{op}$ est une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_{op} \geqslant 0$.

• Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\|_{op} = 0$. Pour tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{\|x\|}x \in S^{n-1}$ et donc $\left\|M\left(\dfrac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \leqslant \|M\|_{op} = 0$ puis $\dfrac{1}{\|x\|}\|Mx\| = 0$ et donc $Mx = 0$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $Mx = 0$ et donc $M = 0$.

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|Mx_0\|$. Alors, pour tout x de S^{n-1}, $\|\lambda Mx\| = |\lambda|\|Mx\| \leqslant |\lambda|\|Mx_0\|$ avec égalité effectivement obtenue pour $x = x_0$. Donc $\|\lambda M\|_{op} = \lambda|\|Mx_0\| = |\lambda|\|M\|_{op}$.

• Soit $(M, N) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Soit $x_0 \in S^{n-1}$ tel que $\|M+N\|_{op} = \|(M+N)x_0\|$.

$$\|M+N\|_{op} = \|(M+N)x_0\| \leqslant \|Mx_0\| + \|Nx_0\| \leqslant \|M\|_{op} + \|N\|_{op}.$$

On a montré que $\|\ \|_{op}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$. Alors, $\dfrac{1}{\|x-y\|}(x-y) \in S^{n-1}$ et donc

$$\frac{\|Mx - My\|}{\|x-y\|} = \left\|M\left(\frac{1}{\|x-y\|}(x-y)\right)\right\| \leqslant \|M\|_{op}$$

puis $\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{op}\|x-y\|$, ce qui reste vrai quand $x = y$.

3) Soit $D = \text{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in S^{n-1}$,

$$\|Dx\| = \|(\lambda_i x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \text{Max}\{|\lambda_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \text{Max}\{|\lambda_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

avec égalité effectivement obtenue si $x = e_{i_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in S^{n-1}$ où i_0 est un indice tel que $\text{Max}\{|\lambda_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = |\lambda_{i_0}|$. Donc, $\|D\|_{op} = \text{Max}\{|\lambda_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Soit $S \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}$. D'après le théorème spectral, il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD^tP$. Pour $x \in S^{n-1}$, puisque P est une matrice orthogonale,

$$\|Mx\| = \|PD^tPx\| = \|D\left({}^tPx\right)\|.$$

Puisque ${}^tP$ est une matrice orthogonale, x décrit S^{n-1} si et seulement si ${}^tPx$ décrit S^{n-1} et donc

$$\begin{aligned}\|M\|_{op} &= \text{Max}\{\|Mx\|,\ x \in S^{n-1}\} = \text{Max}\{\|D\left({}^tPx\right)\|,\ x \in S^{n-1}\} = \text{Max}\{\|Dx'\|,\ x' \in S^{n-1}\} \\ &= \|D\|_{op} = \text{Max}\{|\lambda|\ \lambda \in \sigma(D)\} = \text{Max}\{|\lambda|\ \lambda \in \sigma(M)\}.\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

4) Si $n = 1$, $J_1 = (1) = I_1$ admet 1 pour valeur propre simple. Le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}^1$.
Supposons $n \geqslant 2$. $\mathrm{rg}\,(J_n) = 1$ ou encore $\mathrm{Ker}\,(J_n - I_n)$ est de dimension $n-1$. J_n admet donc 0 pour valeur propre d'ordre $n-1$ au moins. La dernière valeur propre λ de J_n est fournie par la trace de J_n :

$$0 + \ldots + 0 + \lambda = \mathrm{Tr}\,(J_n) = n,$$

et donc $\lambda = n$. Ainsi, $\mathrm{Sp}\,(J_n) = (0, \ldots, 0, n)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre n est la droite d'équations $x_1 = \ldots = x_n$.

J_n est symétrique. D'après la question 3), $\|J_n\|_{\mathrm{op}} = \mathrm{Max}\{|0|, |n|\} = n$.

5) Soit $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $|M_{i_0,j_0}| = \mathrm{Max}\{|M_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$. Soit $x = e_{j_0} \in S^{n-1}$ le j_0-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque la base canonique est orthonormée,

$$\|M\|_{\mathrm{op}} \geqslant \|Mx\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} M_{i,j_0} e_i\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_{i,j_0}^2} \geqslant \sqrt{M_{i_0,j_0}^2} = |M_{i_0,j_0}| = \mathrm{Max}\{|M_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}.$$

6) Soit $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{\mathrm{op}} = \|Mx\|$.

$$\begin{aligned}
\|M\|_{\mathrm{op}} = \|Mx\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} x_j\right) e_i\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} x_j\right)^2} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)} \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)} = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (M_{i,j})^2}.
\end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement il existe un vecteur unitaire x tel que chaque inégalité de Cauchy-Schwarz soit une égalité ou encore si et seulement il existe un vecteur unitaire x tel que chaque ligne de M soit colinéaire à x ce qui équivaut à $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$.

$$\|M\|_{\mathrm{op}} < \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (M_{i,j})^2} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M) \leqslant 1.$$

7) Soit $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in S^{n-1}$ tel que $\|Mx\| = \|M\|_{\mathrm{op}}$.

$$\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (M_{i,j})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |M_{i,j}|} \leqslant \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1} = \sqrt{n^2} = n$$

On a l'égalité si et seulement chaque inégalité écrite est une égalité c'est-à-dire si et seulement si chaque $M_{i,j}$ est dans $\{-1, 1\}$ et M est de rang 1.
Il y a 2^n possibilités pour la première colonne d'une telle matrice et pour chacune de ces possibilités, il y a $2 \times \ldots \times 2 = 2^{n-1}$ possibilités pour les autres colonnes ($C_2 = \pm C_1, \ldots, C_n = \pm C_1$). Au total, il y a $2^n \times 2^{n-1} = 2^{2n-1}$ matrices M telles que $\|M\|_{\mathrm{op}} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2n)! = (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 \geqslant (2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2 = 2^n n!,$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$ et donc, pour tout réel t,

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}.$$

9) Soient $x \in [-1, 1]$ et $t \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Puisque $\dfrac{1+x}{2} + \dfrac{1-x}{2} = 1$ avec $\dfrac{1+x}{2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1-x}{2} \geqslant 0$,

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$\frac{1+x}{2}e^{t}+\frac{1-x}{2}e^{-t}\geqslant \exp\left(\frac{1+x}{2}t+\frac{1-x}{2}(-t)\right)=e^{tx}.$$

10) Soit X une variable centrée et bornée par 1. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
E\left(\exp(tX)\right) &= \sum_{x\in X(\Omega)} e^{tx}P(X=x) \text{ (d'après un théorème de transfert)}\\
&\leqslant e^{t}\sum_{x\in X(\Omega)}\frac{1+x}{2}P(X=x)+e^{-t}\sum_{x\in X(\Omega)}\frac{1-x}{2}P(X=x) \text{ (car } X(\Omega)\subset[-1,1] \text{ et d'après 9))}\\
&= \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)+\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x)\\
&= \mathrm{ch}(t)\times 1+\mathrm{sh}(t)\times E(X)\\
&= \mathrm{ch}(t) \text{ (puisque } X \text{ est centrée)}\\
&\leqslant e^{t^2/2} \text{ (d'après 8)}.
\end{aligned}$$

Donc, une variable X centrée et bornée par 1 est 1-sous-gaussienne.

Soit X une variable centrée et bornée par $\alpha>0$. Alors $\dfrac{X}{\alpha}$ est centrée et bornée par 1. Donc, pour tout réel t,

$$E\left(\exp(tX/\alpha)\right)\leqslant e^{t^2/2}.$$

Soit t' un réel puis $t=\alpha t'$. $E\left(\exp(t'X)\right)=E\left(\exp(tX/\alpha)\right)\leqslant e^{t^2/2}=e^{\alpha^2 r'^2/2}$. Donc, ne variable X centrée et bornée par $\alpha>0$ est α-sous-gaussienne.

11) Puisque les variables X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, on sait que les variables $e^{\mu_1X_1}$, ..., $e^{\mu_nX_n}$ sont mutuellement indépendantes et donc que

$$E\left(\exp\left(t\left(\mu_1X_1+\ldots+\mu_nX_n\right)\right)\right)=\prod_{i=1}^{N}E\left(\exp(t\mu_iX_i)\right)\leqslant\prod_{i=1}^{N}e^{\frac{\alpha^2\mu_i^2t^2}{2}}=e^{\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2\right)\frac{\alpha^2t^2}{2}}=e^{\frac{\alpha^2t^2}{2}}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mu_iX_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soient $\lambda>0$ et $t>0$. $X\geqslant\lambda\geqslant tX\geqslant t\lambda\Leftrightarrow e^{tX}\geqslant e^{t\lambda}$. Puisque $e^{t\lambda}>0$, l'inégalité de Markov permet d'affirmer que

$$P(X\geqslant\lambda)=P\left(e^{tX}\geqslant e^{t\lambda}\right)\leqslant\frac{E\left(e^{tX}\right)}{e^{t\lambda}}\leqslant\frac{e^{\frac{\alpha^2t^2}{2}}}{e^{t\lambda}}=\exp\left(\frac{\alpha^2t^2}{2}-t\lambda\right).$$

Pour $t=\dfrac{\lambda}{\alpha^2}>0$ (on note que $\dfrac{\alpha^2t^2}{2}-t\lambda$ est minimum pour $t=\dfrac{\lambda}{\alpha^2}$), on obtient en particulier

$$P(X\geqslant\lambda)\leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{\alpha^2}}.$$

D'après la question 11) appliquée avec $n=1$ et $\mu_1=-1$, la variable $-X$ est également α-sous-gaussienne. D'après ce qui précède,

$$P(-X\geqslant\lambda)\leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{\alpha^2}}.$$

On en déduit que

$$P(|X|\geqslant\lambda)=P(X\leqslant-\lambda)+P(X\geqslant\lambda)=P(-X\geqslant\lambda)+P(X\geqslant\lambda)\leqslant 2e^{-\frac{\lambda^2}{\alpha^2}}.$$

13) Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $E(X)$ existe et est élément de $[0,+\infty]$.

Notons $[X]$ la partie entière de X. On a $[X]\leqslant X\leqslant[X]+1$. Par croissance de l'espérance, on a $E([X])\leqslant E(X)\leqslant E([X]+1)=1+E([X])$. Par suite, d'après le résultat admis par l'énoncé,

$$E(X)<+\infty\Leftrightarrow E([X])<+\infty\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}P([X]\geqslant k)<+\infty.$$

Ensuite, pour tout entier naturel non nul k, $[X]\geqslant k\Leftrightarrow X\geqslant k$ et donc $P([X]\geqslant k)=P(X\geqslant k)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geqslant k) < +\infty$ et finalement,

$$E(X) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) < +\infty.$$

Supposons X d'espérance finie. $E([X]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$ et l'encadrement $E([X]) \leqslant E(X) \leqslant 1+E([X])$ fournit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant E(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

14) Soit k un entier naturel non nul. D'après la question 12),

$$\begin{aligned} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right) \geqslant k\right) &= P\left(|X| \geqslant \frac{\sqrt{2\ln k}}{\beta}\right) \\ &\leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\sqrt{2\ln k}}{\beta}\right)^2\right) = 2\exp\left(-\frac{\ln k}{\alpha^2\beta^2}\right) = \frac{2}{k^\eta} \text{ où } \eta = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}. \end{aligned}$$

Si $\alpha\beta < 1$, alors $\eta = \dfrac{1}{(\alpha\beta)^2} > 1$ et donc la série de terme général $\dfrac{2}{k^\eta}$, $k \geqslant 1$, converge. Puisque $\exp\left(\dfrac{\beta^2X^2}{2}\right)$ est une variable à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $\exp\left(\dfrac{\beta^2X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie et

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\right) \leqslant 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\eta} = 1 + 2\zeta(\eta).$$

C. Recouvrement de la sphère

15) On a bien sûr $K = \displaystyle\bigcup_{a\in K}\{a\} \subset \bigcup_{a\in K} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$. Donc si K est fini, le résultat est immédiat.

Dorénavant, K est infini. Supposons par l'absurde que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout n-uplet $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ d'éléments de K, on a $K \not\subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} B_{a_k,\frac{\varepsilon}{2}}$. Soit a_1 un élément de K.

- $K \not\subset B_{a_1,\frac{\varepsilon}{2}}$. Donc, il existe $a_2 \in K \setminus B_{a_1,\frac{\varepsilon}{2}}$.

- Soit $p \geqslant 2$. Supposons avoir construit des éléments $a_2, \ldots, a_p$ de K tels que $\forall k \in [\![2, p]\!]$, $a_k \in K \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k-1} B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}$.

$K \not\subset \bigcup_{k=1}^{p} B_{a_k,\frac{\varepsilon}{2}}$. Donc, il existe $a_{p+1} \in K \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} B_{a_k,\frac{\varepsilon}{2}}$.

On a construit par récurrence une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de K telle que $\forall p \geqslant 2$, $a_p \in K \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p-1} B_{a_k,\frac{\varepsilon}{2}}$.

Puisque K est bornée, la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Puisque $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer qu'on extraire de la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite $\left(a_{\varphi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K convergeant vers un élément a de $\mathbb{R}^n$. Puisque K est fermée, $a \in K$.

On peut alors choisir $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant p_0 \Rightarrow \left|a_{\varphi(p)} - a\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$. En particulier,

$$\left|a_{\varphi(p_0+1)} - a_{\varphi(p_0)}\right| \leqslant \left|a_{\varphi(p_0+1)} - a\right| + \left|a - a_{\varphi(p_0)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $\varphi(p_0+1) > \varphi(p_0)$, on en déduit que

$$a_{\varphi(p_0+1)} \in B_{a_{\varphi(p_0)},\frac{\varepsilon}{2}} \subset \bigcup_{k=1}^{\varphi(p_0+1)-1} B_{a_k,\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ceci est une contraction et donc il existe un sous-ensemble fini A de K tel que $K \subset \displaystyle\bigcup_{a\in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

16) Notons p le cardinal d'une partie non vide et finie A de K telle que $K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$. On note que pour $a \in A$ et $(x,y) \in B^2_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$, on a

$$\|x - y\| \leqslant \|x - a\| + \|a - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Supposons $\operatorname{card}(\Lambda) \geqslant p + 1$. Soient $x_1, \ldots, x_{p+1}$ $p+1$ éléments deux à deux distincts de Λ. Puisque K est contenue dans une réunion de p boules, deux au moins des x_i appartiennent à une même boule $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ (principe des tiroirs). Mais alors, d'après la remarque préliminaire, la distance entre ces deux éléments de Λ est inférieur ou égale à ε ce qui est une contradiction. Donc, $\operatorname{card}(\Lambda) \leqslant p = \operatorname{card}(A) < +\infty$.

Supposons de plus que Λ est de cardinal maximal et que par l'absurde, $K \not\subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$. Soit $b \in K \setminus \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$. Alors, $\forall a \in A$, $\|b - a\| > \varepsilon$ et donc $\Lambda' = \Lambda \cup \{x\}$ est un sous-ensemble de K tel que $\forall (x,y) \in (\Lambda')^2$, $\|x - y\| > \varepsilon$ ce qui contredit le caractère maximal de Λ. Donc, $K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$.

17) Soient $a \in \Lambda$ puis $x \in B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$.

$$\|x\| \leqslant \|x - a\| + \|a\| = 1 + \|x - a\| \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, $\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$. On en déduit que

$$\mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) \leqslant \mu\left(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \left(\frac{2+\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Puisque pour tout $(x,y) \in \Lambda^2$ tel que $x \neq y$, on a $\|x - y\| > \varepsilon$, les boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$, $a \in \Lambda$, sont deux à deux disjointes et donc, en posant $m = \operatorname{card}(\Lambda)$,

$$\mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \sum_{a \in \Lambda}^{\mu} \left(B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) = m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

On en déduit que

$$\operatorname{card}(\Lambda) = m \leqslant \frac{\left(\dfrac{2+\varepsilon}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^n} = \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n.$$

18) S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$. Donc, d'après la question 15) appliquée avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe une partie finie A de S^{n-1} telle que $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{1}{4}}$. Puisque le diamètre de S^{n-1} est 2, on peut trouver au moins deux éléments x et y de S^{n-1} tels que $\|x - y\| > \frac{1}{2}$. Donc, il existe au moins une partie Λ de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x - y\| > \varepsilon$. D'après la question 16), toute partie Λ de ce type est finie et est telle que $\operatorname{card}(\Lambda) \leqslant \operatorname{card}(A)$. Soit alors Λ_n une telle partie de cardinal maximum. D'après la question 16), $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$. Enfin, d'après la question 17), le cardinal de Λ_n est inférieur ou égal à $\left(\dfrac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n = 5^n$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

19) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $y_i = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^{(n)} x_j$. Les variables aléatoires $M_{i,j}^{(n)}$ sont mutuellement indépendantes et sont α-sous-gaussiennes. Puisque $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$, la variable y_i est α-sous-gaussienne d'après la question 11).

Les variables $M_{i,j}^{(n)}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes. D'après le lemme des coalitions, les variables y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes. Il en est de même des variables $e^{\gamma y_i^2}$. Donc,

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(\exp\left(\gamma\|y\|^2\right)\right) &= \mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\gamma y_i^2}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left(\exp\left(\frac{y_i^2}{4\alpha^2}\right)\right) \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{n} 5 \text{ (d'après l'inégalité d'Orlicz)} \\
&= 5^n.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Markov,

$$\mathsf{P}\left(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}\right) = \mathsf{P}\left(\exp\left(\gamma\|y\|^2\right) \geqslant e^{\gamma n r^2}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}\left(\exp\left(\gamma\|y\|^2\right)\right)}{e^{\gamma n r^2}} = \frac{5^n}{e^{\gamma n r^2}} = \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n.$$

20) Soit $r > 0$. Soit $x \in S^{n-1}$ tel que $\left\|M^{(n)}x\right\| = \left\|M^{(n)}\right\|_{op}$. Il existe $a \in \Lambda_n$ tel que $\|x - a\| \leqslant \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\left\|M^{(n)}\right\|_{op} &= \left\|M^{(n)}x\right\| =\leqslant \left\|M^{(n)}a\right\| + \left\|M^{(n)}(x-a)\right\| \\
&\leqslant \left\|M^{(n)}a\right\| + \left\|M^{(n)}\right\|_{op} \|x - a\| \text{ (d'après la question 2)} \\
&\leqslant \left\|M^{(n)}a\right\| + \frac{1}{2}\left\|M^{(n)}\right\|_{op}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\left\|M^{(n)}a\right\| \geqslant \frac{1}{2}\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geqslant r\sqrt{n}$. On a ainsi trouvé un élément a de Λ_n tel que $\left\|M^{(n)}a\right\| \geqslant r\sqrt{n}$.

Ainsi, l'événement $\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geqslant 2r\sqrt{n}$ implique l'événement $\bigcup_{a\in\Lambda_n}\left(\left\|M^{(n)}a\right\| \geqslant r\sqrt{n}\right)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geqslant 2r\sqrt{n}\right) &\leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{a\in\Lambda_n}\left(\left\|M^{(n)}a\right\| \geqslant r\sqrt{n}\right)\right) \\
&\leqslant \sum_{a\in\Lambda_n} \mathsf{P}\left(\left\|M^{(n)}a\right\| \geqslant r\sqrt{n}\right) \\
&\leqslant \sum_{a\in\Lambda_n} \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \text{ (d'après 19))} \\
&= \mathrm{card}\left(\Lambda_n\right) \times \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \\
&\leqslant 5^n\left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n = \left(25e^{-\gamma r^2}\right)^n.
\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.